UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XV – Número 56 – Agosto 2019
http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 01-118

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es referenciada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 02-05

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

Chegamos ao número 56 da Revista UNION. Como sempre há diversas direções de pesquisa e com vários temas de interesse do ensino de matemática em seus diferentes níveis. A qualidade dos artigos tem sido mantida pela avaliação rigorosa de nossos pareceristas.

Nesse número na sessão Firma Invitada temos a colaboração do **Dr. José Manuel Dos Santos Dos Santos.** Nosso convidado, para esse número, tem desempenhando as funções de professor de Matemática no Ensino Básico, no Ensino Secundário e no Ensino Profissional. É Doutor em Álgebra Computacional e realizou diversos cursos em nível de pós-graduação tais como, Especialização em Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores; Curso de Especialização em Administração Escolar; Curso de Doutoramento em Ensino e Divulgação das Ciências além de ter obtido Diploma de Estudos Avançados em Álgebra Computacional.Seu artigo "**Aprender, Desaprender e Reaprender – Matemática para Todos"** apresenta a situação curricular em relação à matemática escolar, nas últimas décadas, no ensino não superior em Portugal. Nele José Manuel discute a "evolução" e o papel assumido pela avaliação no desenvolvimento de práticas promotoras de aprendizagem. Além disso apresenta alguns apontamentos sobre a situação da Educação em Matemática em Portugal. A revista ganha muito com essa publicação e muito agradecemos ao seu autor, Dr. José Manoel Dos Santos Dos Santos.

No que segue apresentamos outros 5 artigos que compõem o número 56.

"Identifying academically at-risk incoming freshmen at a private university in Uruguay: Psychometric evaluation of a mathematics diagnostic test" é o título do artigo escrito por Wilson González-Espada *et al*. Nele é analisado a Prova Diagnóstica de Matemáticas (PDM) oferecida na Universidade Católica do Uruguai (UUC), questionando se é apropria da psicométricamente e, também, em que grau a PDM se correlaciona com o sucesso acadêmico. A pontuação nas perguntas mostra a correlação mais alta com o número de aulas de matemática completadas, o que confirma que os estudantes poderiam precisar de suporte académico adicional para poder permanecer no programa de engenharia.

O segundo artigo "***Design* de problemas na formação inicial de professores para a (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais**" foi escrito por

Figueiredo e Groenwald. Podemos encontrar nesse artigo os resultados de uma investigação qualitativa, em que o objetivo era investigar, por meio do *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, para a sua (re)formulação e resolução, quais conhecimentos são produzidos por futuros professores de Matemática.

"¿Quiéntiene una respuesta diferente? Análisis del rol docente durante la argumentación em la clase de matemática", o terceiro artigo de Rasse e Solar trazem a argumentação na aula de matemática como uma prática de ensino que permite ao aluno apropriar-se do conhecimento, assumindo um papel mais ativo ao trabalhar com problemas matemáticos e dialogar com seus pares em busca da resposta correta.

O quarto artigo denomina-se "**Re-Significación de la Representación Matemática em Niños de Grado Tercero de Primaria en una Institución Educativa Pública de Santiago De Cali (Colombia)"** eé de autoria de Cruz e Valencia. A temática do artigo é aressignificação da representação matemática em crianças de terceiro ano do ensino fundamental de uma instituição pública de ensino de Santiago de Cali. Para isso se explorou inicialmente o significado que os alunos tinham sobre o que é a matemática e se registrou a informação.

No quinto e último artigo **"Distribuciones muestrales em poblaciones binomiales: Dificultades de comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato"** os autores Begué, Batanero, Gea e Díaz-Levico e apresentam as principais dificuldades descritas na pesquisa sobre o tema e analisam sua compreensão por alunos do Ensino Médio. Para tanto, estudou-se a média e o intervalo de quatro valores fornecidos por alunos de três cursos diferentes a uma tarefa relacionada à distribuição binomial.

Neste número temos a resenha "**Alicia em el país de las probabilidades"** elaborada por Claudia Vásquez Ortiz da Pontificia Universidad Católica de Chile. Alicia em el país de las probabilidades (Brito, Guíñez, Salinas, Gálvez, Peete Martínez, 2018), foi criado por uma equipe multidisciplinar composta por matemáticos, professores matemáticos, engenheiros, bem como designers, ilustradores, escritores e programadores do centro de modelagem matemática da Universidade do Chile.

O problema deste número 56 intitula-se "**Triángulos, juegos y emociones",** é proposto por nosso colaborador habitual, o professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, e foi inspirado em uma oficina com professores de Matemática em exercício sobre a criação de problemas.

Agradecemos aos autores e aos revisores e convidamos a todos para uma boa leitura!

EDITORAS
Celina Abar e Sonia Igliori

Estimados colegas y amigos*:*

Llegamos al número 56 de la revista Unión. Como siempre hay diferentes investigaciones y distintos temas de interés para la educación matemática en sus diferentes niveles. La calidad de los artículos ha sido mantenida por la evaluación rigurosa de los revisores. Para que la producción dignifique el área de la Educación Matemática Iberoamericana contamos siempre con la colaboración de todos, tanto autores como revisores.

En este número en la sesión Firma Invitada aparece un artículo del **Dr. José Manuel Dos Santos Dos Santos.** Nuestro invitado, para este número, ha estado desempeñando las funciones de profesor de Matemáticas en Educación Básica, Educación Secundaria y Educación Vocacional. Es doctor en Álgebra Computacional y ha realizado varios cursos de postgrado, como la Especialización en Supervisión Pedagógica y Formación de Formadores; Curso de Especialización en Administración Escolar; Doctorado en Enseñanza y Difusión de las Ciencias, además de haber obtenido Diploma de Estudios Avanzados en Álgebra Computacional.

El artículo ““**Aprender, Desaprender e Reaprender – Matemática para Todos”** presenta la situación curricular en relación con las matemáticas escolares, en las últimas décadas, en la educación no terciaria en Portugal. En el artículo José Manuel analiza la "evolución" y el papel asumido por la evaluación en el desarrollo de prácticas de promoción del aprendizaje. También presenta algunas notas sobre la situación de la educación matemática en Portugal. La revista gana mucho con esta publicación que agradecemos a su autor, el Dr. José Manuel Dos Santos Dos Santos.

A continuación presentamos otros cinco artículos que componen el número 56.

“Identifying academically at-risk incoming freshmen at a private university in Uruguay: Psychometric evaluation of a mathematics diagnostic test” es el título del artículo escrito por Wilson González-Espada *et al*. Analiza la Prueba Diagnóstica de Matemáticas (PDM) que ofrece la Universidad Católica de Uruguay (UCU), cuestionando si es psicométricamente apropiada y hasta que grado la PDM se correlaciona con el éxito académico. Estudia los resultados en las matemáticas requeridas al final del primer año, confirmando que los estudiantes con una puntuación baja podrían necesitar apoyo adicional para permanecer en la carrera de ingeniería.

El segundo artículo “***Design* de problemas na formação inicial de professores para a (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais**” fue escrito por Figueiredo y Groenwald. Podemos encontrar en este artículo los resultados de una investigación cualitativa, en la que el objetivo era investigar, a través del diseño de problemas con el uso de tecnologias digitales, para su (re)formulación y resolución, qué conocimientos son producidos por futuros profesores de matemáticas.

“¿Quién tiene una respuesta diferente? Análisis del rol docente durante la argumentación en la clase de matemática”, de Rasse y Solar, trazan la argumentación en la clase de matemática como una práctica de enseñanza que permite a los estudiantes apropiarse del conocimiento, tomando un rol más protagonista al trabajar con problemas matemáticos y dialogar con sus pares en busca de la respuesta correcta.

El cuarto artículo se denomina “**Re-Significación de la Representación Matemática en Niños de Grado Tercero de Primaria en una Institución Educativa Pública de Santiago De Cali (Colombia)”** es de autoria de Cruz y Valencia. El tema del artículo es la re-significación de la representación matemática en niños de grado tercero de primaria en una institución educativa pública de Santiago de Cali. Por lo tanto, se exploró inicialmente el significado que tenían los estudiantes sobre qué son las matemáticas y se registro la información.

En el quinto y último artículo **“Distribuciones muestrales en poblaciones binomiales: Dificultades de comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato”** los autores Begué, Batanero, Gea y Díaz-Levico presentan las principales dificultades descritas en la investigación sobre el tema y se analiza su comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato. Con essa finalidad se estudian la media y el rango de cuatro valores proporcionados por estudiantes de tres cursos diferentes en una tarea relacionada con la distribución binomial.

En este número también aparece la reseña “**Alicia enel país de las probabilidades”** elaborada por Claudia Vásquez Ortiz de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Alicia en el país de las probabilidades (Brito, Guíñez, Salinas, Gálvez, Peet y Martínez, 2018), fuecreado por un equipo multidisciplinario compuesto por matemáticos, profesores de matemáticas, ingenieros, así como también, diseñadores, ilustradores, guionistas y programadores del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

El problema de este número 56 es **Triángulos, juegos y emociones,** propuesto por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM, y que surgió en un taller con profesores de matemática em ejercicio, sobre creación de problemas.

Agradecemos a los autores y revisores, e invitamos a todos a una buena lectura.

EDITORAS
Celina Abar e Sonia Igliori

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Página 06

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

FIRMA INVITADA

https://orcid.org/0000-0002-6830-6503

santosdossantos@ese.ipp.pt

José Manuel Dos Santos Dos Santos

é professor de Matemática. do quadro de nomeação definitiva do Ministério da Educação de Portugal, após a finalização do Curso de Licenciatura em Matemática (Ensino de), em julho de 1993, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Tem desempenhando as funções de professor no Ensino Básico, no Ensino Secundário e Ensino Profissional, professor formador desde 1996 e diversas funções de direcção em organizações públicas e associativas. E sócio das Associação de Professores de Matemática e da Sociedade Portuguesa de Matemática. Da sua formação constam várias pós-graduações: Curso de Especialização em Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores, na Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto, Janeiro de 2002; Curso de Especialização em Administração Escolar, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto (ESEPP) ,Julho de 2003; Curso de Doutoramento em Ensino e Divulgação das Ciências, na FCUP, Julho de 2011; Diploma de Estudos Avançados em Álgebra Computacional, em Agosto de 2016, Universidade Aberta. Em Maio de 2019 obtêm o Doutoramento em Álgebra Computacional. Tem desenvolvido e coordenado diversos projetos de caráter nacional e internacional relacionando a Matemática com as novas tecnologias. Entre outras atividades se destacam: a lecionação várias disciplinas do Ensino Superior; a participação no Programa de Formação Continua em Matemática na ESEPP, como formador desde 2005 e como diretor adjunto de 2006 até 2010; a coordenação do ao Instituto GeoGebra Portugal, sediado na ESEPP, desde a sua fundação; actualmente ser Investigador principal no projeto STEAM, GeoGebra & PLOP – Ensino e Aprendizagem Matemática em contexto STEAM com o GeoGebra nos Países de Língua Oficial Portuguesa e responsável pela organização de formação contínua em GeoGebra, a tempo inteiro em 2019/2020, na ESEPP. Desde 2016 é Formador em GeoGebra da Organização dos Estados Ibero-americanos para Educação, Ciência e Cultura nos Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa. Para alem de publicar regularmente nas áreas de Ensino da Matemática e da Álgebra Computacional tem atividade como revisor em revistas internacionais.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 07-25

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Aprender, Desaprender e Reaprender – Matemática para Todos

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Resumen	Este texto presenta la situación curricular en relación con las matemáticas escolares, en las últimas décadas, en la educación no superior en Portugal. A partir de una breve presentación de los currículos y programas implementados, se discute su "evolución" y el papel asumido por la evaluación en el desarrollo de prácticas de promoción del aprendizaje. Además, se presentan algunas notas sobre la situación de la Educación Matemática en Portugal. A lo largo del texto se presenta la opinión del autor sobre los cambios en el plan de estudios de las matemáticas escolares en Portugal, especialmente en las últimas dos décadas, informada por su experiencia como formador y profesor de Matemáticas, disciplina al alcance de todos.. **Palabras clave**: currículum, evaluación, aprendizaje de matemáticas.
Abstract	This text presents the curricular situation in relation to school mathematics in the last decades in non-higher education in Portugal. From a brief presentation of the curricula and programs implemented, discussing their "evolution" and the role assumed by the evaluation in the development of learning promoting practices. Also, some notes on the situation of Mathematics Education in Portugal are presented. Throughout the text is presented the author's view on the changes in the curriculum of school mathematics in Portugal, especially in the last two decades, informed by his experience as a trainer and teacher of Mathematics, discipline within everyone's reach. **Keywords**: curriculum, assessment, math learning.
Resumo	Este texto, apresenta a situação curricular em relação à matemática escolar, nas últimas décadas, no ensino não superior em Portugal. A partir de uma breve apresentação dos currículos e dos programas implementados, discutimos a sua "evolução" e o papel assumido pela avaliação no desenvolvimento de práticas promotoras de aprendizagem. Também, são apresentados alguns apontamentos sobre a situação da Educação em Matemática em Portugal . Ao longo do texto é apresentada a visão do autor em relação as mudanças operadas no currículo da matemática escolar em Portugal, especialmente nas últimas duas décadas, informada pela sua experiência como formador e professor de Matemática, disciplina ao alcance de todos. **Palavras-chave:** currículo, avaliação, aprendizagem em matemática .

1. Introdução

A minha experiência nos passados anos letivos, como professor do Ensino Básico e Secundário, em Portugal, reacendeu várias das minhas inquietações como professor de matemática. Quando me pediram para escrever este texto, que desde já agradeço a oportunidade, encontrava-me num processo de reflexão sobre o meu papel de professor, questionamento a minha prática em relação a diferentes enquadramentos teóricos em Educação e na Didática da Matemática.

Em relação ao contexto curricular e programático da matemática em Portugal, desde 2007 até 2019, considero que há três realidades: desde 2007 a 2013 esteve em vigor o documento Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB2007; ME, 2007); de 2013 a 2018 o Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB2013; Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013) e (PMES2014; Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2014) ; a partir de 2018 as Aprendizagens Essenciais, definidas para o Ensino Básico e Ensino Secundário (AE; ME, 2018) definidas para todas as disciplinas. Note-se porém que o PMEB2007 sucede ao desenvolvimento do Projeto de Reflexão Participada, medida política que conduziu ao "Currículo Nacional do Ensino Básico " (CNEB2001; ME, 2001), em 2001, centrado em competências (Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de janeiro) e culminou com a sua revogação, em 2012 (Decreto-Lei n.º 139/2012) e subsequente homologação das "Metas Curriculares", nomeadamente para a disciplina de matemática (Despacho N.º 5165-A/2013, de 16 de abril, e Despacho N.º 868-B/2014, de 20 de janeiro).

Todas estas mudanças normativas têm muita influência no quotidiano da prática das escolas e dos docentes, influência que se agrava em períodos onde coexistem no seio da comunidade educativa situações diversas que se enquadram em múltiplos quadros normativos. O professor, como profissional reflexivo, tem de optar por estratégias que, para bem da promoção das aprendizagens dos seus alunos, colidem com o prescrito na norma legal, o que acarreta um aumento de stress e de responsabilidade profissional.

As estratégias a definir têm de partir sempre de um inventário de necessidade dos grupos turma, que são cada vez mais diversos e heterogéneos, em relação aos seus interesses e necessidades de aprendizagem. Esta diversidade é um facto muito positivo considerando a função democrática da Escola, contudo coloca muitos desafios ao professor. Acresce ainda que a formulação de estratégias, no contexto de um permanente desenvolvimento profissional, leva o docente a estar atento a *novas* abordagens educacionais, cuja informação chega rapidamente mas carece de tempo de estudo e de reflexão antes de as poder transpor para a sua prática.

A informação sobre estas *novas* experiências de aprendizagem chega também com celeridade aos jovens, muitas vezes pelas partilhas nas redes sociais dos seus pares, pares que se estendem a um mundo cada vez mais global, provocando o questionamento natural aos professores sobre o desenvolvimento de experiências semelhantes na escola. Situação que não é fácil de gerir pelo docente por múltiplos constrangimentos relacionados com a grande heterogeneidade dos grupos de trabalho, dificuldades de recursos e meios, com a função de controlo da avaliação, externa, que exerce no quotidiano escolar e na sociedade portuguesa, um forte papel de seleção influenciando as escolhas dos jovens para o Ensino Superior, bem como a conclusão do Ensino Secundário.

Mas será que as atuais opções programáticas e curriculares para a matemática serão a melhor forma de lidar com a mudança, a diversidade, a necessidade de estratégias diversificadas, e a rapidez dos fluxos de informação no atual contexto da escola? Será à volta desta questão que me ocuparei nos pontos seguintes deste texto.

2. O contexto Português

Em Portugal, o sistema de ensino não superior, até 1974, não garantia a escolaridade primária para todos os cidadãos, existindo durante décadas grandes taxas de analfabetismo na população. O país garantia apenas nos meios mais urbanos uma oferta dual. Por um lado o ensino liceal, fortemente elitista e que permitia o acesso ao ensino superior, e o ensino técnico que preparava os *mestres* para o exercício de profissões. Nas escolas portuguesas eram desenvolvidas práticas de ensino relacionadas com a transmissão de conhecimentos, fortemente condicionadas pela avaliação externa que regulava a transição.

Após a revolução de Abril de 1974, o país faz um grande esforço pela democratização do acesso a escola, apesar de este processo ter iniciado em 1973 com a reforma de Veiga Simão [1], colocando-se ao país grandes desafios nos recursos materiais e humanos necessários à criação do acesso universal à escola. A escolaridade obrigatória passa a integrar os primeiros seis anos de escolaridade.

No período desde 1976 a 1986, há um período de normalização após o período pós revolucionário, privilegiando-se os aspetos curriculares, técnicos e profissionais, em detrimento dos ideológicos ocorridos entre 1974 e 1976.

Em relação à Educação Matemática há um período que Ponte (1983) designa por “Incubação”, que vai até à década de 90, apesar de não se reclamar como um saber autónomo, tal como o define:

> o saber que se procura debruçar de modo sistemático e consistente sobre os problemas que afectam o ensino e aprendizagem desta disciplina, bem como a formação de professores e o contexto curricular, institucional, social e cultural em que se desenvolve a acção educativa (Ponte,1993).

No período até 1980, há algumas publicações da Gazeta da Matemática, apesar de muito diversas, que contêm algumas reflexões sobre o ensino da matemática. As personalidades que mais se destacam neste período com as suas reflexões são Bento de Jesus Caraça e José Sebastião e Silva. Neste período as intervenções são em geral realizadas por matemáticos com preocupação no ensino e muito focadas em questões da “didáctica da matemática” a melhor forma de ensinar, longe ainda do conceito de Educação Matemática atrás citado.

O fim da década de 70 e na década seguinte, o país teve de fazer um grande esforço, a palavra de ordem era aprender! A sociedade em geral, nas escolas os professores e os alunos, estiveram todos envolvidos num processo transformador, para além da aprendizagem da democracia era preciso muito para poder concretizar o desafio inerente a massificação do sistema de ensino de modo a contribuir para

[1] José Veiga Simão, Ministro da Educação nacional entre 1970 e 1974. Depois da revolução de 1974 foi Ministro da Indústria e Energia (1978-1983) e Ministro da Defesa (1997-1999).

um desenvolvimento e num país que tinha estagnado durante mais de quatro décadas.

Dada a grande necessidade de melhorar os níveis de formação da população portuguesa até o início do século XXI, as práticas letivas nas escolas portuguesas em geral são caracterizadas pela implementação de uma pedagogia por objetivos, influenciada pela teoria behaviorista da aprendizagem, associada a psicologia comportamentalista. O foco na transmissão de informação e de conhecimentos paulatinamente dá lugar à introdução de outras práticas de ensino mais ativas, nomeadamente na área do ensino da matemática, fruto dos movimentos associativos de professores, não sendo estas práticas uma situação generalizada. Contudo, as práticas avaliativas em matemática tendem privilegiar a avaliação sumativa, fruto da existência de avaliação externa à disciplina.

Na avaliação dos alunos, a subjugação quase que exclusivamente aos objetivos previamente estabelecidos consolida-se, adotando-se muitos dos traços do modelo de currículo proposto por Tyler (1949), porém implementa-se uma aplicação linear deste modelo, sendo o currículo e a avaliação fortemente condicionada pela administração central, tendo uma função essencialmente certificadora das aprendizagens. Contudo, dos pressupostos iniciais do modelo de Tyler, que eram fortemente influenciados pelas ideias de Dewey, dois foram negligenciados, a saber: um desenvolvimento curricular dinâmico; o papel essencial do professor tinha na avaliação e reformulação do currículo, sempre a partir da análise das aprendizagens dos alunos e dos resultados da aplicação do currículo na prática letiva. (Wraga, 2017).

Na última metade da década de 70, houve necessidade de um grande aumento de professores com formação para o ensino da matemática, dada a urgência da democratização da educação. Neste contexto, as Ciências de Educação começam a estar representadas no Ensino Superior, assumindo um papel importante do desenvolvimento da educação à semelhança do que acontecia nos países desenvolvidos, apesar de muitas opiniões discordantes silenciadas por algum tempo. Posteriormente, há um grande número de portugueses que obtêm mestrado em questões relacionadas com a Educação Matemática, nomeadamente nos mestrados da Universidade de Boston. Desenvolve-se o Projecto MINERVA, no fundo a Educação Matemática em Portugal entra na fase de “Início”, tal como define João Pedro da Ponte (1993).

Será a partir de 1986, que o Ensino Básico – universal, obrigatório e gratuito – passa a ter a duração de nove anos, com a publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo em 1986. A partir do ano letivo de 1989/90, o Decreto-Lei no 286/89, de 29 de agosto, estabelece a reforma curricular para o Ensino Básico e o Ensino Secundário que se manteriam até ao fim do século XX. Nesta reforma curricular é introduzida Área Escola, uma área curricular não disciplinar e a disciplina de Formação Pessoal e Social em alternativa à disciplina de Educação Moral e Religiosa Católica ou de outras confissões. Assumem papel de destaque os objetivos da área curricular não disciplinar - Área Escola - a concretização dos saberes através de atividades e projetos multidisciplinares, a articulação entre a escola e o meio, e a formação pessoal e social dos alunos. Contudo, esta grande oportunidade de mudança curricular, útil para o desenvolvimento de aprendizagens matemáticas em contextos multidisciplinares, enfrentou grandes dificuldades de implantação, muitos consideraram a existência da área curricular uma ameaça, pela

redução de tempo letivo destinado às disciplinas, especialmente aqueles que se viam baixo o foco da opinião pública pelos resultados das avaliações externas. Note-se que o diploma que introduz esta reforma curricular vê na avaliação uma das forma de garantir o controlo da qualidade do ensino (ponto 1, do artigo 10º do Decreto-Lei no 286/89, de 29 de Agosto). Neste período há ainda um grande apelo em relação à necessidade de recursos à tutela, por parte dos professores e das escolas, nomeadamente para o desenvolvimento de atividades de apoio e de remediação das aprendizagens. Contudo, apesar de recursos consideráveis afetos a estas exigências o certo é que estas estratégias não tinham os resultados pretendidos, no caso da matemática ficavam muito além do desejado acentuando o fatalismo dos alunos em relação ao seu sucesso na disciplina.
No fim da década de 90, há uma forte movimentação das comunidades educativas e académicas para a análise da situação da matemática escolar, em grande parte pelos resultados dos exames finais do Ensino Secundário iniciados no ano letivo de 1995/1996. São elaborados relatórios com recomendações no sentido de influenciar os decisores políticos para uma mudança curricular com influência nas práticas de ensino e aprendizagem promovidas no contexto da matemática escolar (Ponte, 1997; APM, 1998, 1998a). Muita desta discussão, amplamente realizada no país, decorre da implantação do projeto de Reflexão Participada dos Currículos do Ensino Básico que irá produzir um documento orientador para uma Reorganização Curricular que se implementará a partir dos anos 2001-2002 para o 1º e 2º ciclos, e 2002-2003 para o 3º ciclo.

Muitas das alterações da última década do séc. XX, para a matemática escolar se sustentam na opinião dos docentes, recolhidas em encontros e consultas públicás e nos resultados de vários projetos que foram ocorrendo no sistema de ensino português, muitos deles agindo sobre as práticas associadas ao ensino e aprendizagem da matemática, apresentando abordagens alternativas, dando papel de relevo aos alunos na construção das suas aprendizagens, diversificando as tarefas, os recursos e as formas de avaliação utilizadas na sala de aula. Pelos efeitos que teve na génese no CNEB2001, visando a inovação curricular na disciplina de matemática, no Ensino Básico, é de destacar o projeto MAT789 que decorreu entre 1988 a 1992, onde o desenvolvimento da comunicação matemática, da resolução de problemas, e de uma posição ativa do aluno perante a matemática tinha um local de destaque (Abrantes, Leal, Teixeira, & Veloso, 1997)

De facto, em Portugal são geradas condições para uma mudança mais sistemática na matemática escolar: há uma sequência de projetos que se vão concretizando nas escolas; assiste-se ao desenvolvimento da investigação em educação matemática conduzida em Portugal; existem vários diagnósticos que levantam várias questões e promovem a reflexão sobre o ensino da matemática; surgem vários recursos, entre eles tarefas propostas por vários grupos de trabalho da Associação de Professores de Matemática promovendo a sua publicação, não podendo esquecer também o papel relevante da APM, desde 1993, com a publicação de traduções de diversas documentos produzidos do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Surgem também estruturas ativas no estudo específico da Educação Matemática, como sejam o Grupo de Trabalho para a Investigação da Associação dos Professores de Matemática (GTI/APM) e a Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM/SPCE). O inicio dos anos 90 corresponde de facto a um período de “Desenvolvimento” da Educação Matemática em Portugal (Ponte, 1993). Neste período os professores sentiram-se convocados para encontros regionais e nacionais, desenvolveram-se muitos projetos de investigação, que apesar de influenciados por diversas correntes, reforçaram o desenvolvimento do trabalho desenvolvido na investigação e nas escolas.

Na primeira década do séc. XXI, em Portugal tenta-se estabelecer um currículo por competências, consubstanciado na implementação do CNEB2001, valorizando o papel formativo da avaliação, e a utilização de metodologias de ensino mais ativas. Os pressupostos gerais do documento assentam fortemente na ideia do currículo desenvolvido por competências, fortemente disseminada pela obra de Philipe Perrenoud (Perrenoud,1999a), conceito cujos fundamentos foram enunciados na década de 70 do séc. XX (Klingstedt,1972).

A abordagem de um currículo por competências foi objecto de muita polémica, e de difícil aplicação no contexto português, à semelhança do que aconteceu noutros países. Os defensores dos modelos escolares tradicionais clamavam a importância do conhecimento, Perrenoud contrapunha que não podia existir uma abordagem curricular de competências que declinasse a necessidade de trabalhar os saberes e conceitos. As competências seriam conhecimento em ação, clamando que a escola organizada por competências era a oportunidade de ajudar aqueles que não aprendem sozinhos, para os quais a escola do séc. XIX não se adapta e necessita de ser atualizada (Perrenoud,1999).

Fruto das iniciativas do Programa de Formação Contínua em Matemática (DGE,2005) e do Plano de Acção para a Matemática (DGE, 2006), na primeira década do séc. XXI, tinham-se introduzido, na prática das salas de aulas, alguns instrumentos de avaliação diferentes na disciplina de matemática, como por exemplo testes em duas fases, relatórios de trabalhos de pesquisa ou com o uso da tecnologia. Também, desenvolveram-se práticas de avaliação mais focadas nos processos e menos nos resultados, nomeadamente a componente reguladora da avaliação do ensino e da aprendizagem da matemática, promovendo-se uma avaliação de cunho marcadamente formativa - uma avaliação reguladora – uma avaliação que obedecia a três critérios de qualidade para os processos avaliativos colocados ao serviço da aprendizagem: a compreensibilidade, a adequabilidade e a eficácia (Santos, 2011: pp.159-161).

O programa de matemática de 2007 (PMEB2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira,2007), tinha em consideração as normas para a matemática escolar (NCTM, 2000), procurando garantir a qualidade das aprendizagens matemáticas para todos nomeadamente nas finalidades e nos objetivos gerais que apresenta. Este programa destacou como capacidades transversais a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática, para além de indicar orientações metodológicas e, obviamente, os temas. Na sua elaboração e, pela primeira vez, se estruturou um programa para os nove primeiros anos de escolaridade como um todo coerente, sendo realizado por uma equipa plural que envolveu, matemáticos, educadores matemáticos com formação matemática de base e professores de vários níveis de ensino. Neste programa era referido o papel da tecnologia como recurso e potenciador do ensino e aprendizagem da matemática. Da análise da bibliografia deste documento sobressaem inúmeras referências as normas curriculares elaboradas pelo National Council of Teachers of Mathematics. Também convém referir que este programa incorpora uma experiência consolidada em estratégias de intervenção anteriores, para o ensino e a aprendizagem da matemática, a saber: a) aparece depois de em

2005 ter sido iniciado o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º ciclo do Ensino Básico, uma estratégia de formação que para além de sessões de formação presencial incluía uma componente de sessões de acompanhamento em sala de aula; b) apoia-se na experiência de um Plano de Ação para a Matemática, com incidência no 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário; c) é alvo de um Plano de implementação do Novo Programa de Matemática (DGE, 2008).

O século XXI para a Educação Matemática foi um período de *Consolidação* e ao longo de duas décadas confluíram diversos interesses nesta área de conhecimento. Muitos consideraram a matemática como ferramenta de intervenção social e importante no desenvolvimento do país. A academia olhou de modo sistemático para as questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática, a partir de múltiplas abordagens e recorrendo a várias metodologias de investigação. Mesmo ao nível da formação inicial e contínua de professores se realizaram muitos estudos sobre o efeito no desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Finalmente, é necessário realçar o facto de as alterações curriculares e programáticas na disciplina de Matemática e os estudos relacionados com a Educação Matemática terem estado lado a lado na analise das questões educativas da Matemática em Portugal. De facto múltiplos atores estiveram nas escolas e nas academias estudando as questões de Educação Matemática, a investigação fez-se na ação e da própria ação se fez investigação. Como Ponte aprestando os múltiplos trabalhos realizados neste período nos refere "a investigação em educação matemática em Portugal, em pouco mais de vinte anos, fez certamente um percurso notável" (Ponte,2007).

Entre 2012 e 2018 há o retomar das ideologias dominantes em Portugal até final do séc. XX, introduzindo-se exames nacionais de matemática no ano terminal de cada um dos ciclos, contrariamente à situação que se verificou durante vários anos com exames nacionais no ano terminal do 3º Ciclo do Ensino Básico e no final do Ensino Secundário. Esta situação levou, em muitas escolas, ao reforço e privilégio da componente sumativa da avaliação em detrimento das práticas formativas, que se vinham consolidando desde 2005.

Apesar da consolidação da Educação Matemática em Portugal na primeira década do séc. XXI, dos múltiplos estudos existentes, do cuidado no desenho curricular e programático na matemática escolar em dialogo estreito com a Educação Matemática, dá a sensação que o país muito Desaprendeu. Nas escolas muitos dos professores tiveram que remar contra a maré, nada que não tivesse já o seu prenuncio,

> o principal problema de ordem externa é a oposição do movimento do tipo *back to basics*, que pretende voltar atrás no ensino da Matemática, defendendo abertamente a aprendizagem por memorização e sem compreensão e colocando a ênfase no treino de algoritmos e de técnicas repetitivas (Ponte,2007).

Posteriormente, em 2013 e 2014, foram homologados os programas de matemática do Ensino Básico (PMEB2013) e Ensino Secundário (PMEB2014), respetivamente. No caso do PMEB2013, são definidas três grandes finalidades para o ensino da matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Este documento define objetivos para a disciplina de modo hierárquico e com quatro níveis desempenho para o 1º e 2º ciclos, acrescentando mais 3 para o terceiro ciclo (MEC, 2013). No entender do Grupo de Trabalho de Matemática (GTM), instituído pelo Despacho nº 12530/2018, “trata-se, portanto, de uma formulação de objetivos muito distinta da de todos os anteriores programas, baseada na diferenciação de desempenhos que nem sempre parecem facilmente apreciáveis ou destrinçáveis” (Canavarro, Albuquerque, Mestre, Martins, Silva, Almiro, Santos, Gabriel, Seabra & Correia, 2019). Na equipa que elaborou os programas de matemática de 2013 e 2014, estiveram envolvidos matemáticos, professores das Ciências da Educação, com formação de base em Psicologia, e professores de Matemática. Ambos os programas prescrevem um conjunto de metas curriculares para a disciplina de Matemática e, em simultâneo, são introduzidos exames nacionais em todos os ciclos do Ensino Básico.

De facto, desde 2017, muita transformação tem vindo a ocorrer no currículo escolar em Portugal, sendo a definição do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO; Martins, Gomes, Brocardo, Pedroso, Carillo, Silva, Encarnação, Horta, Calçada, Nery, & Rodrigues, 2017) que determina as atuais mudanças de currículo e dos programas das disciplinas, definidas estas últimas nas Aprendizagens Essenciais (AE).

Mas aqui reside a primeira grande alteração da realidade educativa vivida até 2017, o PASEO altera muito as finalidades com que a escola em Portugal se passa a orientar, retomando a opção pelas competências em detrimento do enfoque exclusivo em conteúdos. O PASEO define competências como combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes, centrais no perfil dos alunos, na escolaridade obrigatória (Martins et al., 2017), mas as AE continuam a definir objetivos, agora como aprendizagens essenciais, apesar destes estarem formulados nas AE de um modo mais abrangente que no PMEB2013 e PMES2014.

De 2013 a 2017, vigoraram exames nacionais desde o 1º Ciclo, o que não acontecia desde a década de 70 do Séc. XX, fixando o programa de matemática uma prática letiva fortemente ancorada numa perspetiva comportamentalista da aprendizagem, associada a uma pedagogia por objetivos. Apesar de terem sido extintos em 2017 os exames finais dos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico, substituindo-os por provas de aferição, atualmente prevalece ainda o exame nacional na disciplina de Matemática no 9º ano. final do último ciclo do Ensino Básico, e no 12º ano. Esta situação não deixa de gerar alguma perplexidade, sendo a escolaridade obrigatória de 12 anos, questionando-se a existência de provas finais, com considerável impacto na avaliação final dos alunos, cujos resultados nas disciplinas de matemática conduzem a que muitos dos alunos abandonem a escolaridade obrigatória sem cerificação, mesmo quando não pretendem ingressar para o ensino superior.

O certo é que o quotidiano dos alunos e dos professores é cerceado: por um enquadramento pouco claro; pela existência de múltiplos documentos a regularem a ação dos docentes e das escolas, onde não é suficientemente claro o como e o que se deve trabalhar com os alunos; pela diminuição do tempo semanal dedicado à disciplina de Matemática, agravando-se a situação com a manutenção dos antigos manuais escolares preparados para uma visão do ensino e aprendizagem da Matemática muito diferente a que se pretende agora implementar. A atual tutela considerou a necessidade alterar o currículo de matemática, consciente que a situação desta disciplina, em relação à aprendizagem não é a ideal, carecendo de trabalho e estudo pelo que cria GTM com a “missão de proceder à análise do fenómeno do insucesso, tendo em vista a elaboração de um conjunto de recomendações sobre a disciplina de Matemática - ensino, aprendizagem e avaliação.” (Despacho n.º 12530/2018).

Sobre a situação vivida nas escolas na disciplina de matemática, o GTM refere:

> Na realidade, convivem hoje em dia múltiplos documentos com lógicas diversas e que criam um cenário de pouca clareza acerca do que afinal o país pretende para a aprendizagem matemática dos seus alunos. Registamos o desacerto entre as AE e o Programa e Metas Curriculares relativamente às finalidades e objetivos para o ensino da Matemática que atribuímos à tentativa de conciliar documentos inconciliáveis: os Programas e Metas Curriculares (Bivar et al, 2012, 2013, 2014) com o [... PASEO ...], baseados em pressupostos paradigmaticamente distintos na visão sobre a Matemática, sobre o aluno, sobre o seu papel na aprendizagem e sobre as competências/capacidades matemáticas que deve desenvolver. (Canavarro, Albuquerque, Mestre, Martins, Silva, Almiro, Santos, Gabriel, Seabra & Correia, 2019)

Pelo menos a partir de 2017, a ação dos docentes da disciplina de matemática passou a ter um carácter ambivalente, oscilando entre as estratégias a adotar informadas pelo seu conhecimento profissional e as necessárias à implementação de um currículo bastante diferente, novamente focado na aprendizagem, contrapondo-se ao anterior, que embora vigora-se para alguns alunos, media os resultados dos alunos, de forma considerável, pelo desempenho obtido em provas sumativas externas. Está situação acabou por conduzir a existência, não desejável, de um currículo oculto marcado por uma ideologia imposta pelos anteriores textos legislativos, que são em grande medida combatidas pelo PASEO, podendo restar alguma ambiguidade pela reminiscência aos objetivos presentes nas AE.

Deste modo, várias incongruências se tornaram latentes na escola, relacionadas sobre o modo e os conteúdos a avaliar em matemática, situação que ainda afetará a realidade das escolas nos próximos dois anos letivo, onde ainda coexistirão estudantes sujeitos a dois tipos de currículos e enquadramentos programáticos distintos na disciplina de Matemática. Por um lado, há alunos cujo currículo se enquadra nas aprendizagens essenciais, retomando um currículo mais focado nas competências, com um conjunto de conteúdos mais ajustado, valorizando-se a avaliação formativa e ao desenvolvimento de atividades que integram várias áreas disciplinares. Por outro lado, no espaço escolar, outros alunos estão sujeitos a um currículo denso em conteúdos, privilegiando o conhecimento de um grande número de conteúdos, apelando a memorização de tópicos de difícil compreensão para um grande número de alunos, recalcando o carácter atomista do conhecimento e negligenciando o papel da tecnologia, estes também sujeitos a provas de exame nacional.

Comparando o currículo de matemática associado aos programas de 2007 e de 2013 há diferenças substanciais. O primeiro reconhecia um papel relevante à avaliação formativa, o segundo não rejeitando este tipo de avaliação, uma vez que estava prescrita em normativos anteriores, que o legislador não ousou retirar, embargou a sua aplicação a partir do momento que introduziu exames nacionais em todos os anos terminais dos ciclos de estudo do ensino não superior, fazendo com que os docentes e as comunidades escolares voltassem a privilegiar instrumentos sumativos de avaliação, cada vez mais desajustados a uma escola para todos e no contexto de uma escolaridade obrigatória.

O programa de matemática de 2013 reintroduz a ortodoxia dos objetivos, retomando uma prática pedagógica e de avaliação que o programa de matemática de 2007 tentou alterar. Como é do entendimento de Olga Pombo:

> A pedagogia por objectivos, porque se interessa apenas pelos resultados da aprendizagem, é conduzida a praticar uma actividade de avaliação constante mas, tal avaliação, porque não tem em conta os processos utilizados pelos alunos, revela-se de pouco ou nenhum valor formativo (Pombo, 1984)

a reintrodução de uma pedagogia por objetivos baseia-se na falácia da sua pseudo objetividade, incidindo a avaliação sobre resultados de aprendizagem previamente determinados, sendo o papel de autoavaliação do aluno a comparação dos seus resultados com um modelo único, o das respostas corretas. Como Olga Pombo advoga, a principal razão do êxito da ampla disseminação da pedagogia por objetivos está na “desculpabilização” que permite aos docentes; o processo de avaliação determinista associado à prática lhes retira muita da responsabilidade do ato avaliativo, neutralizando-se as angústias da emissão de um juízo de valor sobre o trabalho de outrem. Pombo refere ainda que é na qualidade de um diálogo que se situa o êxito de um ensino e, afinal… mais importante que medir é ensinar, mais importante que ensinar é dar a aprender (Pombo, 1984).
No meu entender, houve uma agenda ideológica marcada no programa de matemática de 2013 que reage contra: o foco na aprendizagem do PNEB2007 nas práticas das escolas em detrimento de uma abordagem com foco no ensino; o assumir da avaliação como um processo, importante na construção do conhecimento do aluno, em detrimento de uma avaliação certificadora, preocupada essencialmente com os resultados estando fortemente focada em estratégias de remediação e exames externos, mesmo em idades desadequadas, como forma de ultrapassar os insucessos. Apesar do PMEB2007 ter objetivos gerais e específicos de aprendizagem na sua formulação, estes pretendem orientar os docentes: nos conteúdos a abordar e o seu grau de detalhe; no desenvolvimento das capacidades a desenvolver; na abordagem temas dos temas transversais que define. No caso do programa de matemática atual, introduzido de modo indireto pelas AE, os objetivos traduzem-se em três vertentes: conhecimentos; capacidades e atitudes. Parece-me poder concluir que na situação atual dificilmente se poderá retomar um discurso fortemente alicerçado nas competências como o que esteve na base do CNEB2001. Assim, perante a dicotomia entre o ensinar e o aprender parece-me ser a função que se atribua à avaliação que já condicionou, e talvez condicione no futuro, as práticas e as alterações que os programas de matemática venham a sofrer.

2. Ensino vs Aprendizagem: O papel da avaliação na dicotomia da mudança

Comparando o currículo de matemática associado aos programas de 2007 e de 2013 observamos diferenças substanciais. A opção por valorizar a aprendizagem e o papel formativo da avaliação levou a que fossem seguidas estratégias distintas na implementação destes dois programas e necessariamente com impacto diverso na escola.

Considerando em primeiro lugar a avaliação, sabemos que as diferenças entre a avaliação sumativa e formativa vem desde muito longe, sendo escalpelizadas por Michael Scriven (1967), um dos primeiros a apontar as diferenças entre estes dois tipos de avaliação. Mesmo no auge da pedagogia por objetivos, desenvolvida a partir da teoria de Tyler, Benjamin Bloom considerava que o papel da avaliação formativa seria fornecer feedback e aconselhamento em todas as etapas do processo de ensino-aprendizagem (Bloom 1969, p.48). Barry e King (1998, p.330) consideram que idealmente a avaliação formativa promove aprendizagem, fornece feedback sobre o progresso, estimula a motivação, constrói autoconfiança e autoestima, e desenvolve capacidades de autoavaliação. Reynolds, Doran, Allers, and Agruso (1995) advogam que uma aprendizagem efetiva carece da existência de congruência entre o ensino, avaliação e os resultados. Mesmo nos modelos teóricos guiados pela pedagogia orientada por objetivos a avaliação formativa é uma peça chave no processo de ensino e de aprendizagem. Contudo, o cunho certificador que o PMEB2013 e PMES2014 deu à avaliação, nomeadamente pela introdução de exames nacionais de fim de ciclo, levou a que os professores usassem instrumentos para avaliação quotidiana dos alunos muito próximos dos exames. A avaliação certificou o sucesso mas também de modo grave o insucesso. Como refere Olga Pombo, num contexto histórico diferente, mas perfeitamente adaptável a situação vivida em 2017, que parece pretender alterar-se :

> *a actividade de avaliação deixa de poder ser pensada como ingénuo mecanismo de padronização e controlo dos conhecimentos adquiridos pelo aluno para dever ser pensada como a forma de exercício daquilo a que M. Foucault chama a "penalidade hierarquizante"* [Foucault, 1975, p.175] *a qual, distribuindo os alunos segundo as suas aptidões e comportamentos, lhes assinala já o seu futuro social, isto é, define o uso que deles poderá ser feito quando saírem da escola. É que, medindo em termos quantitativos as performances dos seus alunos, o que a escola faz, afinal, é hierarquizar os próprios indivíduos, as suas virtualidades e a sua "natureza"* [Foucault, 1975, p.183-185]. (Pombo,1984)

Dadas as dificuldades dos alunos, o insucesso aumentou, observou-se uma redução do número de alunos inscritos nas turmas do Ensino Secundário para prosseguimento de estudos, nomeadamente nas áreas de ciências e tecnologias, e o aumento de alunos a escolherem turmas dos cursos profissionais. No meu entender esta situação foi um sinal de alarme, a diminuição de alunos nos Cursos Humanísticos de Ciências e Tecnologias, e os fracos resultados obtidos em algumas das disciplinas das componentes técnicas do Ensino Profissional, devido a importância que estas áreas tem nos nossos dias, era algo que um país com poucos recursos não se podia permitir. Por outro lado, na minha experiência profissional passei a encontrar um fosso maior entre as capacidades dos alunos nos grupos turma, desaparecendo os alunos com níveis médios, existindo sempre um considerável número de alunos que já não queriam investir nas aprendizagens na disciplina mesmo nos primeiros anos do 3º Ciclo do Ensino Básico. Também, sendo a escolaridade obrigatória de 12 anos em Portugal, o país passou a ver um grande número de jovens sem um percurso regular na sua escolaridade obrigatória, arriscando-se estes a sair do sistema de ensino obrigatório sem as competências necessárias e com uma visão negativa sobre as suas capacidades de aprendizagem, nomeadamente em matemática. De facto, a matemática continua a ser uma das disciplinas que mais frequentemente interfere com a conclusão do Ensino Secundário e, por outro lado, as competências que desenvolve são cada vez mais necessárias à vida na nossa sociedade, fortemente tecnológica e em constante mutação.

Mas então o que continha o PMEB 2007 que parecia poder contrariar o fatalismo do insucesso em matemática, por vezes uma herança familiar, algo que o CNEB2001 também tentou fazer muito pela influência de Paulo Abrantes? Em primeiro lugar o pressuposto que todos são capazes de aprender, em segundo lugar reconhecer a importância que a avaliação tem na disciplina de matemática, colocando-a como uma aliada da aprendizagem.

O programa de 2007 parte de tarefas, resolvidas pelos alunos em grupo, a estes dá voz individual e coletiva, onde se discutem as produções dos alunos certificando-as ou problematizando-as de modo a construir conhecimento, onde o professor tem um papel de orquestrador e interferindo no processo de ensino e aprendizagem através do feedback que dá ao aluno ou ao grupo de alunos. É uma visão proativa perante a aprendizagem Matemática onde como axioma se admite que todos somos capazes de fazer “matemática”.

A função formativa da avaliação está inerente ao PMEB2007, sendo uma estratégia fundamental para a sua concretização o feedback que se dá ao aluno. Black e Wiliam (1998a), numa revisão de literatura, concluem que o feedback tem mais potencialidades quando: a) se concentra em erros específicos e nas estratégias menos adequadas e faz sugestões acerca da forma como se pode melhorar o desempenho; b) estimula a correcção dos erros fazendo o aluno pensar; c) faz o mínimo de sugestões, apenas as necessárias para que os alunos cheguem à resposta por eles próprios; d) fomenta a procura de soluções alternativas; e) se foca mais no processo do que no produto; e f) é implementado de uma forma sistemática. Para além do tipo de feedback a forma como este se dá ao aluno pode assumir forma diversa, Harlen (1998) salienta e recomenda aos professores que tanto as questões orais como as escritas devem ser usadas para testar a aprendizagem dos alunos. Outros autores também alertam para o sucesso de outras estratégias de avaliação dos estudantes, que permitem informar sobre a evolução da aprendizagem, em alternativa aos tradicionais teste, salientando a observação sistemática dos alunos, o atender as diversas variáveis envolvidas na comunicação oral em aula, ao uso de representações ou performances, demonstrações, e portfolios (Brookhart,1999; Stiggins,1994). Barksdale-Ladd e Thomas (2000) identificam cinco boas práticas na avaliação dos alunos: fornecer feedback para ajudar os alunos na melhoria das suas aprendizagens; concetualizar a avaliação como prática do trabalho dos estudantes estimulando a utilização de portfólio; usar a flexibilidade de modo que a avaliação não domine o currículo; assegurar que o resultado da avaliação informa o ensino de modo a que os professores aperfeiçoem as suas práticas no sentido da melhoria das aprendizagens dos alunos; usar vários e diversos instrumentos de medida da aprendizagem na avaliação das aprendizagens. Também McMillan (2000) identifica como características importantes da avaliação a autenticidade, o feedback oportuno, a validade, a justiça, a ética, a eficiência, a flexibilidade, e o uso de múltiplos métodos e instrumentos de avaliação.

Refira-se que o PMEB2007 contém orientações metodológicas, e faz várias recomendações ao nível da avaliação, nomeadamente o uso de diversos instrumentos para a avaliação dos alunos. Também apresenta um conjunto de temas transversais e de experiências de aprendizagem a desenvolver junto dos alunos. O mesmo ancora-se na aplicação de tarefas, sendo objeto de experimentação: em turmas piloto; nas sessões de acompanhamento do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico, iniciado em 2005; em atividades realizadas por grupos de docentes que participaram no Plano de Acção para a Matemática, que abrangeu também o 3º Ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário.

Embora vários estudos tenham mostrado que a utilização de práticas de avaliação com um enfoque formativo produzem ganhos significativos na aprendizagem dos alunos, vários obstáculos se colocam à sua implementação, tais como: a falta de formação dos professores nesta área; o insuficiente número de propostas de modelos de avaliação formativa que, quando existem, geralmente são pautados por uma complexidade excessiva (Perrenoud, 1998/1999); a falta de prática na utilização destes métodos; a pressão em cumprir um programa, incidindo-se no domínio cognitivo usando uma avaliação através de testes padronizados, baseados em fórmulas para contar os erros em detrimento de avaliações mais holísticas (Shepard, 2001).

A dificuldade de implementação de uma avaliação formativa com qualidade defendida no PMEB2007, uma avaliação reguladora das aprendizagens como é definida por Leonor Santos (2011), pode ter facilitado as condições para o aparecimento do PM2013. Refira-se que a generalização de uma avaliação reguladora não aconteceu, apesar dos programas de formação contínua e projectos de acompanhamento de professores iniciados antes do PMEB2007. Esta avaliação foi sempre considerada um processo aliado à aprendizagem dos alunos, sendo aplicadas tarefas em aula e discutidas as resoluções em grupos de professores. Para além da dificuldade inerente à implementação sistemática de estratégias de avaliação reguladora, os professores acusavam a exigência do trabalho solicitado e as escolas continuaram a serem avaliadas socialmente por rankings, que tinham por referência os resultados de provas externas. Como é obvio os resultados que os professores observaram nos alunos, nomeadamente numa outra postura perante a aprendizagem, dificilmente teriam repercussão imediata nessas provas.

Mas a implementação de uma avaliação reguladora nas escolas parece ser a única saída para promover a aprendizagem, da matemática em particular. Como refere Mary James (2017) seja qual for o modo de se realizar a avaliação formativa ela implica: observar; interpretar; julgar. A observação concentra-se nas diversas dinâmicas desencadeadas na sala de aula, de modo a desvelar o conhecimento dos estudantes, usando tarefas, instrumentos escritos ou mesmo perguntas orais, de modo a interpretar as respostas dos alunos. A interpretação orienta-se no sentido de obter, a partir do observado, a evolução do estudante em relação a critérios, metas ou objetivos de aprendizagem. Deste modo, a interpretação implica sempre um raciocínio de inferência em relação ao modo de pensar do estudante. A fase de julgamento implica uma avaliação no sentido de ajudar o aluno a entender em que ponto está em relação ao conhecimento, inventariando os seus pontos fortes e fracos, de modo a ajudá-lo no avanço da sua aprendizagem (James, 2017).

A situação vivida entre 2013 e 2017, na avaliação das aprendizagens dos alunos em matemática, não pode voltar a repetir-se uma vez que representou um grande retrocesso em relação à situação anterior, desenvolvida ao longo de alguns anos de trabalho com os professores nas escolas portuguesas. Uma vez que tive responsabilidades no Programa de Formação Contínua em Matemática, desde 2005, tenho esperança em que muitos professores não deixaram de usar: o que aprenderam; o que resultou da discussão com os seus pares nos momentos de formação e de coadjuvância; o que vivenciaram nas conquistas quotidianas das aprendizagens dos seus alunos, nas descobertas que estes fizeram perante as diversas tarefas e que lhes estimularam o gosto pela Matemática. No meu entender, depois desta fase teremos de analisar as razões pelas quais voltamos a situações de ensino desconfortáveis, que não se traduziram no aumento na motivação para a aprendizagem da matemática. De certo modo, como professores e educadores para a Matemática teremos de reaprender de um passado muito recente para delinear um futuro que já é presente.

Convém ainda registar que neste período, ao contrario da tendência dos anos anteriores, os grupos-turma passaram a ser constituídos por um maior número de alunos, sendo cada vez mais diversos e heterogéneos, tendo em conta os seus interesses e necessidades de aprendizagem, colocando muitos desafios aos professores, por vezes esgotados, mas conscientes que tinham em mão um trabalho urgente e necessário, atendendo à função democrática da Escola

Perante a situação criada pelo PMEB2013 e PMES2014, muito há a fazer para termos um sistema educativo imune a correntes que não privilegiem uma agenda de um ensino e aprendizagem da matemática para todos. Assim a Educação Matemática terá de continuar o seu caminho no sentido de evoluir, parafraseando a metáfora de cariz biológico usada por João Pedro da Ponte (1993), na criação de anticorpos, mecanismos que esclareçam e divulguem o seu trabalho junto da sociedade em geral.

4. Considerações finais

Nas práticas escolares o ensino está sempre presente, mesmo em contextos mais inovadores ao professor é-lhe conferido um papel no mínimo de orquestrador das interações dos alunos com vista a metas previamente traçadas e, neste sentido, a prática que estimula a aprendizagem também ensina. Convém notar que os jovens na escola estão em constante aprendizagem, apesar de esta por vezes estar afastada da pretendida pela organização escolar. Resta a responsabilidade aos docentes em “jogar” com algumas dessas aprendizagens no sentido de promover as outras que interessam à missão da Escola. Como foi ilustrado, no vaivém de reformas curriculares encetadas em Portugal, é notório que as opções de política curricular aplicadas oscilaram entre o foco no ensino ou na aprendizagem dos jovens, o conhecimento de *per se* ou o saber ser e o saber fazer. O trabalho de qualquer docente é observado, quotidianamente, pelos seus alunos e por quem o tutela, os primeiros exigem ser motivados para a aprendizagem os segundos o cumprimento dos normativos em vigor.

Os normativos que deem prioridade aos processos de ensino embargando a aprendizagem dos alunos claramente não serão cumpridos. Contudo, a prevalência desde 1993 do exame final de Ensino Secundário à disciplina de Matemática, cujos resultados são fortemente escrutinados pela sociedade e usados muitas vezes como arma de arremesso político, criaram as condições para que as práticas dos professores de Matemática em Portugal apresentem uma enorme inércia à mudança, pelo que os processos de alteração da praxis exigem períodos longos de formação, reflexão e de análise pelos docentes. Qualquer intervenção no currículo e no programa de matemática carece de especial cuidado, exigindo-se ser objeto de avaliação os processos e os resultados obtidas nas intervenções ou experiências anteriores. Infortunadamente as alterações curriculares e programáticas têm-se sucedido, algumas delas escrutinadas por alguns processos de avaliação, contudo os resultados desta avaliação são negligenciados em detrimento de posições ideológicas sobre educação e inquinados pela grande variabilidade dos resultados dos Exames Nacionais de Matemática.

Alvin Toffler, em 1970, citando Herbert Gerjuoy, refere:

> "The new education must teach the individual how to classify and reclassify information, how to evaluate its veracity, how to change categories when necessary, how to move from the concrete to the abstract and back, how to look at problems from a new direction—how to teach himself. Tomorrow's illiterate will not be the man who can't read; he will be the man who has not learned how to learn." (Herbert George Gerjuoy, citado por Toffler, 1970, p.414)

Cinquenta anos depois, para a escola permanece o desafio de fazer com que os seus estudantes aprendam a aprender, que os seus professores aprendam a aprender com as suas práticas e com as dos seus pares. A escola que se exige para o futuro é uma escola que aprende com a sua pratica num paradigma colaborativo. Neste sentido, é de esperar que as intervenções nos programas e currículos, nomeadamente em matemática, que sejam pouco fundamentadas terão dificuldades em ser implementadas e serem assumidas pelos atores escolares. Ao sabor dos caprichos de alguns, muitos outros tem de aprender, desaprender e reaprender, em especial os professores e as escolas se tiverem como missão o desenvolver a aprendizagem matemática - Matemática para Todos.

Referências

Abrantes, P.,Leal, L., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). MAT789, Inovação Curricular em Matemática. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

APM (1988). Renovação do currículo de Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

APM (1998a). Matemática2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Barksdale-Ladd, M. A., & Thomas, K. F. (2000). What's at stake in high-stakes testing: teachers and parents speak out. *Journal of Teacher Education*, 51, 384-397.

Barry, K., & King, L. (1998). Beginning teaching and beyond (3rd ed.). Katoomba: Social Science Press.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). Programa de Matemática para o Ensino Básico . Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Obtido em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf [PMEB2013]

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., & Loura, L. (2014). Programa e Metas curriculares de Matemática A, Ensino Secundário . Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Black, P., & Wiliam, D. (1998a). Assessment and classroom learning. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5(1), 7-74.. Disponível em 20 de julho de 2019, de https://doi.org/10.1080/0969595980050102

Black, P., & Wiliam, D. (1998b). Inside the black box [Versão electrónica]. Phi Delta Kappan, 80, 139-147. Disponível em 20 de julho de 2019, de https://www.rdc.udel.edu/wp-content/uploads/2015/04/InsideBlackBox.pdf

Bloom, J.S. (1969). Some theoretical issues relating to educational evaluation. In R.W. Tyler (ed) Educational evaluation: New roles, new means. The 63rd yearbook of the National Society for the Study of Education, part 2 (Vol. 69), 26-50. Chicago, Il: University of Chicago Press.

Brookhart, S.M. (1999). *The art and science of classroom assessment: The missing part of pedagogy*. ASHE-ERIC Higher Education Report. 27 (1).

Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Silva, J.C., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., Correia, P. (2019). Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. Retrieved from http://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho. Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de https://dre.pt/application/conteudo/178548

Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de janeiro. Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de https://dre.pt/application/conteudo/338986

Despacho N.º 12530/2018, de 28 de dezembro. Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de https://dre.pt/application/conteudo/117514006

Despacho N.º 5165-A/2013, de 16 de abril. Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de https://dre.pt/application/conteudo/2434885

Despacho N.º 868-B/2014, de 20 de janeiro. Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de https://dre.pt/application/conteudo/1486642

Foucault, M., (1975). Surveiller et punir. Gallimard, Paris.

Harlen, W. (1998). Teaching for understanding in pre-service science. In B.J. Fraser and K.G. Tobin (Eds.) (1998). *International handbook of science education*. (pp. 183-198) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

James M. (2017) Embedding Formative Assessment in Classroom Practice. In: Maclean R. (eds) Life in Schools and Classrooms. Education in the Asia-Pacific Region: Issues, Concerns and Prospects, vol 38. Springer, Singapore

Klingstedt, J. L. (1972). Philosophical basis for competency-based education. *Educational Technology*, *12*(11), 10-14.

Martins, G. d'O., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Lisboa: Direção Geral da Educação, Ministério da Educação. Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico [PASEO]

McMillan, J. A. (2000). *Basic assessment concepts for teachers and school administrators*. ERIC/AE Digest.(ERIC Document Reproduction Service No. ED447201)

Ministério da Educação (2001). Currículo nacional do Ensino Básico . Competências essenciais. Ministério de Educação, Departamento da Educação Básica. Obtido em 20 de julho de 2019, de http://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/wp-content/uploads/2010/09/Curriculo_Nacional1CEB.pdf [CNEB2001]

Ministério da Educação (ME). (2018). Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico. Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico [AE]

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico . Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/programamatematica_2007.pdf [PMEB2007]

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). National Council of Teachers of.

NCTM (2017). Princípios para a ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática. Lisboa: APM.

Perrenoud, P. (1999). Construir competências é virar as costas aos saberes. Pátio. Revista Pedagógica, 11, 15-19.

Perrenoud, Ph. (1999a). Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens. Entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed. (Trabalho original publicado em 1998)

Plano de Ação para a Matemática | Direção-Geral da Educação (DGE), (2006). Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/plano-de-acao-para-matematica

Plano de implementação do Novo Programa de Matemática | Direção-Geral da Educação (DGE), (2008). Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/plano-de-implementacao-do-novo-programa-de-matematica

Pombo, Olga. (1984). Pombo, Olga, "Pedagogia por objectivos / pedagogia com objectivos", Logos, n.º 1 (1984), Lisboa: Filosofia Aberta, pp.43-72.. Logos. 43-72.

Ponte, J. P. (1993). A educação matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. Quadrante, 2(2), 95-126. Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/93-Ponte(Quadrante).doc

Ponte, J. P., et al. (1997). Diagnóstico e propostas para a Matemática escolar. Lisboa: Ministério da Educação, Secretaria de Estado da Educação e da Inovação (não publicado) Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte-etc(ME-SEEI).rtf .

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L, Martins, M. E, & Oliveira, P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico . Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação. Disponível em 20 de julho de 2019, de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/EBasico/Matematica/programamatematica_2007.pdf

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM. Disponível em 20 de julho de 2019, de *http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/08-Ponte%20_Badajoz%2006%20Set_.pdf*

Programa de Formação Contínua em Matemática | Direção-Geral da Educação (DGE), (2005). Disponível em 20 de julho de 2019, retirado de http://www.dge.mec.pt/programa-de-formacao-continua-em-matematica

Reynolds, D.S., Doran, R.L., Allers, R.H., & Agruso, S.A. (1995). Alternative assessment in science: A teacher's guide. Buffalo, NY: University of Buffalo.

SANTOS, L. (2011). Que critérios de qualidade para a avaliação formativa. Avaliação em educação: Dez olhares sobre uma prática social incontornável, 155-165.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. In R.W. Tyler, R.M. Gagne, and M. Scriven (eds) Perspectives of curriculum evaluation. Chicago, IL: Rand McNally, 39-83.

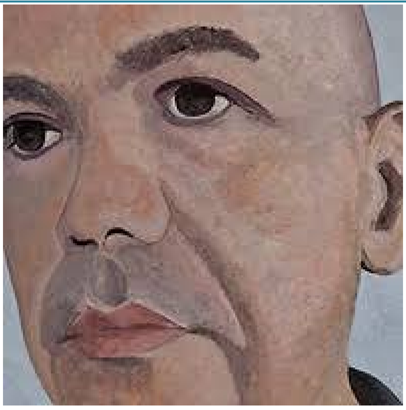
Shepard, L. (2001). The role of classroom assessment in teaching and learning. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 1066-1101). Washington, DC: American Educational Research Association.

Stiggins, R. (1994). *Student-centered classroom assessment*. Ontario: Macmillan College Publishing Co.

Toffler, Alvin. (1970). *Future Shock. Bantam Books: New York.*

Tyler, R. (1949). Basic principles of curriculum and instruction. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Wraga, W. G. (2017). Understanding the Tyler rationale: Basic Principles of Curriculum and Instruction in historical context. Espacio, Tiempo y Educación, 4(2), 227-252. doi: http://dx.doi.org/10.14516/ete.156



José Manuel Dos Santos Dos Santos é professor do Agrupamento de Escolas do Castelo da Maia, Coordenador do Instituto GeoGebra Portugal na Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto, Formador em GeoGebra da Organização dos Estados Ibero-americanos para Educação, Ciência e Cultura nos Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa.

santosdossantos@ese.ipp.pt

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 26-46

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Identifying academically at-risk incoming freshmen at a private university in Uruguay: Psychometric evaluation of a mathematics diagnostic test

Wilson González-Espada, Eduardo Lacués, Gabriela Otheguy, Magdalena Pagano, Alejandra Pollio Rosina Pérez, Marcos Sarasola

Fecha de recepción: 13/12/2018
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen	Este estudio determinó hasta qué grado la Prueba Diagnóstica de Matemáticas (PDM) que se ofrece en la Universidad Católica de Uruguay (UCU) es psicométricamente apropiada. Además, se exploró hasta qué grado la PDM se correlaciona con el éxito académico. Se halló que cinco de las preguntas originales de la PDM, de un total de 30, fallaron las pruebas de validez y confiabilidad, y se eliminaron. Las puntuaciones del resto de las preguntas tuvieron una alta correlación con la cantidad de cursos de matemáticas requeridos al final del primer año, confirmando que los estudiantes con una puntuación baja podrían necesitar apoyo adicional para permanecer en la carrera de ingeniería. **Palabras clave**: Teoría de respuesta al ítem, pruebas diagnósticas, evaluación, matemáticas.
Abstract	This study determined to what extent the mathematics diagnostic test (MDT) used at the Catholic University of Uruguay (CUU) was psychometrically appropriate. Also, after removing “red-flagged” items, the study measured to what extent MDT scores correlated with academic success. It was found that five MDT items (out of 30) did not meet the guidelines and were discarded. The score on the remaining items showed the highest correlation with the number of mathematics courses completed, confirming that students with low MDT-Revised scores might need additional academic support to remain in the engineering program. **Keywords**: Item response theory, diagnostic testing, assessment, mathematics.
Resumo	Este estudo tem dois objetivos principais. O primeiro é determinar até que ponto o exame diagnóstico de matemática (EDM) empregado na Universidade Católica de Uruguay (UCU) era psicométricamente apropriado. O segundo, depois de eliminar todas as perguntas não apropriadas, é determinar até que ponto o EDM poderia ser usado para identificar, a priori, estudantes de engenharia que poderiam ter dificuldade em completar seu primeiro ano de estudos universitários na UCU. Achou-se que 5 perguntas do EDM não correspondiam às indicações, e foram eliminadas. A pontuação nas perguntas restantes

	mostrava a correlação mais alta com o número de aulas de matemática completadas, o que confirma que os estudantes poderiam precisar de apoio académico adicional para poder permanecer no programa de engenharia.
	Palavras-chave: Teoria de resposta a item, exames diagnósticos, avaliação, matemática.

1. Higher Education: Value and Admission Models

In many countries, a college education is highly valued as a public good. A recent UNESCO report indicated that the global expansion of higher education in the last 50 years has been an unprecedented "academic revolution" (Altbach, Reisberg, & Rumbley, 2009). The report noted the chronology of higher education massification, starting with the United States, Canada, Western Europe, and Japan, from 1960-1980, followed by countries in East Asia, Latin America, China, India, and many other developing nations soon afterward. Currently there are over 200 million students enrolled in higher education institutions worldwide (UNESCO, 2015).

A college education is perceived not only as a medium for training and certifying professionals in most disciplines, but also functions to obtain a better paying job with better working conditions and benefits (Thompson, 2019; Villegas, 2019). In the United States, for example, a person with a bachelor's degree diploma earns a median weekly income that is about 65% higher compared with a person with only a high school diploma (U.S. Department of Labor, 2015). Other personal benefits include lower unemployment and better health outcomes (Baum & Payea, 2004; Institute for Higher Education Policy, 2005). From a broader viewpoint, a college education is perceived as a way for societies to develop knowledge economies based on "human capital" economic investments (Gillies, 2011). Other social benefits of higher education include higher volunteer and civic participation, and lower crime (Lochner & Moretti, 2004; Trostel, 2010).

Two basic models of student admissions in higher education are commonly used: open and selective admissions (Mullin, 2017; Tsao, 2005). Institutions that practice open admission policies undergo a non-competitive selection process where all students who want to complete a college education can do so, regardless of previous academic credentials or experiences. In contrast, selective institutions offer admission to only a fraction of the students who apply, mainly the top tier of students based on criteria like high school grades or standardized college entrance examinations.

Those that support open admissions assume that most students, with the proper support, can be successful in college (Ingram & Morrissey, 2009). Other researchers argued that open admissions is essential for assuring access to education and better opportunities for as many people as possible (Vaughan, 1985), producing well-informed members of a democratic society (Roueche & Baker, 1987) and reducing racial, ethnic and economic inequality (Ferreyra, et al., 2017; Mullin, 2012a, 2012b). Further, Shannon, & Smith (2006) argue that open admission policies influence admissions and enrollment processes, curricular structures, faculty hiring, the relationships between community colleges and four-year institutions, advising and counseling activities, and institutional responses to the needs of the schools and employers.

Other higher education institutions favor a selective approach to college admission (Scherer & Anson, 2014). Common arguments in favor of limiting enrollments to academically pre-screened student include allocating scarce money and resources to help students with the greatest probability of academic success and college completion (Bissett, 1995), maintaining high academic standards, providing accelerated academic programs and a rigorous sequence of courses (Astin, 1990), offering additional economic returns for graduates compared with non-selective institutions (Bastedo & Jaquette, 2011), and increasing prestige and improved quality for selective institutions (Dale & Krueger, 2002). Some researchers have argued that the more selective universities are, the less likely it is for poor or minority students to apply, even those with stellar grades, excluding themselves out of the process. This is known as “undermatching”, when there is a significant pool of poor students who are attending colleges that are less selective than the ones they could have attended based on their academic preparation (Bowen, Chingos, & McPherson, 2009). In the United States, most university and a few community colleges follow the selective admissions models.

2. Student Admission and Attrition in Uruguay

Regardless of whether a university has open or selective enrollment, the unfortunate fact is that not all students that are accepted into college reach graduation (Voigt & Hundrieser, 2008). The transition from high school to the first year of college seems to be particularly problematic (González-Espada & Napoleoni-Milán, 2006) Therefore, universities invest resources to reducing attrition (departure from college) and increasing retention (persistence until degree completion).

Research has uncovered many factors that affect student attrition. Raisman (2013) lists four main ones, which he summarized as “college does not care”, “poor service and treatment”, “not worth it”, and “scheduling” issues. The students’ intellectual ability in meeting the demands of academic programs is commonly mentioned as an important factor in college attrition (Byrd & MacDonald, 2005; Laskey & Hetzel, 2011). Tinto (1993) proposed that cultural assimilation, including academic and social integration, is what leads students to remain enrolled in college. Presumably, the more integrated to the college experience students become, the higher the commitment to the process and the less likely they are to leave. Conversely, Student attrition is related to students’ lack of academic integration through differing academic values, and students’ lack of social integration with faculty and peers.

Some entering freshmen might lack "soft skills" needed to succeed in an academic environment, such as attending class, maintaining concentration, using effective study techniques, applying metacognitive tools to recognize to what extent they are understanding the material, asking questions to faculty or peers, recognizing when to seek academic assistance, among others (Laskey & Hetzel, 2011). Additional factors that might contribute to college attrition include the students' personality traits (extraversion, agreeableness, conscientiousness, neuroticism, openness/intellect) and even the students' support and quality of their social network (Eckles & Stradley, 2012; Eggens, van der Werf, & Bosker, 2008; Ridgell & Lounsbury, 2004).

The postsecondary education system in Uruguay was 100% public from 1849 to 1985. Historically, the only option for a college education was Universidad de la República (UdelaR), which was fully supported by the government and where students paid no tuition. Still to this day, UdelaR is available at no cost. After 1985, private universities were allowed to become established, including Catholic University of Uruguay, Montevideo University and ORT University (Obchestvo Remeslenogo Truda; Association for the Promotion of Skilled Trades). These and similar institutions are 100% supported by students' tuition and receive no support from the government (Santalices, 2010).

In Uruguay, the last 15 years have seen slight increases in the number of college students. MEC (2013) noted that the enrollment at UdelaR, about 110,000 students, is about six times larger than the enrollment of all other private universities combined (about 20,000 students). A recent poll reported that 64% of Uruguayans have a positive view of public higher education and 45% have a positive view of private higher education. About 9% and 4%, respectively, have a negative view of higher education. The perception was similar for both residents and non-residents of the capital, Montevideo (Botinelli, 2012).

Not only do all Uruguayan universities have open-admissions policies; students can also attend the public university at no cost. The philosophical underpinnings of UdelaR, including autonomy from political influences, management by shared governance, admission without entrance examinations, no tuition costs, and academic freedom (Universidad de la República, 1958) go back to the republic's founding and were strongly influenced by the Enlightenment and the French Revolution (Karamán-Chaparenco, 2010). An open admission to higher education, Boado (2011) argued, serves an essential democratic, social and civic formation role, even if not all students obtain a college degree.

Interestingly, some scholars have questioned whether the open-admissions policy of Uruguayan universities had truly achieved the goal of equality in access to all citizens (Bruner, 2011). Enrollment data suggests that most students come from medium and high socioeconomic levels and that relatively few students from low socioeconomic levels enter higher education or complete their undergraduate degree. Currently, there are no plans for the government to change the open-admissions policy of public and private universities, or to modify their current economic support structure (Bruner, 2011).

The data associated with college student retention and attrition in Uruguay is compiled and reported by the Ministry of Education and Culture. In their latest report (Ministerio de Educación y Cultura, 2013), it was reported that 23,657 students were admitted to the public university system and 3,785 students were admitted to private universities. In the same year, 6,290 and 1,744 students obtained an undergraduate degree from the public and private university systems, respectively. Assuming that the enrollment has remained more or less similar over the last 5-6 years, that would result in a retention of about 27% and 46% for public and private universities, respectively. Note that, unlike the United States, Uruguay does not calculate retention rates using a first-time, full-time, freshmen 6-year cohort.

Boado (2011) analyzed hundreds of in-depth interviews of Uruguayan college dropouts to report several factors that caused students to stop attending college. These include: (a) Time-management; reduction of free time, difficulty studying and working simultaneously, including transportation issues and class scheduling that overlap work hours; (b) Career disillusionment; a perception dissonance between their perception and the reality of their chosen career; (c) Low academic performance; students obtained low grades in several subjects, and could not improve them even after repeating classes; (d) Curriculum; emphasis on theory instead of practical, hands-on involvement in a career as underclassmen, (e) Length of the program; it was perceived that it took too long to complete all the required coursework; and (f) Institutional climate; students reported an excessively competitive and hostile college environment. Complementary emplanations can be found by considering prior content knowledge (Bourel, Kahan, Miguez, & Stalker, 2017) and reasoning abilities (Lacues, Díaz, & Huertas, 2018) that first-year students bring.

More recently, a group of Uruguay researchers have examined data associated with attrition from local engineering programs and the role of inadequate mathematics preparation (Artigue, Flores, Lacués, & Messano, 2017). Their study concluded that students who have showed repeated academic failure in mathematics classes do not overcome them just by repeating courses until they pass them, and many of them decide lo leave engineering altogether. The researchers argued for reorganizing the curriculum and tutoring in one-on-one and small group settings as interventions that have shown a measure of success in keeping students in the career.

In an open admission university, like the ones in Uruguay, a way to identify incoming freshmen background content knowledge is through diagnostic testing of skill proficiency. This strategy can give academic advisors an idea of who might be more likely to succeed in a specific course and who might be more likely to struggle academically (Legg, Legg, & Greenbowe, 2001; OCDE, 2006). It also gives students an idea of whether or not they might be ready for specific courses they are enrolled in. Diagnostic testing is particularly common in mathematics-related courses, where “math anxiety” is commonplace (Núñez-Peña, Suárez-Pellicioni, & Bono, 2013; Perry, 2004), and many college courses build upon content supposedly learned in high school mathematics courses. Diagnostic testing allows faculty to not only determine the students' mathematical knowledge on entry, but to provide an early alert for students who are most likely to need additional academic assistance (Fhloinn, Bhaird, & Nolan, 2014).

Of course, a diagnostic test is most useful when it has been properly and psychometrically validated. Large-scale, standardized tests items are validated through the piloting of “trial” items during test administrations (these “trial” items are not counted in students’ scores). Psychometric validation is particularly difficult with locally-made tests and low sample sizes (Brown, 2000; Koretz, 2008).

Although many of the more complex calculations are not applicable to locally-made diagnostic tests and low sample size applications, others like item difficulty (when a test item is correctly answered by almost all or almost no test-takers) and item discrimination (when below-average scorers performed better on a test item than above-average scorers) can be adapted to this situation (Crocker & Algina, 1986). These are based on Classical Test Theory (de Klerk, 2014; DeVellis, 2006) and Item Response Theory or IRT (Erdodi, 2012; Yang, 2014). Examples of applying IRT ideas to classroom-made tests include González-Espada (2009, 2008) and Knell, Wilhoite, Fugate, & González-Espada (2015).

3. Research Questions and Rationale

The purpose of this exploratory study was to validate a locally-made mathematics diagnostic test (MDT) using IRT ideas. This MDT was designed by the mathematics faculty at the Catholic University of Uruguay (CUU) and was completed by incoming freshmen entering the engineering programs. After removing psychometrically dubious test items, the revised MDT (MDT-R) was used as an independent variable to determine correlations with the dependent variable, which is success in the participants' first year of college. Two research questions guided this study: (a) What MDT items were inconsistent with IRT guidelines and why? and (b) Are there significant correlations between MDT-R scores and academic success after two semesters of college?

In this study, academic success was defined in three different ways. The first was the number of successfully completed mathematics courses during freshmen year. Academic success was also defined in terms of the number of science-related courses successfully completed during freshmen year. Finally, success was defined as the overall students' grade-point average (GPA). It was hypothesized that a higher score in MDT-R is positively correlated with (a) a higher number of completed math courses within the participants' respective career sequence, (b) a higher number of completed science courses within the participants' respective career sequence and (c) a higher overall GPA.

This study is the culmination of several years of scholarly work related to the articulation of secondary and postsecondary mathematics content, including the cognitive and metacognitive mathematics strategies of freshmen students (Álvarez, Czerwonogora, Lacués, Leymonié, & Pagano, 2007; Álvarez, Lacués, & Pagano, 2002; Lacués, Díaz, & Huertas, 2018).) and the creation of validated tools to predict academic achievement based on high school mathematics courses completed (Álvarez, Lacués, & Pagano, 2004; Bourel, Kahan, Miguez, & Stalker, 2017).

So far, the Department of Mathematics has updated, revised and reorganized first year math classes, like Linear Algebra I & II and Calculus I & II, to allow additional time to cover the required content. For example, these classes now have two parts, Part A and Part B, designed in such a way that student can easily retry a half-class they failed, instead of the whole class. Also, class schedules were condensed from four 2.5-months classes to five 2-months classes, and additional summer classes were scheduled, providing students additional flexibility for retaking a class without getting behind in their engineering program. In addition, a number of different remedial interventions, such as tutoring and supplementary readings, have been adopted to assist those students who have received one failing grade in different courses, or who have repeatedly received failing grades in the same course (Artigue, Flores, Lacués, & Messano, 2017). Finally, elective mathematics classes were added as possible pre-requisites to bring students up to date in the mathematical skills needed to tackle the prescribed math sequence.

Preliminary data suggest that previous efforts have resulted in a 10% reduction in the number of engineering students who are falling behind in their engineering program due to struggling in math classes. Using a data-driven validated diagnostic test is essential to quantifying the relative success of the retention strategies that have been implemented at CUU, better identifying students at risk of dropping out of the engineering programs, and helping students ease these programs in a more efficient way.

4. Methodology

4.1 Context

CUU's School of Engineering and Technologies (SET) have been preparing engineers for more than 25 years, and currently includes seven careers: Informatics, Electric, Industrial, Power Systems, Telecommunications, Audiovisual and Food Systems. Each engineering career has its own specific math requirements and a completion timeline. Table 1 briefly describes CUU' mathematics courses. Each mathematics course is divided into two, 8-week long parts, Part A and Part B. Students must approve Part A prior to completing Part B. Table 2 summarizes the required first-year math classes.

Course	Description
Linear Algebra IA, IB	This course presents the systems of equations and elements of the matrix theory in a unified way and uses these elements to represent geometric situations. Elementary cases are introduced; concepts will be developed abstractly in Linear Algebra II.
Linear Algebra IIA, IIB	This course deals with abstractions, using axiomatic theories motivated by and based upon the issues presented in previous courses. Applications to other branches of mathematics or relating professional training are presented to help the understanding processes of construction of models, and to find the role of mathematics in engineering practices.
Introduction to Calculus	This course introduces basic concepts and procedures in calculus, to provide them with tools wich are necessary to succeed in subsequent courses of Mathematics.
Calculus IA, IB	This course introduces the concepts of calculus, limits, derivatives, integrals, are the basis of any application of mathematics to engineering. Maintaining a balance between rigor and intuition, the

	course shows the need of each of these elements in the mathematical work.
Calculus IIA, IIB	This course extends notions of Calculus I to the study of functions of several variables. Differential of a function is defined using tools of Linear Algebra. Construction of applications is emphasized, basing them on the interpretations made of the notions of partial derivatives, differential or integral.

Table 1. Mathematics course descriptions.

Engineering Career	Required First-year Mathematics Courses
Informatics	Introduction to Calculus A, B Calculus IA, IB
Electrical; Power Systems; Industrial; Telecommunications	Linear Algebra IA, IB, IIA, IIB Calculus IA, IB, IIA, IIB
Food Systems	Linear Algebra IA, IB, IIA, IIB Calculus IA, IB
Audiovisual	Linear Algebra IA, IB Introduction to Calculus A, B Calculus IA, IB

Table 2. Required mathematics courses for each SET engineering major.

4.2 Participants

The research sample consisted of 149 freshmen (69.3% male students and 30.6% female students) entering SET who voluntarily completed the MDT two weeks before the Spring semesters of 2015 and 2016 started. Approximately 70% and 30% of the participants graduated from private and public high schools, respectively. Nearly 72% of the participants came from Montevideo and the remaining 28% came from other Departments in Uruguay. The most popular engineering majors among the participants were Informatics (n = 65, 43.6%), Industrial (26, 17.4%) and Food Systems (n = 24, 16.1%). The rest of the participants were planning to major in audiovisual (n = 12, 8.1%), Power Systems (n = 10, 6.7%), Electrical (n = 8, 5.4%), and Telecommunications (n = 4, 2.7%).

Of 149 students who competed the MDT, 134 finished their first year of college. For these students, course transcripts were requested to the Office of the Registrar. These data allowed the researchers to identify the number of mathematics and science courses successfully completed. Grades included S “outstanding” (6.00-5.50), MB “very good” (5.49-4.50), BMB “good very good” (4.49-3.50), and B “good” (3.49-2.50). Failing grades include R “regular” (2.49-1.50) and D “deficient” (1.49-0.00). Also, overall grade point average (GPA) were noted.

4.3 Instrument

For this exploratory, quantitative study, the MDT was the focus of the analysis. The MDT originally consisted of 30 multiple-choice mathematics questions (1 correct option and 3 distractors) covering topics in arithmetic, probability, statistics, algebra, geometry, analytical geometry and calculus, as described in national curriculum guidelines for secondary education. Items were developed using the mathematics competencies described by Niss (2003) as a theoretical framework. These competencies were: (a) thinking mathematically; (b) posing and solving mathematical problems; (c) modelling mathematically; (d) reasoning mathematically; (e) representing mathematical entities; (f) handling mathematical symbols and formalisms; (g) communicating in, with, and about mathematics; and (h) making use of aids and tools. In addition, three basic content and process standards were integrated within MDT included: (a) executing algorithms; (b) using operations in the context of symbolic, formal, and technical; and (c) applying concepts to solve math problems.

Each item of the MDT was examined by calculating two psychometric parameters. The first one was item difficulty, DF, defined as the number of correct answers divided by the sample size. Following Morales (2012), questions were flagged and discarded from secondary analyses if they were deemed too easy (DF > 0.90) or too difficult (DF < 0.10). Questions were retained if their difficulty was moderate (0.90 > DF > 0.10).

The second parameter was item discrimination, DS, and it measures, for a specific discipline, to what extent each question differentiates between those students who know more and those who know less. DS is calculated by subtracting the number of correct answers for students in the overall top 27 test percentile and the number of correct answers for students in the overall lower 27 test percentile. This difference is then divided by either the number of students in the top or lower 27 percentile, whatever group has more students. (Backhoff, Larrazolo, Rosas, 2000). Following Ebel and Frisbie (1991), questions were flagged and discarded from secondary analyses if DS < 0.15. Questions were retained if DS > 0.16, representing average to very good discrimination.

The revised test, MDT-R, was used to calculate descriptive statistics and Pearson correlations with the proportion of mathematics and science courses completed for each engineering program. Another correlation was calculated using the overall GPA, including math courses, science courses and courses in disciplines like social sciences and humanities. Given the exploratory nature of this study, the limited sample size available, and the importance of balancing the possibilities of Type I and II errors, the researchers set the significance level for all statistical tests at 0.05, The analysis resulted in a set of data-driven equations that can be applied to future diagnostic test takers so that students below a certain threshold, could be identified to receive additional academic support.

MDT-R results were not shared with all mathematics faculty members who taught first-year mathematics courses. The rationale behind this decision was to prevent instructors from developing a priori misperceptions about the students' abilities in math that could potentially affect faculty-student interactions and grading. The fact that the expectations an-instructor sets for individual students can cause him/her to exhibit behavior differentiation and can significantly affect the students' performance has been well documented in the literature (Rosenthal & Jacobson, 1968; Workman, 2012).

5. Findings and Discussion

5.1 Test Validation

Table 3 shows the separate 2015 and 2016 DF and DS indexes for the revised MDT, as well as the combined average indexes. Items that were too easy, too difficult, or that showed low discrimination are color-coded.

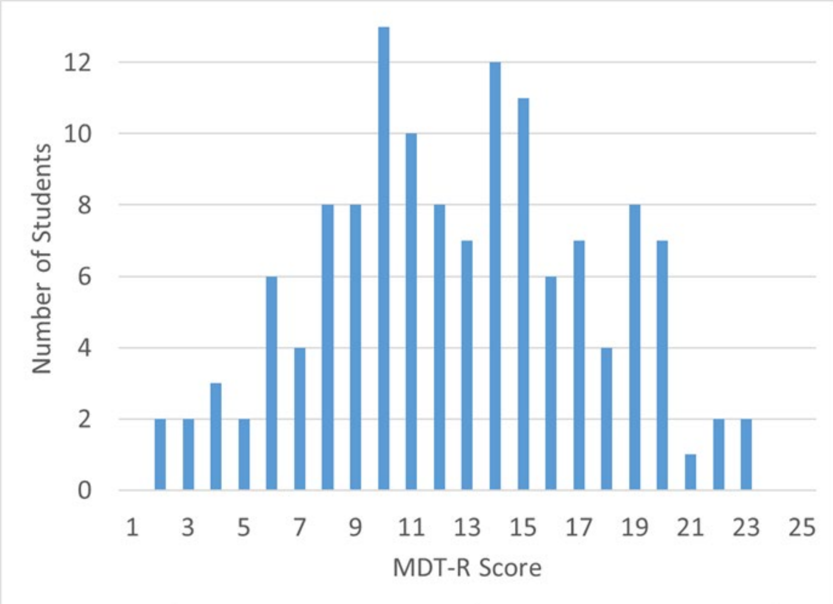
Item	2015 DF	2015 DS	2016 DF	2016 DS	Mean DF	Mean DS	Item	2015 DF	2015 DS	2016 DF	2016 DS	Mean DF	Mean DS
1	0.58	0.68	0.43	0.57	0.505	0.63	16	0.3	0.26	0.16	0.19	0.23	0.23
2	0.63	0.68	0.49	0.57	0.56	0.63	17	0.59	0.74	0.47	0.86	0.53	0.80
3	0.31	0.53	0.34	0.62	0.325	0.57	18	0.74	0.37	0.62	0.57	0.68	0.47
4	0.33	0.32	0.48	0.48	0.405	0.40	19	0.17	-0.11	0.23	0.24	0.2	0.06
5	0.54	0.47	0.47	0.38	0.505	0.43	20	0.63	0.53	0.64	0.48	0.635	0.50
6	0.67	0.53	0.71	0.43	0.69	0.48	21	0.91	0.26	0.92	0.14	0.915	0.20
7	0.55	0.42	0.64	0.43	0.595	0.42	22	0.76	0.16	0.69	0.24	0.725	0.20
8	0.75	0.16	0.57	0.57	0.66	0.37	23	0.62	0.47	0.37	0.57	0.495	0.52
9	0.66	0.58	0.68	0.43	0.67	0.50	24	0.49	0.37	0.51	0.62	0.5	0.49
10	0.24	0.42	0.27	0.19	0.255	0.31	25	0.49	0.53	0.43	0.62	0.46	0.57
11	0.78	0.37	0.67	0.67	0.725	0.52	26	0.44	0.53	0.32	0.76	0.38	0.65
12	0.51	0.79	0.51	0.71	0.51	0.75	27	0.03	0	0.08	0.19	0.055	0.10
13	0.59	0.42	0.55	0.43	0.57	0.42	28	0.43	0.32	0.41	0.24	0.42	0.28
14	0.52	0.21	0.44	0.00	0.48	0.11	29	0.86	0.16	0.76	0.19	0.81	0.18
15	0.41	0.58	0.51	0.62	0.46	0.60	30	0.45	0.05	0.47	0.14	0.46	0.10

Too easy, DF > 0.90 | Too hard, DF < 0.10 | Low discrimination, DS < 0.15

Table 3. MDT-R difficulty and discrimination values.

Items 14, 19 and 30 either have combined or separate item discrimination indexes below the threshold suggested by the literature and were removed from the diagnostic test. Item 21 has combined and separate difficulty values that are too high, that is, most students answered the item correctly, regardless of overall test score. Item 27 has combined and separate difficulty and discrimination indices that are too low; its removal was also recommended by psychometricians. The rest of the items complied with IRT guidelines. For the remaining 25 items, Cronbach's alpha, a measure of internal consistency or reliability, was calculated. The result was an alpha value of 0.794, which means that MDT-R has very good internal consistency (Ebel & Frisbie, 1991).

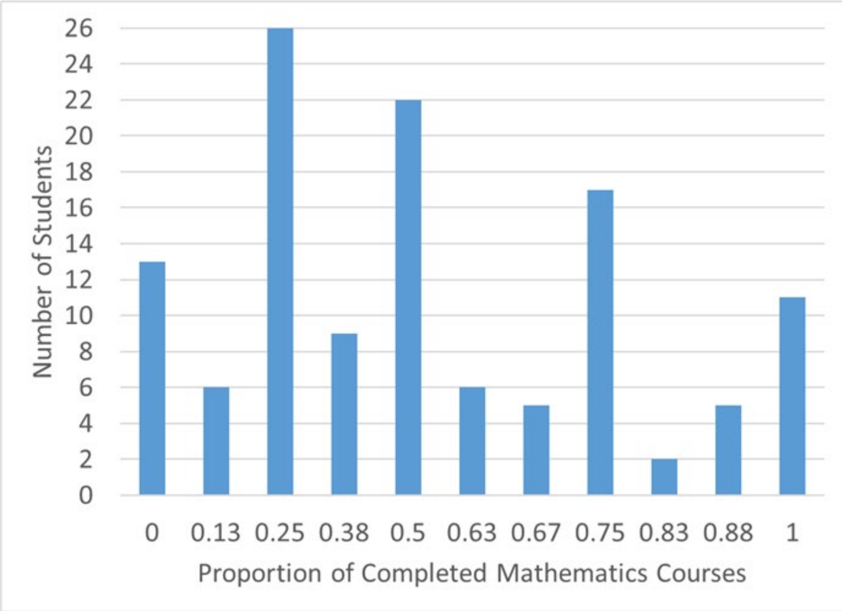
Graph 1 shows how many participants contained a specific score in the MDT-R. The average and median score were 12.65 and 13.00 points, respectively. The standard deviation was 4.85 points.



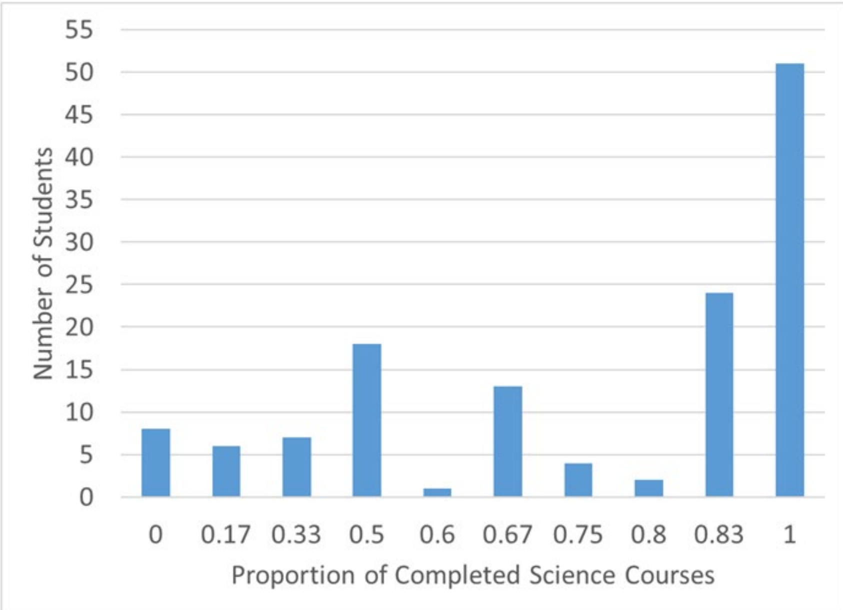
Graph 1. MDT-R Histogram

5.2 Completed coursework in math and science, overall GPA

An analysis of college transcript data revealed that the median proportion of completed mathematics courses was 0.5. In fact, 49.3% of the students was not able to finish half of the required mathematics courses by the end of the second semester. However, required science courses have a much higher completion rates. Only 15.7% of the students was not able to finish half of the required science courses by the end of the second semester. These data were converted into proportions to improve the comparisons because not all majors require the same number of math or science courses. Graphs 2 and 3 summarize these results.

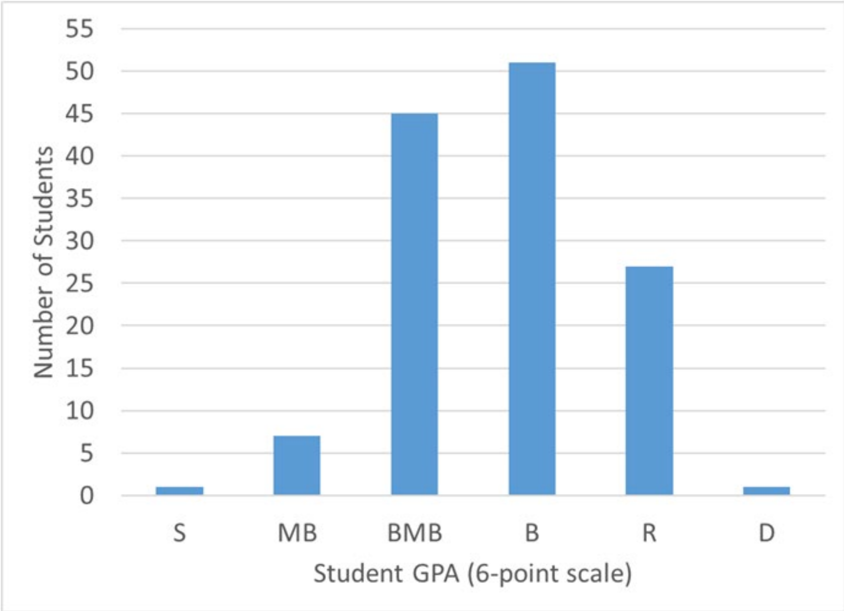


Graph 2. Number of participants who completed a specific proportion of their Year-1 math courses.



Graph 3. Number of participants who completed a specific proportion of their Year-1 science courses.

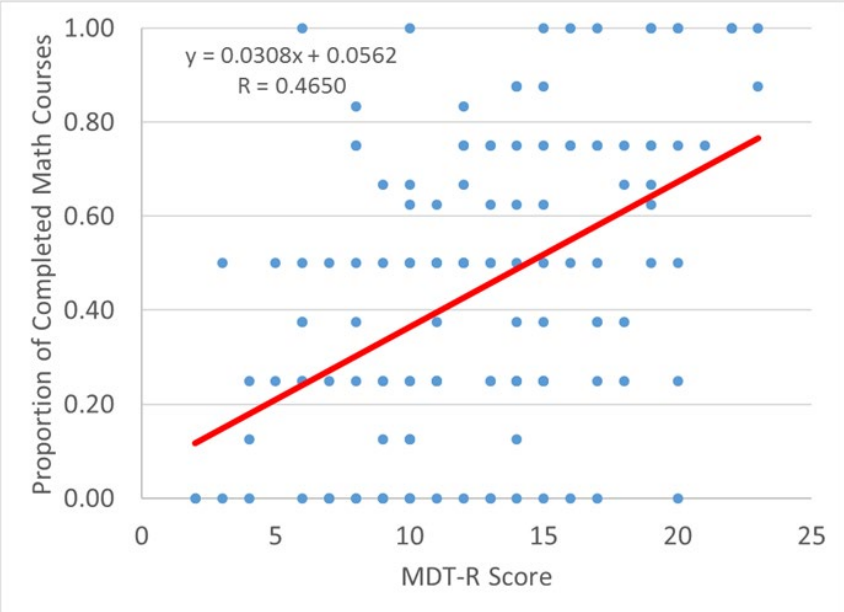
The analysis of college transcripts also discovered that the participants' overall GPA after their second semester had a median of 3.78 (on 6-point scale), equivalent to "good very good". At CUU, letter grades correspond to "outstanding" (Sobresaliente, S; 6.00-5.50), "very good" (Muy Bueno, MB; 5.49-4.50), "good very good" (Bueno Muy Bueno, BMB; 4.49-3.50), "good" (Bueno, B; 3.49-2.50), "regular" (R; 2.49-1.50) and "deficient" (Deficiente, D; 1.49-0.00). Graph 4 summarizes these findings.



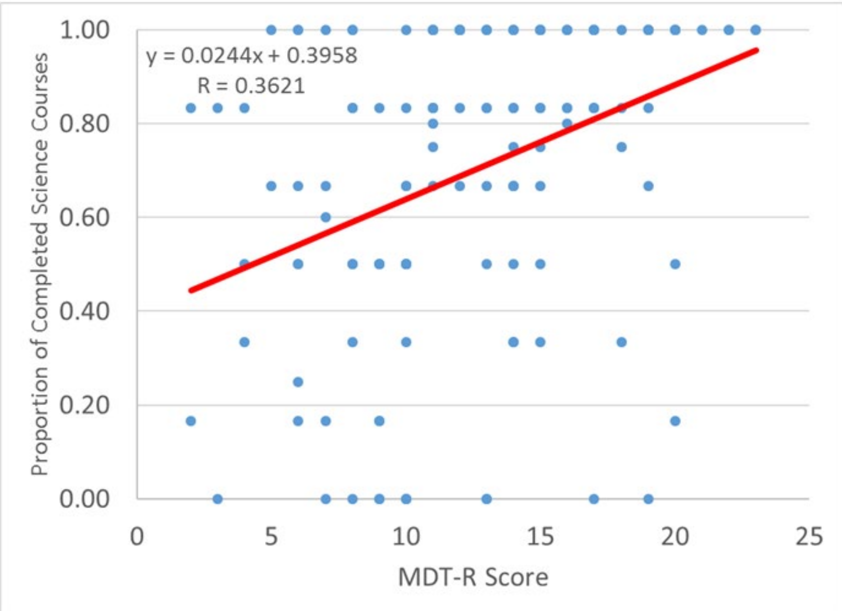
Graph 4. Number of students and their overall grade point average (GPA).

5.3 Correlations between MDT-R and academic success

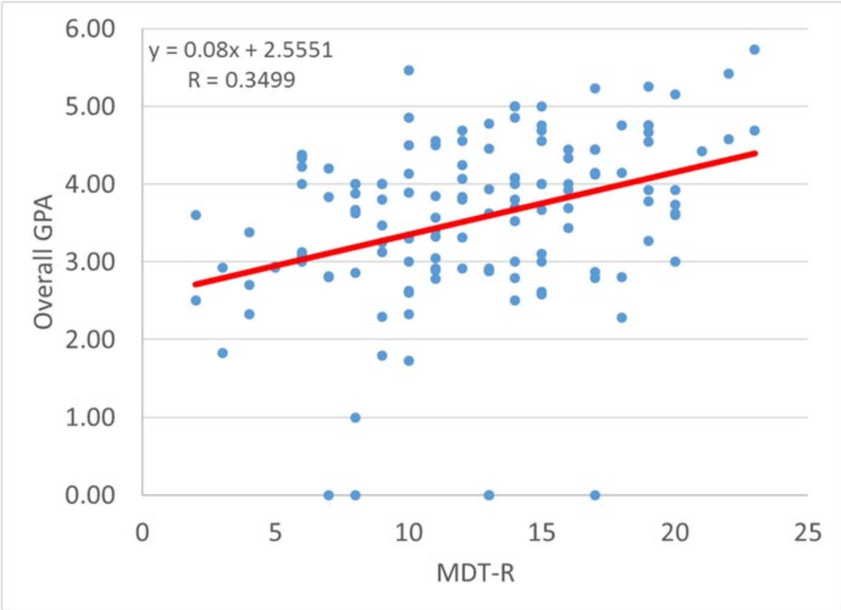
The data from the independent variable (MDT-R score) and three versions of the dependent variable "academic success" were used to calculate three linear regression equations and three Pearson correlation coefficients. In all three cases, significant correlations between MDT-R and the number of required mathematics courses, MDT-R and the number of required science courses, and MDT-R and overall GPA, were found. The strength of the correlations decreased as the comparison moved from math ($R = 0.4650$, $p < 0.0001$), to science, to all courses. This is consistent with research that has established that mathematical ability strongly correlates with success in college, regardless of the academic major selected. Graphs 5-7 summarized these findings.



Graph 5. Proportion of mathematics courses completed by the end of the participants' first year as a function of their MDT-R score.



Graph 6. Proportion of science courses completed by the end of the participants' first year as a function of their MDT-R score.



Graph 7. Participants' first year GPA as a function of their MDT-R score.

6. Conclusion and Limitations

The purpose of this study was to validate a locally-made mathematics assessment, and to determine to what extent it could help identify students who are less likely to succeed in the engineering programs offered at CUU. The first research question was answered in the affirmative; using IRT ideas, several items that were not psychometrically appropriated were identified and removed from the revised version of the diagnostic test. This finding is consistent with other studies that suggest that instructors who create locally-made tests, even those with deep knowledge of a discipline, may inadvertently include a few questions that have wording, context or content that are perceived differently by students (González-Espada, 2009, 2008; Knell, Wilhoite, Fugate, & González-Espada, 2015). These questions might not even stand out as possibly invalid during the grading process until post-hoc IRT analyses are performed (Brown, 2000; de Klerk, 2014; Koretz, 2008).

The second research question was also answered in the affirmative. It was found that students with better scores in the diagnostic test were more likely to complete the science and math courses on time, and were more likely to have a higher overall GPA. The strength of the relationship was not identical for all three measures of academic success after two semesters of college. This finding is in line with prior research that has examined student attrition from engineering careers, particularly those that occur during the high school to college transition (Daempfle, 2003; Haag, Hubele, Garcia, & McBeath, 2007; Geisinger & Raman, 2013; Suresh, 2006). This body of literature has identified inadequate high school math preparation and conceptual difficulties with core college courses in mathematics as two main factors that can explain why students leave engineering programs.

Confirming that about 50% of the participant were not able to reach the midpoint in their mathematics course requirements within two semesters has important implications for revising course offerings and considering differentiated tracks that can ease the transition into engineering careers for at-risk students who are motivated to succeed. Future research can also explore connections between academic success and other factors, such as affective, motivational, deductive structures, and linguistic reasoning.

Despite limitations due to sample size, the length of the diagnostic test, and self-selections of the participants (the diagnostic test was not compulsory and not all incoming freshmen completed it), it is clear that the Department of Mathematics at CUU has a new, validated, quantitative tool to identifying possible students at-risk of falling behind in their engineering program or dropping out altogether. By providing academic intervention strategies to these students, long-term, it is expected that many more of them will be able to finish their engineering degree on time.

7. Acknowledgments

The authors would like to thank the United States Department of State's Fulbright Fellowship Program, Morehead State University and the Catholic University of Uruguay for their support.

8. References

Altbach, P. G., Resisberg, L., & Rumbley, L. E. (2009). *Trends in global higher education: Tracking an academic revolution*. Paris, France: UNESCO, 2009.

Alvarez, W., Lacués, E., & Pagano, M. (2002). Determinación del perfil de los ingresantes a la universidad en relación con las estructuras lógicas que maneja, la capacidad que poseen en el uso del lenguaje simbólico y los conocimientos previos que tienen de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 15 Buenos Aires), 15(2), 663-668.

Alvarez, W., Lacués, E., & Pagano, M. (2004). Diseño y validación de un instrumento predictor del éxito académico de alumnos ingresantes a la universidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 17 Santiago de Chile), 17(1), 116-129.

Alvarez, W., Czerwonogora, A., Lacués, E., Leymonie, J., & Pagano, M. (2007). La matemática al ingreso a la universidad. Un estudio comparativo de cuatro facultades en el Uruguay. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(4), 1-9.

Artigue, V., Flores, J., Lacués, E., & Messano, C. (2017). Buscando medidas de apoyo para superar el fracaso académico. *Pensamiento Matemático*, 7(2), 27-42.

Astin, A. W. (1990). Educational assessment and educational equity. *American Journal of Education*, 98(4), 458-478.

Backhoff, E., Larrazolo, N., & Rosas, M. (2016). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos. *Revista* *electrónica de Investigación Educativa*, 2(1). Retrieved from <http://redie.uabc.mx/vol2no1/contenido-backhoff.html>.

Bastedo, M. N. & Jaquette, O. (2011). Running in place: Low-income students and the dynamics of higher education. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 33(3), 318-339.

Baum, S. & Payea, K. (2004). *Education pays: The benefits of higher education for individuals and society*. Washington, D. C.: College Board.

Bissett, H. G. (1995). Selective admissions in community college nursing programs: Ethical considerations. *Community College Review*, 22(4), 35-46.

Boado, M. (2011). *La deserción estudiantil universitaria en la UdelaR y en Uruguay entre 1997 y 2006*. Montevideo: Ediciones Universitarias.

Botinelli, E. (2012). *Juicio de la población sobre la educación universitaria y ranking de instituciones educativas*. Montevideo, Uruguay: Instituto Factum. Retrieved from: <http://www.factum.uy/pdf/articulos/2012/opv120920.pdf>.

Bourel, M., Kahan, S., Miguez, M., & Stalker, D. (2017). *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Componente Matemática*. Montevideo: Facultad de Ingeniería (FING). Retrieved from <https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/claustro_citaciones/2017/distribuido/31436/56%20%282016-2018%29%20Informe_HDI_Octubre2017_final-2.pdf>.

Bowen, W. G., Chingos, M. M., & McPherson, M. S. (2009). *Crossing the finish line: Completing college at America's public universities*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Brown, J. (2000). What is construct validity? *Shiken JALT Testing & Evaluation SIG Newsletter*, 4(2), 8-12. Retrieved from: < http://hosted.jalt.org/test/bro_8.htm>.

Brunner, J. J. (2011). *Educación superior en Iberoamérica*. Santiago, Chile: Universia. Retrieved from: <http://200.6.99.248/~bru487cl/files/Brunner_Bogota_16102012.pdf>.

Byrd, K. L., & MacDonald, G. (2005). Defining college readiness from the inside out: First-generation college student perspectives. *Community College Review*, 33(1), 22-30.

Crocker, L. & Algina, J. (1986). *Introduction to classical and modern test theory*. Fort Worth, Texas: Harcourt Brace Jovanovich Publishers.

Daempfle, P. A. (2003). An analysis of the high attrition rates among first year college science, math, and engineering majors. *Journal of College Student Retention*, 5(1), 37-52.

Dale, S. B. & Krueger, A. B. (2002). Estimating the payoff to attending a more selective college: An application of selection on observables and unobservables. *The Quarterly Journal of Economics*, 117(4), 1491-1527.

De Klerk, G. (2014). Classical test theory. In: M. Born, C. Foxtrot, & R. Butter (Eds.). *Online Readings in Testing and Assessment, International Test Commission*. Retrieved from: <http://archive.is/Jji1R>.

Devellis, R. F. (2006). Classical test theory: Measurement in a multi-ethnic society. *Medical Care*, 44(11), S50-S59.

Ebel, R. L. & Frisbie, D. A. (1991). *Essentials of Educational Measurement, 5th Ed*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Eckles, J. E. & Stradley, E. G. (2012). A social network analysis of student retention using archival data. *Social Psychology of Education*, 15(2), 165-180.

Eggens, L., Van der Werf, M. P. C., & Bosker, R. J. (2008). The influence of personal networks and social support on study attainment of students in university education. *Higher Education*, 55(5), 553-573.

Erdoli, L. A. (2012). What makes a test difficult? Exploring the effect of item. *Journal of Instructional Psychology*, 39(3-4), 171-176.

Ferreyra, M. M., Abitabile, C., Alvarez, J. B., Paz, F. H., & Urzúa, S. (2017). *At a Crossroads: Higher Education in Latin America and the Caribbean. Directions in Development*. Washington, DC: The World Bank.

Fhloinn, E. N., Bhaird, C. M., & Nolan, B. (2014). University students' perspectives on diagnostic testing in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 58-74.

Gillies, D. (2011). State education as high-yield investment: Human capital theory in European policy discourse. *Journal of Pedagogy*, 2(2), 224-245.

González-Espada, W. J. (2009). Detecting gender bias through test item analysis. *The Physics Teacher*, 47(3), 175-179.

González-Espada, W. J. (2008). Physical science lab quizzes: Results from test item analysis. *Journal of Science Education/REC*, 9(2), 81-85.

González-Espada, W. J. & Napoleoni-Milan, R. L. (2006). The impact of the freshman year experience on science students. In J. J. Mintzes & W. H. J. Leonard (Eds.). *Handbook of college science teaching*. Arlington, VA: National Science Teachers Association, 351-358.

Geisinger, B. N. & Raman, D. R. (2013). Why they leave: Understanding student attrition from engineering majors. *International Journal of Engineering Education*, 29(4), 914-925.

Haag, S., Hubele, N., Garcia, A., & McBeath, K. (2007). Engineering undergraduate attrition and contributing factors. *International Journal of Engineering Education*, 23(5), 929–940.

Ingram, W. G. & Morrisey, S. E. (2009). Ethical dimensions of the open-door admissions policy. *New Directions for Community Colleges*, 2009(148), 31-38.

Institute for Higher Education Policy (2005). *The investment payoff: A 50-state analysis of the private and public benefits of higher education*. Washington, District of Columbia: Institute for Higher Education Policy.

Karaman-Chaparenco, J. O. (2010). *De la República de las Letras a la República Oriental del Uruguay: El neoclasicismo en la formación del estado y el sujeto nacionales 1811-1837*. 194pp. Unpublished thesis, Doctor of Philosophy in Hispanic Studies, The University of British Columbia, Vancouver, Canada.

Knell, J. L., Wilhoite, A. P., Fugate, J. Z., and González-Espada, W. J. (2015). Using Item Response Theory to improve locally-constructed multiple choice tests: Measuring knowledge gains and curricular effectiveness. *Electronic Journal of Science Education*, 19(7). Retrieved from: <http://ejse.southwestern.edu/article/view/15452/ 9982>.

Koretz, D. M. (2008). *Measuring up: What educational testing really tells us.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Lacués, E., Díaz, L., & Huertas, J. (2018). ¿Qué estructuras deductivas usan alumnos ingresantes a la universidad? Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32(62), 802-824. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a03.

Laskey, M. L. & Hetzel, C. J. (2011). Investigating factors related to retention of at-risk college students. *The Learning Assistance Review*, 16(1), 31-43.

Legg, M. J., Legg, J. C., & Greenbowe, T. J. (2011). Analysis of success in general chemistry based on diagnostic testing using logistic regression. *Journal of Chemical Education*, 78(8), 1117-1121.

Lochner, L. & Moretti, E. (2014). The effect of education on crime: Evidence from prison inmates, arrests, and self-reports. *American Economic Review*, 94(1), 155-189.

Ministerio de Educacion y Cultura (2013). *Anuario estadístico de educación*. Montevideo, Uruguay: Ministerio de Educación y Cultura. Retrieved from: <http://www.mec.gub.uy/innovaportal/file/927/1/anuario_2013.pdf>.

Morales, P. (2012). *Análisis de ítems en las pruebas objetivas*. Madrid, Spain: Universidad Pontificia Comillas, Retrieved from: <https://educrea.cl/wp-content/uploads/2014/11/19-nov-analisis-de-items-en-las-pruebas-objetivas.pdf>.

Mullin, C. M. (2017). *When less is more: Prioritizing open access*. Washington, DC: American Association of Community Colleges. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED579759.pdf>.

Mullin, C. M. (2012a). *It's a matter of time: Low-income students and community colleges*. *Policy Brief 2012-02PBL*. Washington, District of Columbia: American Association of Community Colleges.

Mullin, C. M. (2012b). *Why access matters: The community college student body*. *Policy Brief 2012-01PBL*. Washington, District of Columbia: American Association of Community Colleges.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatses & S. G. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, pp. 115-124.

Nuñez-Peña, M. I., Suarez-Pellicioni, M., & Bono, R. (2013). Effects of math anxiety on student success in higher education. *International Journal of Educational Research*, 58(1), 36-43.

OCDE (2006). *PISA marco de la evaluación: Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. España: Santillana.

Perry, A. B. (2004). Decreasing math anxiety in college students. *College Student Journal*, 38(2), 321-324.

Raisman, N. (2013). *The cost of college attrition at four-year colleges and universities*. Virginia Beach, Virginia: Educational Policy Institute.

Ridgell, S. D. & Lounsbury, J. W. (2004). Predicting academic success: General intelligence, "Big Five" personality traits, and work drive. *College Student Journal*, 38(1), 607-612.

Rosenthal, R. & Jacobson, L. (1968). *Pygmalion in the Classroom*. New York, NY: Holt, Rinehart & Winston.

Roueche, J. E. & Baker, G. A. (1987). *Access and excellence: The open-door college*. Washington, District of Columbia: Community College Press.

Santalices, B. (2010). *El rol de las universidades en el desarrollo científico y tecnológico: Informe de la Educación Superior en Iberoamérica*. Santiago, Chile: Centro Interuniversitario de Desarrollo (CINDA), Universia. Retrieved from: < http://www.fundacionuniversia.net/fichero?id=1516>.

Scherer, J. L. & Anson, M. L. (2014). *Community college and the access effect: Why open admissions suppresses achievement*. New York, New York: Palgrave Macmillan.

Shannon, H. D. & Smith, R. C. (2006). A case for the community college's open access mission. *New Directions for Community Colleges*, 2006(136), 15-21.

Suresh, R. (2006). The relationship between barrier courses and persistence in engineering. *Journal of College Student Retention*, 8(2), 215–239.

Thompson, R. (2019). *Education, inequality and social class: Expansion and stratification in educational opportunity*. New York, NY: Routledge/ Taylor & Francis Group.

Tinto, V. (1993). *Leaving college: Rethinking the causes and cures of student attrition, 2nd Ed*. Chicago, Illinois: University of Chicago Press.

Trostel, P. A. (2010). The fiscal impacts of college attainment. *Research in Higher Education*, 51(3), 220-247.

Tsao, T. M. (2005). Open admissions, controversies, and CUNY: Digging into social history through a first-year composition course. *The History Teacher*, 38(4), 469-482.

UNESCO (2015). *Draft preliminary report concerning the preparation of a global convention on the recognition of higher education qualifications*. Paris, France: UNESCO.

Universidad de la Republica (2016). *Ley Orgánica de la Universidad de la República, Ley número 12.549*. Montevideo, Uruguay: Universidad de la República. Retrieved from: <http://dgjuridica.udelar.edu.uy/ley-organica/>.

U.S. Department of Labor (2015). *Current population survey*. Washington, District of Columbia: Bureau of Labor Statistics. Retrieved from: <https://www.bls.gov/emp/chart-unemployment-earnings-education.htm>.

Vaughan, G. B. (1985). Maintaining open access and comprehensiveness. *New Directions for Community Colleges*, 1985(52), 17-28.

Villegas, C. G. (2019) *The youth unemployment crisis: A reference handbook*. Santa Barbara, CA: ABC-CLIO LLC.

Voigt, L. & Hundrieser, J. (2008). *Student success, retention, and graduation: Definitions, theories, practices, patterns, trends*. Iowa City, Iowa: Noel-Levitz.

Workman, E. (2012). Teacher expectations of students: A self-fulfilling prophecy? *The Progress of Education Reform*, 13(6). Retrieved from <http://www.ecs.org/clearinghouse/01/05/51/10551.pdf>.

Yang, F. M. (2014). Item response theory for measurement validity. *Shanghai Archives of Psychiatry*, 26(3), 171-177.

Autores:

*Dr. Wilson González-Espada
(w.gonzález espada@moreheadstate.edu)

Department of Mathematics and Physics, College of Science,
Morehead State University, Morehead, Kentucky, USA.
Phone: (1) 606-783-2927
Fax: (1) 606-783-5002

Dr. Eduardo Lacués (elacués@ucu.edu.uy)
Prof. Gabriela Otheguy (gabriela.otheguy@gmail.com)
Prof. Magdalena Pagano (mapagano@ucu.edu.uy)
Prof. Alejandra Pollio (apollio@ucu.edu.uy)

Department of Mathematics, College of Natural Sciences,
Catholic University of Uruguay, Montevideo, Uruguay.
Phone: (+598) 2487-2717

Dr. Rosina Pérez (rosina.perez@ucu.edu.uy)
Dr. Marcos Sarasola (marsaras@ucu.edu.uy)

Department of Education, College of Human Sciences,
Catholic University of Uruguay, Montevideo, Uruguay.
Phone: (+598) 2487-2717

* Corresponding author

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 47-66

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Design de problemas na formação inicial de professores para a (re)formulação e resolução com o uso de tecnologias digitais

Fabiane Fischer Figueiredo, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Fecha de recepción: 12/02/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen	En este artículo se presentan los resultados de una investigación cualitativa, en la que el objetivo era investigar, a través del diseño de problemas con el uso de tecnologías digitales, para su (re)formulación y resolución, qué conocimientos son producidos por futuros profesores de las matemáticas. Para alcanzarlo, se planificó y ofreció un curso de extensión semipresencial, que tuvo la participación de alumnos de Licenciatura en Matemáticas. Entre las actividades propuestas, se destaca el diseño realizado por uno de los grupos de trabajo, que contribuyó para que produjeran conocimientos matemáticos, metodológicos, tecnológicos y relativos al abordaje de temas de relevancia social. **Palabras claves:** Diseño de problemas abiertos, (re)formulación y resolución de problemas, tecnologías digitales, formación inicial de profesores, Matemáticas.
Abstract	This article presents the results of a qualitative research, in which the objective was to investigate, through the design of problems with the use of digital technologies, for their (re)formulation and resolution, what knowledge are produced by future teachers of Mathematics. In order to reach it, a semipresencial extension course was planned and offered, which had the participation of students of Degree in Mathematics. Among the activities proposed, the design of one of the working groups was highlighted, which contributed to the production of mathematical, methodological, technological and related knowledge to address issues of social relevance. **Keywords:** Design of open problems, (re)formulation and problem solving, digital technologies, initial teacher training, Mathematics.
Resumo	Neste artigo apresentam-se os resultados de uma investigação qualitativa, em que o objetivo era investigar, por meio do *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, para a sua (re)formulação e resolução, quais conhecimentos são produzidos por futuros professores de Matemática. Para atingi-lo, foi planejado e ofertado um curso de extensão semipresencial, que teve a participação de alunos de Licenciatura em Matemática. Entre as atividades propostas, destaca-se o *design* realizado por um dos grupos de trabalho, que contribuiu para

que produzissem conhecimentos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e relativos à abordagem de temas de relevância social.
Palavras-chaves: *Design* de problemas abertos, (re)formulação e resolução de problemas, tecnologias digitais, formação inicial de professores, Matemática.

1. Introdução

As necessidades requeridas pela sociedade da informação, no que se refere à formação dos alunos da Educação Básica e prepará-los e inseri-los no mercado de trabalho, vêm exigindo a discussão, a reflexão e a investigação por parte de pesquisadores e/ou professores, sobre como as tecnologias digitais podem ser incorporadas ao planejamento pedagógico e utilizadas pelos alunos na realização de atividades. Nesse intuito, torna-se preciso o uso de perspectivas metodológicas, que favoreçam a aquisição de experiências formativas e educacionais, com o uso de tecnologias digitais, e que promovam o desenvolvimento de competências e habilidades e a produção de conhecimentos.

Para tanto, entende-se que os futuros professores de Matemática devem ser preparados para a utilização de perspectivas metodológicas e de tecnologias digitais, de acordo com os anseios da sociedade, na contemporaneidade. Entre elas, destaca-se o *design* de enunciados de problemas, para propiciar a sua (re)formulação[1] e resolução com o uso de tecnologias digitais, que é uma atividade que se constitui como um problema pedagógico a ser solucionado, por meio do *design* (Valente & Canhette, 1998), e que pode impulsionar o desenvolvimento profissional dos futuros professores, a partir da experiência adquirida como *designers* (Figueiredo, 2017). Essa experiência pode contribuir para a utilização e/ou o desenvolvimento de competências e habilidades e a produção de conhecimentos docentes, tornando-os, assim, preparados para a elaboração de enunciados de problemas do tipo abertos[2] e que abordem temas de relevância social, para a promoção da Educação Matemática Crítica, de modo que possam utilizá-los em suas práticas pedagógicas.

Para compreender tal processo, destacam-se as concepções de Figueiredo (2017), quanto às fases a serem realizadas e os aspectos que podem ser atribuídos ao *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, bem como de Dewey (1979), quanto à aprendizagem baseada na reconstrução das experiências e centrada na atividade de resolução de problemas. Também, salientam-se as

---

[1]Tal expressão é escrita como *problem posing* em Língua Inglesa e apresenta diferentes traduções em Língua Portuguesa e/ou Espanhola: apresentação de problemas, criação de problemas, geração de problemas, invenção de problemas, determinação de problemas, reformulação de problemas, formulação de problemas, entre outras. Entre essas, optou-se por utilizar, neste artigo, "(re)formulação de problemas" ou "(re)formulação e resolução de problemas" (atividades associadas), visto que abarcam tanto a reformulação do(s) problema(s) proposto(s) como a formulação e resolução de outros problemas, que contribuam para a sua solução.
[2]Conforme Allevato (2008), são problemas que os alunos têm a oportunidade de fazer escolhas, valorizar as suas próprias ideias e explorar os conteúdos matemáticos no processo de resolução.

concepções de Case (1989), sobre o tratamento da informação para a cognição, e de O'Dell (2001), quando esse se refere ao desenvolvimento da criatividade e inovação através dessa resolução.

Dessa forma, neste artigo, apresentam-se os aportes teóricos e resultados obtidos com uma investigação, em que um grupo de alunas, de um curso de Licenciatura em Matemática, realizaram o *design* de um enunciado, do tipo aberto e que abordou um tema de relevância social, em que as tecnologias digitais foram utilizadas, para que pudesse propiciar a (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de recursos tecnológicos. Essa atividade foi proposta e realizada no decorrer do curso de extensão *Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação de problemas na Educação Matemática*, que foi ofertado pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)/Canoas-RS-BR, em 2018.

2. O *design* de enunciados de problemas com o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática

De acordo com Figueiredo e Dalla Vecchia (2015), o *design* de problemas, em que as tecnologias digitais são utilizadas, é uma atividade, que consiste na elaboração de enunciados de problemas abertos, com a finalidade de que esses recursos, também, sejam utilizados pelos alunos no seu processo de resolução. Nesse *design*, podem ser valorizados os seus interesses, conhecimentos prévios e níveis de desenvolvimento cognitivo, assim como as experiências que tiveram, em outras práticas pedagógicas, com a resolução de problemas. Ademais, podem ser atribuídos um ou mais aspectos, com o uso de recursos tecnológicos, evidenciados os conteúdos matemáticos a serem aprimorados ou ensinados e aprendidos e abordados temas de relevância social, que possibilitem a discussão e reflexão no decorrer ou após a resolução (Figueiredo, 2017).

No *design* de um ou mais problemas matemáticos, com o uso de tecnologias digitais, o(s) futuro(s) professore(s) e/ou aquele(s) que já exerce(m) a profissão (*designer(s)* dos problemas), podem executar as etapas propostas por Figueiredo (2017) (Figura 1), que foram identificadas a partir das fases enfatizadas por Filatro (2008), para o *Design* de Sistemas Instrucionais ou *ISD*[3] (*análise da necessidade*, *projeto, desenvolvimento e implementação da solução para a mesma* e *avaliação da solução obtida*). Também, nesse processo, pode ser utilizado o recurso *storyboard,* "[...] na fase de pré-produção, [...] [que] funciona como uma série de esquetes (cenas) e anotações que mostram visualmente como a seqüência (sic) de ações deve se desenrolar" (Filatro, 2008, p.60).

---

[3] *"Instructional System Design".*

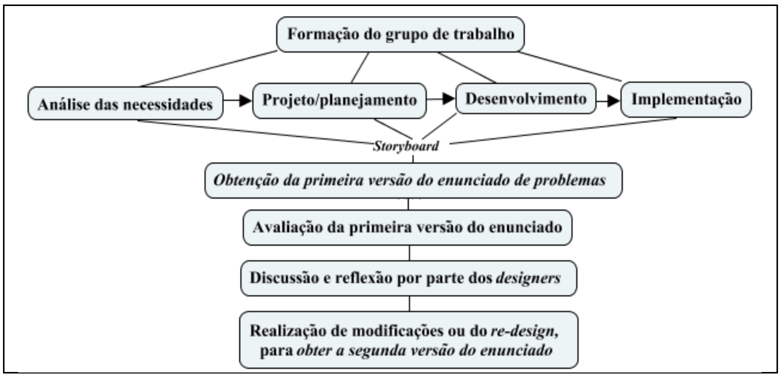


Figura 1. Etapas do *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais.
Fonte: Figueiredo (2017).

No esquema, tem-se as etapas: *formação do grupo de trabalho*, ou seja, a escolha de quem realizará o *design* do enunciado dos problemas, se ocorrerá em grupo ou individualmente; *análise das necessidades*, que envolve as discussões, as reflexões e a tomada de decisões por parte do(s) *designer(s)*, sobre o ano e nível de ensino dos alunos que irão resolvê-los, o tema de relevância social que será abordado, os conhecimentos matemáticos a serem trabalhados e as tecnologias digitais que serão utilizadas; *projeto/planejamento*, que requer as discussões e a tomada de decisões quanto aos objetivos que devem ser atingidos e às ações que serão executadas; *desenvolvimento*, em que é ampliado ou não as escolhas feitas na etapa anterior e há o aperfeiçoamento do planejamento do enunciado, de forma que os objetivos possam ser atingidos, bem como são atribuídos aspectos (as características dos problemas abertos, a exploração, a investigação, a produção escrita, entre outros); *implementação*, em que é executado o que foi esboçado nas etapas anteriores, para a *obtenção da primeira versão do enunciado dos problemas*; *avaliação da primeira versão do enunciado*, que pode requerer a resolução da primeira versão, por parte de outros *designers*, com o propósito de obter o *feedback*; *discussão e reflexão por parte dos designers*, para decidir se ocorrerão modificações ou o *re-design* e, em caso de tomar uma dessas decisões, serão executadas as alterações, para obter uma nova versão aprimorada e para que outros aspectos possam ser atribuídos, diferentes dos que haviam sido cogitados na execução da primeira versão; *realização de modificações ou do re-design*, *para obter a segunda versão do enunciado*, com a finalidade de atender às necessidades identificadas e atingir os objetivos delimitados. O recurso *storyboard,* nesse processo, é utilizado como um recurso auxiliar, visto que pode contribuir para a realização das etapas de *análise das necessidades*, *projeto/planejamento, desenvolvimento* e *implementação*, que resultam na obtenção da primeira versão.

O *design* de enunciados de problemas, também, pode ser realizado para que os alunos possam desenvolver competências e habilidades, por meio do processo de resolução, como por exemplos: a interpretação, a tomada de decisões, a criatividade e a reflexão crítica (Figueiredo, 2017). Para isso, tornam-se necessários a abordagem de temas de relevância social, que os contextualizem e favoreçam a discussão e reflexão crítica, e o emprego de conhecimentos matemáticos e tecnológicos, que contribuam para o seu entendimento.

Ademais, é preciso a atribuição de aspectos que, com o uso de tecnologias digitais, no processo de resolução, possam ser potencializados, como: a exploração, a investigação, a visualização, a experimentação, a simulação, os aspectos estéticos, a produção escrita, a comunicação, a reflexão crítica, a colaboração, a abordagem para a Educação Matemática Crítica e o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas (Figueiredo, 2017). Esses aspectos podem incidir na produção de conhecimentos matemáticos, tecnológicos e acerca de temas, de forma correlacionada.

Sobre o aspecto da exploração, Borba, Silva e Gadanidis (2014, p.50, grifos dos pesquisadores), destacam que pode proporcionar meios para a "[...] *investigação matemática*, ou seja, um ambiente [...] de formulação de conjecturas acerca de um problema e busca por possíveis e diversificadas soluções". Os autores afirmam, também, que a visualização pode favorecer a exploração de conexões entre as representações e a experimentação é outro aspecto, que proporciona a ocorrência de cenários para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Em relação à simulação, Jenkins et al. (2006) apontam que tal aspecto propicia a execução de ações e a interpretação de processos e/ou de situações que ocorrem no mundo real. Para os autores, pode promover a Educação para o uso das mídias, bem como o desenvolvimento de competências culturais e habilidades sociais.

Sobre os aspectos estéticos, Rosa (2015) assinala que esses podem proporcionar a experiência estética, uma vez que são potencializados com o uso de tecnologias digitais e podem contribuir para a produção do conhecimento matemático. Esses aspectos permitem aos alunos a experiência vivida, "[…] a partir do movimento, da cor, da imagem e todas as relações e/ou links que se façam com esses aspectos para que se produza conhecimento e, em específico, conhecimento matemático" (Rosa, 2015, p.80).

Outro aspecto que pode ser atribuído é a produção escrita que, de acordo com Powell e Bairral (2006), favorece os registros dos processos de pensamento e as suas análises, na aprendizagem da Matemática. Além disso, pode apoiar a reflexão crítica sobre as experiências, visto que envolve os pensamentos, os sentimentos e a afetividade. Conforme os autores (2006, p.48), a experiência depende dos "[...] objetos dos atos mentais, que são os alvos da reflexão, são capazes de ser objetos de conhecimento. A reflexão [...] pode gerar representações e heurísticas para o aprendiz desenvolver maneiras mais eficazes de pensar".

Desse modo, ressaltam que a reflexão crítica é uma estratégia para desenvolver a cognição matemática, desde que as práticas discursivas propiciem a comunicação e interações entre os alunos e o professor, os sujeitos envolvidos na dinâmica de trabalho colaborativo, na forma escrita (textual e hipertextual) e oral, com e sem a utilização de recursos tecnológicos. Com isso, há a possibilidade de análise dos processos de pensamento, assim como dos significados que puderam ser construídos e das formas de raciocínios matemáticos.

No que se refere à abordagem da Educação Matemática Crítica, acredita-se que tais problemas produzidos, mesmo que sejam pré-determinados e apresentem características de uma semirrealidade, podem proporcionar os cenários de investigação. Segundo Skovsmose (2008), esses cenários são ambientes que conduzem à investigação no processo de aprendizagem, uma vez que os alunos devem explorar, formular questões e buscar explicações. Ademais, "é possível fazer reflexões *com* a matemática [...]" (Skovsmose, 2014, p.97, grifo do autor), em que os processos dialógicos devem ser meios para ocasioná-las.

Diante do exposto, admite-se que o *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais é uma perspectiva promissora, visto que tal atividade pode ser realizada pelo professor, que produzirá os enunciados para serem propostos e resolvidos pelos alunos, ou pelos próprios alunos, sob as orientações do mesmo, que os produzirão para serem resolvidos por outros colegas. Quando essa experiência é vivenciada pelos alunos, pode contribuir para que compreendam, por meio de discussões, reflexões e ações, como os problemas podem ser elaborados e quais características e aspectos atribuídos.

3. A resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais e o enfoque da (re)formulação

A resolução de problemas é uma prática que se apresenta em diferentes contextos e pode necessitar, do solucionador, o emprego de conhecimentos e a demonstração de competências e habilidades, como a interpretação e a escolha ou a elaboração de estratégias, que lhes permitam a obtenção de uma ou mais soluções. As experiências adquiridas dessa prática, podem ser consolidadas pelo ser humano e serem utilizadas na resolução de problemas, em outras ocasiões (Figueiredo, 2008). Por isso, entende-se que tal prática, para ser complexa e consolidada, deve ser associada à (re)formulação de problemas.

De acordo com Valente e Canhette (1998, p.80), a resolução de um problema como uma atividade de *design*, em que recursos tecnológicos são utilizados, possibilita "[...] ao aluno ter contato com situações que são semelhantes às que ele encontra no seu dia-a-dia [...] [e] [...] que os profissionais especialistas exercem". Os autores destacam que essa atividade exige as ações de planejamento, delineamento, esboço, esquematização, criação, invenção e execução, já que o objeto a ser obtido será proveniente de ideias e do recurso tecnológico utilizado para expressá-lo e materializá-lo.

A resolução de problemas pode ser compreendida, também, a partir da filosofia pragmática e das ideias pedagógicas de Dewey (1979), da teoria do tratamento da informação de Case (1989) e das sugestões de O'Dell (2001), para o desenvolvimento da criatividade e inovação.

Conforme Dewey (1979, p.106, grifos do autor), a necessidade da solução para uma dúvida ou problema é o que orienta o ato de pensar reflexivamente e a sua natureza determina o objetivo do processo de pensamento, porque "a conclusão *enunciada* ou apresentada numa proposição não é a conclusão *final*, mas a chave para a elaboração desta". O autor afirma que as experiências vividas e as situações problemáticas reais favorecem a definição do problema a ser resolvido, bem como a transformação do pensamento empírico em conhecimento científico. Para tanto, preconiza que as ações de observação, investigação, discussão, experimentação e do emprego da linguagem oral e escrita contribuem para a organização de um plano ou projeto ou para a elaboração de uma teoria que as expliquem e, consequentemente, subsidiem a obtenção de uma solução satisfatória.

Além disso, declara que o pensamento reflexivo é o norteador desse processo e da aquisição de conhecimentos e saberes, que, nas experiências escolares, pode ser valorizado, se ocorrer em fases ou apresentar os aspectos:

> [...] 1) as *sugestões*, nas quais o espírito salta para uma solução; 2) uma intelectualização da dificuldade ou perplexidade que foi *sentida* (diretamente experimentada) e que passa, então, a constituir um *problema* a resolver, uma questão cuja resposta deve ser procurada; 3) o uso de uma sugestão em seguida a outra, como idéia-guia (sic) ou *hipótese*, a iniciar e guiar a observação e outras operações durante a coleta de fatos; 4) a elaboração mental da idéia (sic) ou suposição, como idéia (sic) ou suposição (*raciocínio*, no sentido de parte de inferência e não da inferência inteira); e 5) verificação da hipótese, mediante ação exterior ou imaginativa (Dewey, 1979, p.111, grifos do autor).

Segundo Case (1989), a resolução de problemas auxilia o desenvolvimento cognitivo do ser humano, pois, ao analisar as situações e vivenciá-las, bem como formular os seus próprios objetivos, buscando atingi-los, precisará elaborar novos processos mentais de resolução, a partir dos que já possui internalizados. Para o autor, ele é um organismo que representa a solução presente ou situações alternativas, de maior valor afetivo, e a(s) direciona(s) como meta(s) de consecução de uma outra situação e desenvolve estratégias para alcançá-la(s).

Esse processo favorece a consolidação de esquemas mentais e, para compreendê-lo, o autor argumenta que a unidade básica para a resolução de problemas é a "estrutura do controle executivo" (Figura 2). Nessa, procura-se "[...] representar a situação contida no problema, representar os objetivos necessários para a planificação das estratégias (a situação que desejamos alcançar) e representar essas estratégias mentais" (Figueiredo, 2008, p.48).

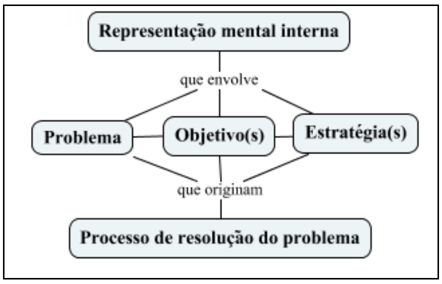


Figura 2. Estrutura do controle executivo conforme a teoria caseana.
Fonte: Figueiredo (2008).

Além disso, Case (1989) apresenta dois modelos explicativos, de como ocorre a cognição por meio da resolução de problemas: o *Modelo de Integração Hierárquica*, em que o ser humano faz o uso mental dos processos reguladores gerais (*resolução de problemas*, *exploração*, *imitação* e *regulação mútua*), a partir dos sub-passos (ativação de esquemas mentais, avaliação desses esquemas e o reconhecimento dos seus benefícios, recodificação e consolidação de novos esquemas) e pode, também, apresentar características afetivas e culturais do grupo social em que faz parte; e o *Modelo Maturacional*, que depende dos aspectos do sistema psicológico e do modo como são fixadas as estruturas do controle executivo (espaço de processamento executivo, espaço operativo, espaço de armazenamento em curto prazo, carga momentânea do processamento executivo e carga máxima de processamento executivo), para que se apresentem em qualquer estágio de desenvolvimento.

Desses modelos, Figueiredo (2008) afirma que o *Modelo de Integração Hierárquica* favorece a compreensão pedagógica de como os processos reguladores gerais e os sub-passos ocorrem e apoiam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para a autora (2008, p.53), "[...] são processos [...] capazes de orientá-los na busca mental de soluções e na medida em que passam de uma tarefa a outra, ou seja, através da ativação, avaliação, recodificação e consolidação de esquemas internos".

No que se refere a cada um dos processos, Case (1989) menciona que: na *resolução de problemas*, o ser humano procura uma sequência operacional preexistente e experimenta novas sequências; na *exploração*, busca utilizar estratégias, sem prever o resultado que será gerado; na *imitação*, observa as ações de outros sujeitos e procura reproduzi-las; e na *regulação mútua*, há a cooperação na realização de atividades, porque procura se adaptar aos sentimentos, comportamentos e ao nível de desenvolvimento cognitivo dos demais.

Para O'Dell (2001), é necessário que a resolução de problemas seja criativa e inovadora. A criatividade se apresenta por meio da implementação de novas ideias e a inovação quando essas são aplicadas na prática, o que podem ser afetadas ou desenvolvidas na resolução de problemas pelos aspectos do *modelo 4P+F* (Figura 3).

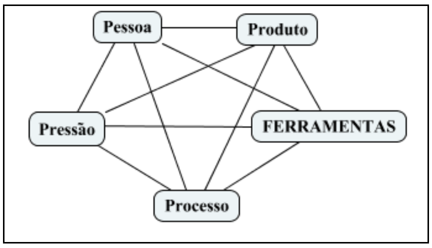


Figura 3. Modelo 4P+F.
Fonte: O'Dell (2001).

Nesse modelo, os quatro *Ps* representam os atributos, que podem ajudar na descrição desses aspectos, que são: *P de pessoa*, em que avalia ou é avaliado quanto ao seu estilo ou preferência na resolução de problemas, utilizando, para isso, abordagens e teorias; *P de processo*, que requer o reconhecimento das etapas de resolução, um plano ou mapa que contribua para a obtenção do resultado esperado e a consideração da cultura organizacional ou do clima que existe no ambiente, para que possa gerar e usar as suas ideias; *P de produto*, em que é obtido um resultado, ou seja, um objeto ou um processo, que apresenta características que, ao serem identificadas, possam ser exploradas ou alteradas para aprimorá-lo; e *P de pressão*, que é a cultura organizacional ou clima, que age de imediato sob os outros *Ps* e afeta o ambiente e a resolução de problemas. O *F de ferramentas* são os recursos e métodos utilizados para associar os quatro *Ps*, sendo essas, capazes de associar os processos divergente (produção de um conjunto de opções) e convergente (avaliação e julgamento dessas opções).

Com o propósito de contribuir para resolução criativa de problemas e a tomada de decisões para a inovação, O'Dell (2001) apresenta exemplos de ferramentas e propõe que esse modelo seja utilizado por um grupo de pessoas, de modo que contribua para o entendimento da diversidade de ideias e perfis e para que incida na obtenção de um resultado em comum. No *P de processo*, pode ser realizada a ferramenta denominada *Quatro Diamantes*, que envolve: a análise do problema, a definição do problema, a geração de ideias e o planejamento de ações ou de implementação (Figura 4).

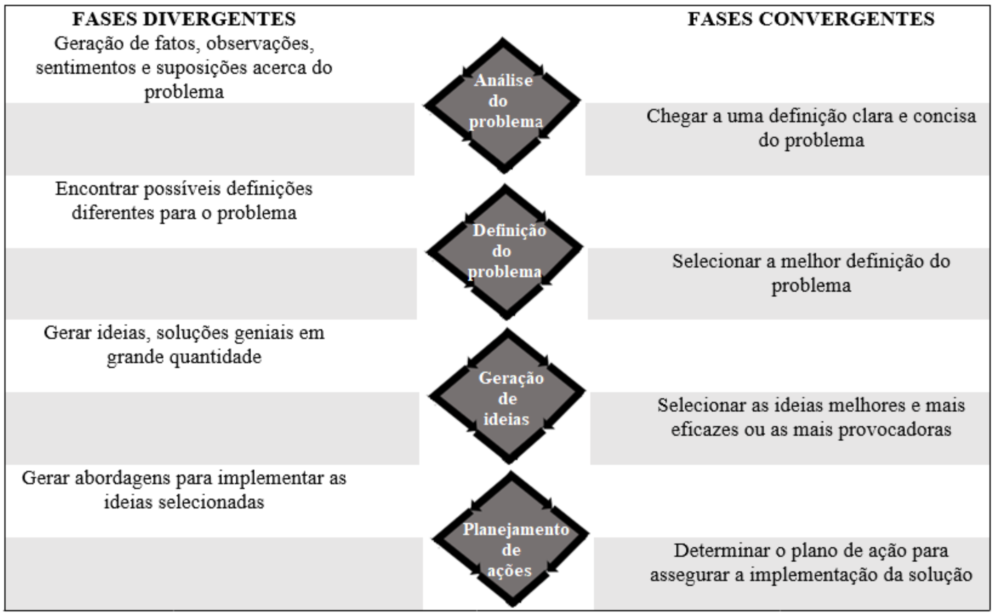


Figura 4. Etapas do processo *Quatro Diamantes*.
Fonte: O'Dell (2001).

Ainda, O'Dell (2001), salienta que resolver problemas, de forma criativa, é uma competência a ser desenvolvida, que demanda as habilidades de aplicar fatos ou modelos (capacidade de utilizar fatos ou modelos em várias situações), de *insight* (aprender com as aplicações e erros), de imaginação (pensar e visualizar os problemas, sob diferentes perspectivas) e de intuição (confiar em sua voz interior). Ademais, ressalta que a inovação é outra competência, que deve ser desenvolvida e exige as habilidades de: persistência, para implementar as mudanças desejadas, execução ou apresentação da concepção e do que é pretendido, e influenciar, na negociação e no *marketing* ou venda.

De acordo com as concepções de Valente e Canhette (1998), Dewey (1979), Case (1989) e O'Dell (2001), acredita-se que a resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais pode ser dinamizada quando articulada à (re)formulação. Conforme Figueiredo e Groenwald (2018, p.5), os alunos podem reformular o enunciado do problema ou formular outros problemas, subsidiários, na busca de obter uma solução para o problema proposto ou norteador, que reflita as suas decisões, assim como têm como potencialidades "[...] a utilização e/ou o desenvolvimento das capacidades de criar, de explorar, de investigar, de fazer escolhas, de interagir e trocar ideias", de modo que contribuam para a produção de conhecimentos matemáticos, tecnológicos e sobre os temas abordados.

Vale, Pimentel e Barbosa (2015, p.47), também acentuam que a (re)formulação de problemas "[...] permite que se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas". Além disso, as autoras destacam que a (re)formulação de problemas pode contribuir para que os alunos compreendam os processos envolvidos nas suas resoluções, aprofundem a sua compreensão quanto aos conceitos matemáticos e desenvolvam a criatividade e o pensamento crítico.

Bravo e Sánchez (2012), salientam que a (re)formulação de problemas é uma competência a ser desenvolvida, já que pode melhorar o ensino da Matemática nas instituições. A relação entre a forma como surgiu um problema (completo ou incompleto) e a capacidade de resolvê-lo deve ser trabalhada em sala de aula, para tornar os alunos os protagonistas de seus sucessos e erros. Tal atividade ou competência, pode contribuir para o desenvolvimento de outras competências específicas, como: pensar, formular e resolver problemas, argumentar, representar entidades e comunicar, com e sobre a Matemática.

4. Metodologia

A investigação aqui apresentada foi realizada com o objetivo de investigar, por meio do *design* de problemas com o uso de tecnologias digitais, para a sua (re)formulação e resolução, quais conhecimentos são produzidos por futuros professores de Matemática. Para realizá-la, optou-se pela abordagem qualitativa e utilizou-se o método *estudo de caso*, uma vez que foi planejado e ministrado um curso de extensão semipresencial, em 2018, denominado *Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação de problemas na Educação Matemática*, de 60 horas de duração (distribuídas em 5 encontros presenciais, de 25 horas, e 8 encontros não presenciais, extraclasse, que totalizaram 35 horas). Os participantes foram 10 alunos (três homens e sete mulheres), do curso presencial de Licenciatura em Matemática da ULBRA-Canoas-RS-BR, que estavam cursando entre o 5º e 8º semestres, no momento em que as atividades foram realizadas e que residiam em municípios da região metropolitana de Porto Alegre, do Vale do Rio dos Sinos e Cai, RS, BR.

Para coletar os dados, utilizou-se como instrumentos: as observações participantes, que foram realizadas pelas pesquisadoras e registradas em documentos de *Word*; as gravações de áudio e vídeo, com o uso do *software* *Screencast-O-Matic*[4], realizadas pelos alunos no decorrer dos *designs* dos

[4]É um *software* livre, que permite a criação de vídeos a partir da gravação de ações feitas na tela do computador e do áudio das comunicações enquanto essas ações ocorrem (Screencast-O-Matic, 2018).

problemas; e os registros dos alunos no Ambiente Virtual de Aprendizagem *Moodle* (Ulbra, 2018), onde as atividades foram propostas e realizadas.

Apresentam-se, neste artigo, os registros realizados entre o 5º e 8º encontros do curso (Quadro 1), que são referentes as etapas realizadas no *design* do enunciado, que foi realizado por um dos grupos de trabalho, no caso pelas alunas D, E e F.

Encontro e modalidade Carga Horária	Atividades
5º e 6º encontros presenciais 6 horas	Realização, em dupla ou trio, do *design* de um enunciado de problemas abertos, utilizando as tecnologias digitais e abordando um tema de relevância social, que pudesse promover a Educação Matemática Crítica.
7º e 8º encontros não presenciais 6 horas	Discussão e reflexão sobre os comentários feitos pelas pesquisadoras, em relação à primeira versão do enunciado. Tomada de decisão acerca de realizar ou não modificações ou o *re-design*, para obter uma nova versão. Realização de modificações ou do *re-design*, para obter a segunda versão. Participação no Fórum, proposto na Plataforma *Moodle*, denominado "Refletindo sobre o *design* dos problemas com a utilização das tecnologias digitais".

Quadro 1. Atividades propostas entre o 5º e o 8º encontros do curso de extensão.

Na análise, também, considerou-se o objetivo pretendido com a investigação, o referencial teórico e as fases analíticas e suas interações, que são mencionadas Yin (2016): *compilação*, em que os dados coletados são reunidos e organizados; *decomposição*, que os dados são fragmentados ou separados em grupos menores; *recomposição*, cujos fragmentos ou elementos são reorganizados, em grupos e sequências diferenciadas da organização original; *interpretação*, que seria a utilização dos dados recompostos para produzir narrativas, tabelas e gráficos (se forem necessários), para determinar as interpretações iniciais; e *conclusão*, em que são utilizadas as interpretações da quarta fase e determinadas as conclusões da investigação. Da primeira a quarta fases, foi possível identificar as categorias de análise: *design* de enunciados de problemas abertos, utilizando as tecnologias digitais, abordando temas de relevância social, com a finalidade de propiciar a (re)formulação e resolução desses problemas, para a Educação Matemática Crítica; características e aspectos identificados pelos futuros professores, no que se refere ao *design* e a (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de tecnologias digitais; e conhecimentos matemáticos, metodológicos, tecnológicos e acerca da abordagem de temas de relevância social que foram produzidos e as competências e habilidades profissionais apresentadas e/ou desenvolvidas pelos futuros professores.

5. Os resultados obtidos com a investigação

No quinto e sexto encontros presenciais do curso de extensão, foram propostas atividades com as finalidades que os alunos realizassem o *design* de enunciados de problemas, utilizando as tecnologias digitais, atribuindo características e aspectos e abordando um tema de relevância social, que pudesse promover a Educação

Matemática Crítica, na (re)formulação e resolução desses problemas, assim como discutissem e refletissem sobre a atividade realizada. Nesses encontros, identificou-se a ocorrência das etapas de *formação do grupo de trabalho*, *análise das necessidades*, *projeto/planejamento*, *desenvolvimento* e *implementação* do *design*, para a *obtenção da primeira versão do enunciado dos problemas* (Figueiredo, 2017).

Na etapa *formação do grupo de trabalho*, as alunas D, E e F formaram um grupo pelo critério de afinidade, visto que já haviam cursado disciplinas da Graduação em comum. Conforme os registros das observações das pesquisadoras, as alunas discutiram e decidiram, na etapa de *análise das necessidades*, que iriam elaborar um enunciado de problemas abertos, para ser proposto a alunos de um terceiro ano do Ensino Médio, pois a aluna E era professora de Matemática dos mesmos.

O tema de relevância social escolhido foi a Educação Financeira, pois almejavam que houvesse o planejamento e a compra fictícia de móveis para mobiliar a residência do personagem, observando o orçamento, a poupança e as formas de pagamento determinados. A aluna E alegou que esse tema vinha ao encontro dos interesses e das expectativas futuras de seus alunos, visto que almejavam a sua independência, ao residirem em uma casa própria. Entende-se que, tal tema, pode possibilitar a Educação Matemática Crítica, uma vez que auxilia a ocorrência de um cenário de discussão e reflexão crítica, sobre como efetuar as compras sem exceder o orçamento do personagem, mesmo que o problema seja pré-determinado e apresente uma semirrealidade (Skovsmose, 2008, 2014).

De acordo com as gravações de áudio e vídeo, esse tema, também, foi escolhido para que os alunos do terceiro ano empregassem ou aprendessem novos conhecimentos relativos às quatro operações com os números racionais, valores monetários, porcentagem, juros, medidas de comprimento e áreas de figuras geométricas planas e espaciais. Em relação ao uso de tecnologias digitais, as alunas D, E e F optaram por pesquisar na *Internet* imagens de plantas baixas de residências com um, dois e três dormitórios (Turola, 2018) e utilizar os recursos do *site Toondoo*[5], para produzir uma história em quadrinhos, na forma de um *book online*.

Em relação às etapas de *projeto/planejamento*, de *desenvolvimento* e de *implementação*, para a *obtenção da primeira versão do enunciado dos problemas*, essas ocorreram de forma associada e nelas foram pensados e atribuídos aspectos, que são citados por Figueiredo (2017). Conforme as observações das pesquisadoras e as gravações de áudio e vídeo, as alunas D, E e F elaboraram um *storyboard*, em um documento de *Word*, onde planejaram e desenvolveram um problema aberto sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas, pois pretendiam que esse apresentasse informações incompletas e propiciasse a determinação de outros problemas (Bravo & Sánchez, 2012; Figueiredo, 2017), bem como os motivassem a resolvê-los (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015).

No *storyboard*, ocorreu o esboço de cada parte da história em quadrinhos, a utilização das plantas baixas pesquisadas e a produção de duas opções para o mesmo enunciado, uma com o personagem principal sendo uma mulher e outra um

[5]Disponível em: <http://www.toondoo.com>.

homem, para que os alunos do terceiro ano pudessem escolher o personagem e tomar as decisões, como se estivessem vivenciando a(s) mesma(s) situação(ões) e para que pesquisassem na *Internet* as informações, os valores e as condições de pagamento dos móveis escolhidos, ou seja, as alunas D, E e F valorizaram e quiseram atribuir os aspectos estéticos, a visualização, a investigação e a simulação (Borba, Silva & Gadanidis, 2014; Jenkins et al., 2006; Rosa, 2015). Também, o elaboraram para favorecer o trabalho colaborativo e a comunicação entre os alunos, bem como o registro, por escrito, do processo de resolução (Powell & Bairral, 2006).

A escolha do tema, dos conhecimentos matemáticos e das tecnologias digitais, bem como o planejamento, desenvolvimento e implementação do problema apresentaram indícios que as alunas D, E e F integraram hierarquicamente os processos reguladores gerais (Quadro 2). Consoante com a teoria de Case (1989), entende-se que a *regulação mútua* ocorreu quando as alunas D e F identificaram e avaliaram, com a aluna E, as necessidades educacionais, os interesses e expectativas futuras dos seus alunos e realizaram o *design* do problema; a *imitação*, que se apresentou quando o grupo se apropriou dos conhecimentos produzidos em uma uma experiência anterior, em que resolveram um problema aberto, no mesmo curso (no terceiro encontro presencial), que foi produzido na forma de uma história em quadrinhos *online*, no *site Toondoo*, favorecia a (re)formulação e resolução de problemas o uso de tecnologias digitais e abordava como tema o planejamento de um orçamento familiar, para escolher, também, um tema ligado à prática de consumo e o mesmo *site* para produzir a sua história em quadrinhos; a *resolução de problemas*, ao tomarem a decisão de utilizarem os recursos disponíveis no *site Toondoo*, sem o terem utilizado anteriormente, mas devido a experiência que obtiveram com a resolução dos problemas, essas consideraram que o *site* possuía recursos adequados para o *design* do enunciado; e a *exploração*, quando buscaram verificar os recursos disponíveis pelo *site Toondoo* e como esses poderiam ser consoantes às partes da história em quadrinhos, que foram produzidas no *storyboard*.

PROCESSO REGULADOR	**INDÍCIO(S) IDENTIFICADO(S)**
Resolução de problemas	Utilização do *site Toondoo*, sem o terem utilizado anteriormente.
Exploração	Verificação dos recursos disponíveis no *site Toondoo* e adequação das partes da história em quadrinhos, produzidas no *storyboard*, aos mesmos.
Imitação	Apropriação de conhecimentos produzidos em uma experiência anterior, em que (re)formularam e resolveram um problema, utilizando as tecnologias digitais, e que o enunciado abordava um tema ligado à prática consumo, que foi produzido na forma de uma história em quadrinhos *online*, no *site Toondoo*.
Regulação mútua	Identificação das necessidades educacionais, dos interesses e das expectativas futuras dos alunos da aluna E e realização do *design* do enunciado.

Quadro 2. Compreensão pedagógica dos processos reguladores gerais (Case, 1989).

Nos indícios identificados, depreende-se que o *design* da primeira versão permitiu que as alunas D, E e F ativassem e avaliassem os esquemas mentais que possuíam, ao reconhecerem as potencialidades de uma experiência anterior, para recodificá-los, na formulação de um novo enunciado, mas que seria semelhante ao que haviam resolvido no mesmo curso, e para consolidar novos esquemas, que podem ser utilizados em outros momentos, no contexto escolar, como professores de Matemática – Sub-passos dos processos reguladores gerais da teoria caseana.

No sétimo e oitavo encontros não presenciais do curso, ocorreram as etapas de *avaliação da primeira versão do enunciado*, de *discussão e reflexão por parte dos designers* e de *realização de modificações ou do re-design*, *para obter a segunda versão do enunciado*. As atividades propostas tinham como propósitos que houvesse a discussão, a investigação e a reflexão sobre o processo realizado, que resultaria na primeira versão do enunciado, e tomassem a decisão de realizar as modificações sugeridas pelas pesquisadoras ou o *re-design* do problema, para obter a segunda versão aprimorada.

Na etapa de *avaliação da primeira versão do enunciado*, as pesquisadoras não resolveram a primeira versão, mas analisaram, de forma minuciosa, os aspectos estéticos e as informações contidas no enunciado, nas duas opções, para fornecer o *feedback* às alunas D, E e F (*designers*). Para ambas opções, tanto a feminina como a masculina, foram sugeridas a revisão da ortografia e dos sinais de pontuação e que fossem alterados o tamanho dos objetos e da(o) personagem, para que esses ficassem proporcionais aos cenários, bem como que as imagens das plantas baixas das residências ficassem legíveis.

Na etapa de *discussão e reflexão por parte dos designers* e segundo as gravações de áudio e vídeo, as alunas D, E e F discutiram e decidiram realizar as modificações que julgaram necessárias, de acordo com os comentários das pesquisadoras. Na etapa de *realização de modificações ou do re-design*, *para obter a segunda versão do enunciado*, obtiveram uma nova versão, em que se verificam as alterações solicitadas. O problema possui duas opções, uma feminina (http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696308)(Figura 5) e outra masculina (http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307), que se diferem apenas pelo personagem.

Figura 5. Página 1 do problema "Mobiliando a casa" (versão feminina).
Fonte: a pesquisa (2018).

Dessas opções, apresenta-se o resultado desse *design*, na versão masculina (Figura 6).

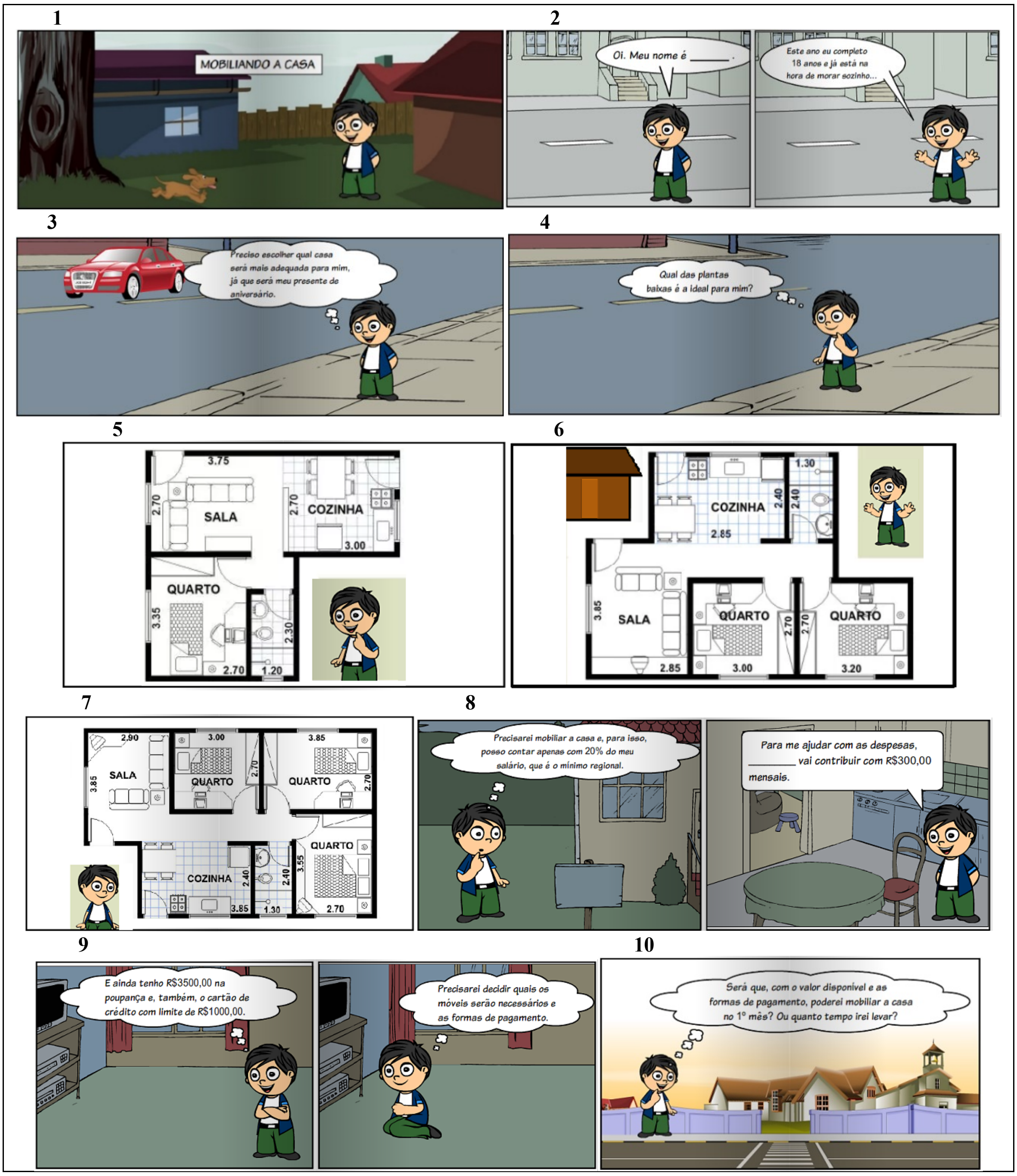


Figura 6. Páginas do problema "Mobiliando a casa" (versão masculina).
Fonte: a pesquisa (2018).

No problema, observa-se que, da página 1 a 4, são expostas informações sobre o personagem, mas o seu nome precisa ser completado (página 2) e há um questionamento que instiga a escolha de uma das plantas baixas das residências (página 4). Nas páginas 5 a 7, foram utilizadas as imagens das plantas baixas das residências, de um (página 5), dois (página 6) e três (página 7) dormitórios, respectivamente, que possuem a representação de como os móveis são dispostos nos cômodos, que podem ou não interferir nas decisões dos alunos. Nas páginas 8 e 9, são fornecidas as informações quanto às condições financeiras e de pagamento do personagem e, ainda, é preciso determinar o nome do outro personagem que irá ajudar nesse pagamento. Na página 10 e última, são feitos questionamentos que suscitam a busca por uma solução para o problema, já que será necessário responder se o personagem poderá efetuar as compras no primeiro mês ou não.

No Fórum "Refletindo sobre o *design* dos problemas com a utilização das tecnologias digitais", as alunas D e F declaram que a experiência como *designer* foi inédita, uma vez que lhes permitiu a aprendizagem de uma nova perspectiva educacional, diferenciada e enriquecedora, que exige a reflexão sobre como deve ser produzido um enunciado para que os alunos resolvam os problemas, sejam autônomos na tomada de decisões e aprendam conhecimentos matemáticos. A aluna D, ainda, mencionou as características e capacidades que podem ser desenvolvidas com a resolução do enunciado que criaram, que "*[...] tem diferentes caminhos para obter a solução e, ao formulá-lo, fomos capazes de identificarmos como reagiriam os alunos quanto às suas escolhas [...]. Assim o aluno poderá desenvolver as capacidades de tentar, supor, testar e provar [...]".*

A aluna E salientou que: "*[...] o problema desenvolvido pelo meu grupo trata-se de uma situação real, [...] que os alunos devem adquirir móveis para as suas casas e, para isso, é necessário decidir o que comprar e de que forma realizar essa compra, pesquisando na Internet [...]".* Nesse excerto, a aluna ressalta as possibilidades que o tema escolhido e abordado pode proporcionar. Também, a aluna afirma, na sua participação no Fórum, que "[...] o *design de problema é uma metodologia [...], que possibilita trabalhar com inúmeras situações com os alunos e, a partir dessas situações, torná-los mais críticos e independentes na tomada de suas decisões"*. Essa resposta indica a sua compreensão quanto à perspectiva evidenciada e que essa pode viabilizar o desenvolvimento das competências e habilidades de reflexão crítica e da tomada de decisões.

Pelas respostas das alunas D, E e F, nota-se que elas identificaram as potencialidades, as características e os aspectos que podem ou devem ser atribuídos ao *design* de enunciados de problemas com o uso de tecnologias digitais, cuja pretensão é que ocorra a (re)formulação e resolução com o uso de recursos tecnológicos. Também, reconheceram a necessidade de contextos como o evidenciado no enunciado, para que os alunos se envolvam, nesse processo, tal como afirmam Vale, Pimentel e Barbosa (2015).

Desse modo, compreende-se que o *design* do enunciado oportunizou as alunas D, E e F a aquisição da experiência de *designer*, uma vez que, em concordância com a concepção de Dewey (1979), consideraram o *design* como uma situação real ou um problema que solicitava uma solução, ou seja, a obtenção de um enunciado que atingisse os objetivos de ensino pretendidos. O pensar reflexivamente norteou as suas ações, no que se refere à investigação, discussão e experimentação e ao emprego da linguagem, tanto no planejamento, desenvolvimento e implementação da primeira versão como na realização das modificações requeridas, para obter a segunda. Também, de acordo com a teoria deweyana, as alunas, de forma colaborativa, pensaram reflexivamente no decorrer do *design*, das modificações que realizaram e das suas participações no Fórum (Quadro 3).

PENSAMENTO REFLEXIVO	INDÍCIO(S) DA OCORRÊNCIA
Sugestões	Identificação das necessidades educacionais e como poderiam ser atendidas por meio do *design* do enunciado.
Dificuldade ou perplexidade sentida	Experimentação, ao planejar, desenvolver e implementar o enunciado na forma de uma história em quadrinhos, no *site Toondoo*.
Hipótese	Troca de ideias e tomada de decisões pelo grupo, bem como a observação das características e aspectos que o enunciado poderia apresentar.
Raciocínio	Reconhecimento de quais possibilidades que o enunciado dos problemas poderia gerar, ao ser (re)formulado e resolvido, com o uso de tecnologias digitais.
Verificação da hipótese	Discussão, investigação e análise sobre as decisões tomadas como *designers* e das características e aspectos atribuídos, se o enunciado poderia contribuir para a sua (re)formulação e resolução e para o desenvolvimento de competências e habilidades e a produção de conhecimentos.

Quadro 3. Fases do pensamento reflexivo (Dewey, 1979).

A experiência como *designers*, também, contribuiu para o desenvolvimento da criatividade e inovação, pois, segundo o *modelo 4P+F* proposto por O'Dell (2001), as alunas D, E e F avaliaram as suas preferências no *design*, de acordo o enfoque evidenciado no curso (*P de* pessoa); tiveram que planejar e desenvolver, em um *storyboard*, como seria o enunciado e observando as necessidades requeridas, para, então, implementá-lo e, posteriormente, aprimorá-lo (*P de processo*); realizaram o *design*, se apropriando do planejamento e desenvolvimento elaborados (*P de produto*) e das alterações requeridas e sugeridas pelas pesquisadoras (*P de pressão*). Dessa forma, o *design* do enunciado, sob o enfoque evidenciado, pode ser considerado como um tipo de ferramenta, tal como sugere o autor (*F de ferramentas*), pois, apreende-se que houve, também, a ocorrência do processo *Quatro Diamantes* (Quadro 4).

FASES DIVERGENTES	PROCESSO	FASES CONVERGENTES
Discussões iniciais sobre as necessidades educacionais.	***Análise do problema***	Definição das características e aspectos que deveriam ser atribuídos ao *design*.
Discussões e troca de ideias sobre como planejar e desenvolver o enunciado, utilizando, para isso, o *storyboard*.	***Definição do problema***	Decisão de produzir o enunciado na forma de uma história em quadrinhos.
Discussão sobre como seria cada parte da história em quadrinhos, do que seria escrito e as imagens que nela teria.	***Geração de ideias***	Definição das informações que seriam fornecidas no enunciado. Pesquisa, na *Internet*, de imagens de plantas baixas de residências para nele seriam utilizadas. Decisões de utilizar o *site Toondoo,* para produzir a história em quadrinhos *online*, e de produzir uma opção feminina e outra masculina.
Discussões e troca de ideias sobre como adequar o planejamento do enunciado, feito no *storyboard*, aos recursos oferecidos pelo *site Toondoo*. Discussão, investigação e reflexão, posteriores à primeira versão, para aprimorar o enunciado obtido.	***Planejamento de ações*** ↓	Planejamento, desenvolvimento e implementação do enunciado (primeira versão) e das modificações para aprimorá-lo (obtenção da segunda versão).
	Problema obtido	

Quadro 4. Compreensão pedagógica do processo *Quatro Diamantes* (O'Dell, 2001).

De acordo com os dados obtidos, depreende-se que a experiência adquirida pelas alunas D, E e F contribuiu para que produzissem conhecimentos relativos à realização de *designs* de problemas abertos e que abordam temas de relevância social, para a abordagem da Educação Matemática Crítica, e quanto à utilização de tecnologias digitais, nesses processos. As análises realizadas, a partir das concepções de Figueiredo (2017), Dewey (1979), Case (1989) e O'Dell (2001), permitem a identificação das competências e habilidades que demonstraram e/ou que desenvolveram: trabalhar colaborativamente; tomar decisões; discutir, refletir e investigar no desenrolar e após a prática de *design*; criar e inovar; escolher o tema e os conhecimentos matemáticos a serem trabalhados; atribuir características e aspectos; e avaliar o processo realizado e o resultado obtido.

6. Considerações finais

A realização de atividades, quando propostas e se constituem como um problema a ser solucionado pelos alunos como uma atividade de *design* (Valente & Canhette, 1998), são meios capazes de preparar os futuros profissionais para o enfrentamento e a solução de problemas no ambiente profissional. A perspectiva educacional do *design* de enunciados de problemas com o uso de tecnologias digitais, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de recursos tecnológicos, explicitada, neste artigo, apresenta potencialidades, que podem abranger diferentes contextos e áreas educacionais.

Como possibilidade, destacou-se o emprego dessa perspectiva na formação inicial de professores de Matemática, pois os futuros professores precisam vivenciar experiências que os permitam reconhecer, experimentar e aprender a utilizar as tecnologias digitais e abordar temas de relevância social, no *design* de enunciados de problemas abertos, que tenham por finalidade a (re)formulação e resolução dos mesmos e a Educação Matemática Critica. De modo geral, a experiência como *designer* de problemas pode favorecer a tomada de decisões, a criatividade, a inovação e a discussão, a reflexão e a investigação sobre as ações e os resultados obtidos, tanto no decorrer como após o *design*, que são competências e habilidades necessárias ao desempenho do professor de Matemática, que deseja atuar na Educação Básica.

Todavia, destaca-se que, as concepções de Figueiredo (2017), Dewey (1979), Case (1989) e O'Dell (2001), contribuem para a compreensão pedagógica, por parte de pesquisadores e/ou professores, de como ocorre o *design* de enunciados de problemas e permitem o reconhecimento que tal processo ocorre em etapas, em que características e aspectos devem ser discutidos, refletidos, investigados e atribuídos pelos *designers*, com o uso de tecnologias digitais. Conforme a investigação realizada, foi possível depreender que o professor deve orientar os alunos, para que elaborem problemas matemáticos, que tenham como principais características: serem abertos, pré-determinados e que apresentem informações incompletas e situações problemáticas, semelhantes às que ocorrem no dia a dia, mas que precisam ser correlacionadas, para que ocorra a interpretação e o entendimento do(s) problema(s) proposto(s) ou norteador(es). Também, precisam atribuir os aspectos: a exploração, a investigação, a simulação, os aspectos estéticos, entre outros (Figueiredo, 2017).

Além disso, vale ressaltar que o *design* de enunciados de problemas abertos é um tipo de formulação de problemas, que pode ser realizada na Educação Matemática. No entanto, entende-se que tais enunciados devem ser elaborados para propiciarem a (re)formulação e resolução de problemas, com o uso de tecnologias digitais, já que tal enfoque pode tornar a solução de problemas mais complexa.

Referências

Allevato, N. S. G. (2008). *O Computador e a Aprendizagem Matemática*: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas. Rio Claro, SP: UNESP.

Borba, M. C., Silva, R. S. R. da., Gadanidis, G. (2014). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:* sala de aula e *internet* em movimento. Belo Horizonte: Autêntica.

Bravo, J. A. F., Sánchez, J. J. B. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 32, 29-43

Case, R. (1989). *El desarrollo intelectual del nacimiento a la edad madura.* 1.ed. Barcelona, Espanha: Paidós.

Dewey, J. (1979). *Como pensamos:* como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo – uma reexposição*.* São Paulo: Nacional.

Figueiredo, F. F., Dalla Vecchia, R. (2015). O design de problemas com as Tecnologias Digitais no ensino da Matemática. *CIAEM-IACME, 14*, Tuxtla Gutiérrez, México. Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de http://xiv.ciaem-edumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1298/509

Figueiredo, F. F. (2017). *Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Luterana do Brasil, Canoas, Brasil.

Figueiredo, F. F., Groenwald, C. L. O. Problemas abertos com a utilização das Tecnologias Digitais: um processo potencializador na formação do educador matemático. *Debates em Educação*, 10(20), 174-198.

Figueiredo, F. F. (2008). *Resolução de Problemas no Ensino de Porcentagem:* em busca de uma compreensão pedagógica a partir dos processos reguladores gerais da teoria de Robbie Case (Dissertação de Mestrado). Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil.

Filatro, A. C. (2008). *Design instrucional na prática.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Jenkins, H. et al. (2006). *Confronting the Challenges of Participatory Culture: Media Education for the 21st Century.* Chicago: The MacArthur Foudation. Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de https://mitpress.mit.edu/sites/default/files/titles/free_download/9780262513623_Confronting_the_Challenges.pdf

O'Dell, D. (2001). *A resolução criativa do problema:* guia para a Criatividade e Inovação na Tomada de Decisões. Epistemologia e Sociedade. Lisboa: Instituto Piaget.

Problema. (2018). *Mobiliando a casa – versão feminina.* Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696308

_________. (2018). *Mobiliando a casa – versão masculina.* Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de http://www.toondoo.com/ViewBook.toon?bookid=696307

Powell, A., Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático:* interações e potencialidades. Campinas: Papirus.

Rosa, M. (2015). Cyberformação com professores de Matemática: interconexões com experiências estéticas na cultural digital. In: M. Rosa, M. Bairral, R. B. Amaral (Org.), *Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância:* pesquisas contemporâneas (p.57-96). São Paulo: Livraria da Física.

Screencast-O-Matic. (2018). *Site oficial.* Seattle: Screencast-O-Matic. Disponível em: http://www.screencast-o-matic.com/

Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação. In:________. *Desafios da reflexão em educação matemática crítica.* Campinas, SP: Papirus.

________. (2014). *Um convite à educação matemática crítica.* Campinas, SP: Papirus.

Toondoo. *Site.* (2018). Pleasanton, CA, USA: Jambav. Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de http://www.toondoo.com/

Turola, H. (2018). *Plantas baixas de residências.* Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de https://hamiltonturola.wordpress.com/

Ulbra. (2018). *Ambiente de Aprendizagem Moodle do Curso de Extensão de Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais, sob o enfoque da (re)formulação e resolução de problemas na Educação Matemática.* Canoas: PPGECIM/ULBRA. Recuperado em 10 de fevereiro de 2019, de http://www.ppgecim.ulbra.br/moodle/user/view.php?id=128&course=40

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, 24(2), p.39-60

Valente, J. A., Canhette, C. C. (1998). LEGO-Logo: Explorando o Conceito de *Design*. In: J. A. Valente (Org.). *Computadores e Conhecimento:* repensando a Educação (p.77-91). Campinas, SP: UNICAMP/NIED.

Yin, R. K. (2016). *Pesquisa qualitativa do início ao fim.* Porto Alegre: Penso.

Autores:

Fabiane Fischer Figueiredo: **Pós-Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA), Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA), Mestra em Ensino de Matemática (UFN) e Licenciada em Matemática (UNISC). Professora de Matemática da E.E.E.M. João Habekost/Rio Pardo-RS-BR. E-mail: fabianefischerfigueiredo@gmail.com**

Claudia Lisete Oliveira Groenwald: **Pós-Doutora em Tecnologias Educativas (ULL), Doutora em Ciências da Educação (UPS) e Licenciada em Matemática (UNISINOS). Coordenadora e docente do PPGECIM (ULBRA)/Canoas-RS-BR. E-mail: claudiag@ulbra.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 67-87

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

¿Quién tiene una respuesta diferente? Análisis del rol docente durante la argumentación en la clase de matemática

Camila Rasse, Horacio Solar

Fecha de recepción: 19/03/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen	La argumentación en la clase de matemática es una práctica de enseñanza que permite a los estudiantes apropiarse del conocimiento, tomando un rol más protagónico al trabajar con problemas matemáticos y dialogar con sus pares en busca de la respuesta correcta. Se presenta el análisis de dos episodios de argumentación en la clase de matemática en educación primaria, a cargo de profesoras participantes del modelo de formación Mejoramiento de la Experiencia Docente. Por medio del análisis de estos episodios se puede señalar que el rol docente en la argumentación refiere a la gestión de la actividad, posibilitando la confrontación de ideas, evitando juicios evaluativos, y actuando en base a las cinco prácticas planteadas por Smith y Stein (2011). Se señala la necesidad de formar a los futuros profesores para poder desarrollar este tipo de actividades. **Palabras clave:** argumentación, enseñanza de la matemática, profesores.
Abstract	Argument in math class is a teaching practice that allows students to grab knowledge for themselves, taking a leading role by working with math problems and talking to their peers in the search for the right answer. The article presents the analysis of two argument episodes in math class at elementary level. These episodes are leaded by two teachers that participated in the formation model Improvement of Teacher Experience. Through the analysis it's possible to account that teachers play a management role during the argument, enabling students to confront opposite ideas, avoiding evaluative judgements, and taking acting upon the five practices that Smith and Stein (2011) propose. The need to train future teachers to develop this type of activities is stressed. **Keywords:** argument, math teaching, teachers.
Resumo	Argumentação na aula de matemática é uma prática de ensino que permite ao aluno apropriar-se do conhecimento, assumindo um papel mais ativo ao trabalhar com problemas matemáticos e dialogar com seus pares em busca da resposta correta. Apresentamos a análise de dois episódios de argumentação na aula de matemática no ensino fundamental, por parte de professores participantes do modelo de formação Melhorando a Experiência de Ensino. Por meio da análise desses episódios, pode-se apontar que o papel docente na argumentação refere-se ao gerenciamento da atividade, possibilitando o confronto de ideias, evitando juízos valorativos e atuando com base nas cinco práticas propostas por Smith e Stein (2011). A necessidade de formar futuros professores para desenvolver este tipo de atividades é apontada. **Palavras chave**: argumentação, ensino de matemática, professores.

1. Introducción

La enseñanza de la matemática escolar en Chile plantea la necesidad de articular habilidades matemáticas y contenidos, de modo que los estudiantes no solo aprendan las operaciones, fórmulas y teoremas, sino que también obtengan habilidades de pensamiento matemático asociadas a esos contenidos (Ministerio de

Educación, 2013). A partir de esto, se indican cuatro habilidades específicas que deben desarrollarse a lo largo de la trayectoria escolar de los estudiantes: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar (Ministerio de Educación, 2013).

Tanto los contenidos como las habilidades pueden enseñarse por medio de diversas prácticas de enseñanza. Una de estas prácticas corresponde a la argumentación, la cual se utiliza en diversas asignaturas del currículum, como Historia (Reisman, 2015), Filosofía (Schuitema, Veugelers, Rijlaarsdam & Ten Dam, 2009) y Matemática (Solar, 2018), como práctica que permite no solamente abordar contenidos, sino que además logra que los estudiantes aprendan a escuchar a otros, elaborar argumentos y presentar opiniones de forma respetuosa y fundamentada (Bickmore, 2014; Bickmore & Parker, 2014; Reisman, 2015). Este aprendizaje es fundamental para el desarrollo de los estudiantes como personas que participan activamente de la sociedad, en cuanto competencia ciudadana que los prepara para la vida en sociedad (Geboers, Geijsel, Admiraal & Ten Dam, 2015).

En el caso de la clase de matemática, la argumentación es una práctica que se basa en que a partir de un problema matemático, los estudiantes presenten sus respuestas indicando el proceso de razonamiento por medio del cual llegaron a ella. En ese sentido, se potencia que los estudiantes puedan darse a entender a sus pares, y los convenzan de que su respuesta es la correcta. Esta forma de abordar la matemática permite el desarrollo de habilidades de argumentación, a la vez que permite verbalizar procesos de razonamiento que no suelen verbalizarse. En ese sentido, permite la identificación de errores conceptuales acerca de las operaciones matemáticas, teoremas o fórmulas utilizadas por los estudiantes, a la vez que permite que éstos tomen un rol más protagónico dentro de su proceso de aprendizaje.

La investigación en esta materia se ha enfocado principalmente en el análisis mismo de las interacciones de aula, considerando el proceso por el que pasan los estudiantes y la forma en que se genera la argumentación dentro del grupo de estudiantes (Krummheuer, 2015). Si bien existen investigaciones que han considerado el rol del profesor en el desarrollo de la discusión en la clase de matemática (Smith & Stein, 2011), y en particular de la argumentación (Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014; Solar & Deulofeu, 2016), éstas aún son de carácter incipiente, por lo que es fundamental poder contribuir a la investigación acerca del rol de los docentes respecto a la argumentación, y las prácticas que éstos realizan para promoverla, para así generar oportunidades de aprendizaje en los estudiantes por medio del diálogo y discusión de sus ideas.

La argumentación en la clase de matemática permite no solo abordar el contenido curricular a trabajar con los estudiantes, sino que también formar en la habilidad de argumentar y comunicar mandatada por el Ministerio de Educación. De esta manera, esta práctica integra tanto contenido como habilidad. En su aplicación, es fundamental el rol que cumplen los docentes, puesto que son quienes deben posibilitar la argumentación en el aula. Para lograr esto, deben tomar ciertas posturas, y realizar ciertas acciones que potencien la participación de los estudiantes, para que éstos puedan efectivamente argumentar frente a sus pares y apropiarse del contenido (Staples & King, 2017). En este contexto, es importante considerar cuál es el rol que toman los docentes en aula para promover la argumentación en el aula de matemática.

2. Marco teórico

2.1 Argumentación en matemática

Para analizar el rol de los docentes dentro de una dinámica de argumentación en aula en la clase de matemática, es importante en primer lugar comprender en qué consiste este proceso pedagógico y cómo funciona. La argumentación en la clase de matemática tiene una función asociada a que los estudiantes demuestren a sus compañeros su proceso de razonamiento para llegar a una solución, convenciéndolos de que su forma de resolver el problema matemático es la correcta (Krummheuer, 2015).

Conner et al. (2014) señalan que la participación en discusiones matemáticas puede considerarse como argumentación colectiva, que implica que varias personas llegan a una conclusión, usualmente por medio de un consenso. Esta forma de trabajo en el aula se considera como “learning-as-participation”, en cuanto una situación en la que los participantes generan relaciones relativamente sofisticadas entre argumentos (Sfard, 2008 en Krummheuer, 2015). Es en este contexto que debe tomarse en consideración, que la enseñanza eficaz de las matemáticas se basa en el planteamiento de preguntas que estimulan a los estudiantes a explicar y reflexionar sobre sus propios procesos de razonamiento, lo que es necesario para la formación de un discurso matemático significativo (National Council of Teachers of Mathematics, 2015).

El discurso matemático significativo se basa en la idea de hacer que la matemática sea razonable en la escuela, considerando que refiere a cualquier forma de comunicación que posicione a este conocimiento como un tema que tiene sentido, produciendo ideas cuando se usa el razonamiento. Asimismo, lo significativo de la discusión en matemática viene de la significancia de la matemática y del significado personal que tiene para los estudiantes el generar ideas, ser escuchado por otros, considerar los puntos de vista de los demás, y colectivamente desarrollar nuevas comprensiones del contenido (Staples & King, 2017). A partir de esto, se puede considerar que la argumentación y la formación de discurso matemático significativo permite plantear los problemas matemáticos como oportunidades para discutir diferentes formas de razonamiento, al mismo tiempo que presenta a los estudiantes oportunidades para darle un significado personal tanto al contenido como a la experiencia de participar de un proceso de argumentación con sus pares.

Los análisis de argumentación en la clase de matemática utilizan como marco el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que se basa en un proceso analítico lineal que va desde los datos hasta las conclusiones. En este caso, se considera que una argumentación efectiva debe contar con: dato, garantía, conclusión en base a esa garantía, refutación a la garantía y conclusión en base a la refutación (Conner et al., 2014). El dato refiere al problema matemático a resolver y que da inicio a la discusión. Este problema debe ser de alta demanda cognitiva, es decir, que implique que los estudiantes desarrollen procesos de pensamiento complejo, y que hayan múltiples formas de resolución del problema (Conner et al., 2014). Luego del dato, los estudiantes presentan garantías que llevan a una conclusión, siendo ésta un argumento basado en un razonamiento matemático que lleva a una determinada solución para el problema, y así a una conclusión. Esta garantía debe ser refutada por otro participante, por medio de un razonamiento matemático que permita llegar a una conclusión alternativa para el problema presentado, y que finalmente se presente como el resultado correcto. Sin embargo, debe considerarse que esta nueva conclusión debe ser aceptada por la totalidad de los estudiantes, permitiendo así un convencimiento de que esta es la solución correcta. De esta manera, las discusiones pueden proveer de información valiosa a los profesores acerca de cómo los estudiantes están haciendo sentido a los contenidos, y la forma en que los razonan, lo que muchas veces no puede ser evaluado por medio del trabajo escrito (Staples & King, 2017).

2.2 El profesor dentro del proceso de argumentación en aula

Para el desarrollo de un proceso de argumentación, el rol del docente es fundamental en la medida en que éste debe tomar un rol que permita la participación de los estudiantes. Lampert y Cobb (2003, citado en Cox, Meicenheimer & Hickey, 2017) plantean tres posturas que pueden tomar los profesores frente a la argumentación en la clase de matemática:

(a) postura de adquisición: los profesores esperan que los estudiantes dominen un set de procesos matemáticos y hechos especificados para ellos por autoridades externas;

(b) postura participativa: los profesores ayudan a los estudiantes a participar en una forma sucesivamente más competente en prácticas matemáticas;

(c) escuchar la matemática de los estudiantes: los profesores integran la voz de los estudiantes y voz de la disciplina de conocimiento, mientras definen su voz interna para hacer sentido a la comprensión de los aprendices.

Cox et al. (2017) plantean como postura más apropiada para la discusión en clase de matemática la referente a escuchar la matemática de los estudiantes, indicando que para esto, el docente debe monitorear el proceso de pensamiento de los estudiantes tanto durante el trabajo individual como en grupos pequeños, para así seleccionar y secuenciar el trabajo de los estudiantes que será compartido y discutido por el curso completo.

Por su parte, Staples y King (2017) señalan que las funciones del rol de los profesores en la argumentación en la clase de matemática serían: (a) provocar el pensamiento de los estudiantes, por medio de proveer a los estudiantes tiempo y espacio para generar ideas, e invitarlos a compartirlas con la clase, incentivando y apoyando la clara comunicación de éstas; (b) apoyar el intercambio de ideas matemáticas entre estudiantes, monitoreando la discusión y actuando como sea necesario para que los estudiantes puedan mantener una posición que haga sentido y contribuya a la discusión colectiva; y (c) guiar y extender la matemática durante la discusión, para que se extienda el pensamiento y comprensión de los estudiantes.

Dentro del rol que toma el docente, debe considerarse su capacidad para hacer preguntas deliberadas a los estudiantes, con el objetivo de potenciar la discusión, sin indicar la respuesta correcta al problema matemático. Respecto a esto, se toma en consideración el modelo de cuestionamiento tipo embudo y el modelo de cuestionamiento tipo enfoque. El primero –modelo de cuestionamiento tipo embudo-, refiere a un conjunto de preguntas que busca llevar a los estudiantes al procedimiento matemático o conclusión deseada, sin prestar mayor atención a las respuestas que se desvían de ese resultado deseado; en este modelo, el profesor guía a los estudiantes por la senda ya trazada, sin permitir que hagan sus propias conexiones o construyan una comprensión propia de los conceptos matemáticos. Por su parte, en el modelo de cuestionamiento tipo enfoque, el docente atiende a lo que los estudiantes piensan, e incentiva a que comuniquen con claridad su pensamiento, esperando que reflexionen en torno a sus pensamientos y los de sus pares; de esta forma, el docente se abre a la posibilidad de que la tarea pueda ser abordada de diferentes maneras (National Council of Teachers of Mathematics, 2015).

En contraste con la conceptualización del National Council of Teachers of Mathematics (2015), se pueden encontrar diferentes patrones de interacción, planteados por diversos autores. El patrón más clásico corresponde al comúnmente conocido como IRE, que consiste en una iniciación por parte del profesor, seguido por una respuesta del estudiante, y que termina en una posterior evaluación de esa respuesta (Mehan, 1979); este patrón de interacción se ha señalado que reforzaría una estructura asimétrica dentro de la relación profesor-estudiante, en cuanto el primero se plantea como quien posee el conocimiento y el segundo solo infiere lo que el profesor podría estar pensando (Mercer & Dawes, 2008; Pimm, 1994).

Complejizando los patrones de interacción posibles, surgen los postulados por Wood (1998) y Voigt (1995), quienes plantean cuatro patrones de interacción relevantes para la argumentación en la clase de matemática.

1. El patrón de embudo (Funnel Pattern) planteado por Wood (1998), que consiste en la realización de una pregunta por parte del profesor y una situación en que los estudiantes presentan dificultades para lograr la respuesta correcta, por lo que el profesor desarrolla una secuencia de preguntas más sencillas que fragmentan el contenido del problema inicial en partes de menor complejidad para el alumno.
2. El patrón de enfoque (Focusing Pattern) también es planteado por Wood (1998), y consiste en una interacción donde el profesor valora la diversidad de soluciones que surgen para la misma tarea, destacando la solución que le parece más interesante para los estudiantes, independiente de si ésta es la que éste desea imponer.
3. El patrón de provocación (Elicitation Pattern) es indicado por Voigt (1995) y se refiere a una interacción en aula donde los alumnos ofrecen aportes al diálogo que difieren de las que son esperadas por el docente, por lo que éste se siente obligado a guiar a los estudiantes para que lleguen a la respuesta correcta, realizando preguntas y aclaraciones.
4. Finalmente, el patrón de discusión (Discussion Pattern) también señalado por Voigt (1995), plantea como punto de partida de una construcción de significados comunes la solución de los problemas a discutir en la clase, más que como la meta de ésta. De esta manera, los procesos argumentativos de los alumnos se enriquecen en base a las contribuciones realizadas por sus pares.

Al hacer el paralelo con los modelos de cuestionamiento ya señalados, puede considerarse que el patrón embudo concuerda con el modelo de embudo, mientras que el patrón de enfoque postulado por Wood coincide con el modelo de enfoque (National Council of Teachers of Mathematics, 2015; Wood, 1998).

Para el profesor, el guiar una clase donde se trabaja con argumentación implica la realización de diferentes movimientos dentro de la sala que faciliten este tipo de trabajo por parte de los estudiantes. Smith y Stein (2011) plantean una serie de prácticas para gestionar la clase de matemática, pero que se estima que podrían considerarse para acompañar la situación de argumentación y potenciar su ocurrencia. Estas prácticas consisten en:

(a) anticipar las respuestas posibles de los estudiantes al problema entregado, teniendo éste que ser desafiante, puesto que de otra forma no da espacio a diversidad de respuestas;

(b) monitorear las respuestas efectivas de los estudiantes, de modo de tener claridad de las diferentes opciones posibles dentro del aula;

(c) seleccionar a ciertos estudiantes para que presenten su respuesta y razonamiento al resto del curso, cautelando por la diversidad de respuestas;

(d) secuenciar las respuestas de los estudiantes en un cierto orden, dejando que la secuencia de espacio para presentar garantía y refutación;

(e) conectar las diferentes respuestas de los estudiantes, conectándolas con ideas matemáticas clave que permiten la continuidad más amplia de los contenidos del curso (Smith & Stein, 2011).

Estos cinco movimientos del docente frente a una actividad donde se desarrolla argumentación plantean que la planificación de la clase es más compleja, en cuanto implica que el docente debe tomar en consideración dentro de ésta, las eventuales respuestas que los estudiantes puedan entregar, de modo de tener mayor control sobre los diferentes aspectos que puedan surgir dentro de la clase (Smith & Stein, 2011).

A partir de lo mencionado, debe considerarse que el rol del docente dentro de la argumentación se plantea como el de un facilitador del aprendizaje de los estudiantes, dando espacio para que éstos señalen diferentes respuestas a un cierto problema, sin realizar juicios evaluativos de éstas, dando espacio para que éstos se apropien de la matemática y puedan evaluar por si mismos la validez de las respuestas (National Council of Teachers of Mathematics, 2015; Smith & Stein, 2011; Solar & Deulofeu, 2016), sin ser el docente quien entrega el conocimiento a un grupo de estudiantes que pasivamente lo recibe. De esta manera, el docente permite a los estudiantes que sean protagonistas de su propio aprendizaje, utilizando las ideas de los propios estudiantes como base desde la cual desarrollar la clase (Solar, 2018).

3. Metodología de Análisis

Para responder al propósito de esta investigación, se analizarán clases de dos profesoras de primaria participantes de un seminario de formación para docentes acerca de la argumentación en la clase de matemática. Este seminario buscaba recursos en estos docentes que les permitieran promover la argumentación en sus aulas; en esta instancia participaron diez docentes de enseñanza básica (primaria) de establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción (Región del Bío-Bío, Chile) y tuvo una duración de 15 meses entre el año 2014 y 2015. El proceso fue realizado a partir del modelo de formación Mejoramiento de la Experiencia Docente (Solar, Ortiz & Ulloa, 2016), cuyo propósito es que profesores en ejercicio trabajen problemáticas acerca de la gestión de aula en matemática, reflexionando por medio del análisis de la práctica docente, utilizando grabaciones de clases (Solar, Ortiz & Ulloa, 2016). Los videos analizados en este estudio corresponden a un proyecto de investigación más amplio donde uno de los objetivos corresponde a identificar las condiciones que promueven la argumentación en la clase de matemática.

Se analizarán dos clases registradas en video, una de un primer año básico (1° de primaria, estudiantes de entre 6 y 7 años) y una de un cuarto año básico (4° de primaria, estudiantes de entre 9 y 10 años). El criterio de selección para las clases consideradas en este estudio fue que las profesoras a cargo de la clase lograran establecer una situación de argumentación en base a la presentación de una tarea matemática. Se usan las transcripciones de los episodios, de modo de a partir de éstas extraer los dichos específicos de todos los actores involucrados. Se considerará como unidad de análisis los momentos de interacción entre estudiantes y profesora durante la clase, asociados a la tarea matemática.

Para el análisis se tomará como base el modelo argumentativo de Toulmin (1958), que cuenta con las características ya mencionadas anteriormente. A partir del trabajo de Solar y Deulofeu (2016), para que una interacción sea considerada como argumentación, solo se tomarán los elementos de dato, garantía, refutación y conclusión. Dentro de este análisis, se considerará en primer lugar la existencia y estructura de la argumentación, y posteriormente el rol del docente en su promoción, por medio de dos aspectos que tienen relación directa con el desarrollo de la argumentación: las oportunidades que da la profesora para la confrontación de ideas y la postura evaluativa de ésta ante las respuestas de los estudiantes. Por otra parte, se considera que las cinco prácticas para promover la discusión en clases de matemáticas (Smith & Stein, 2011) son relevantes para el análisis de interacciones argumentativas, por lo que se utilizarán como elementos para caracterizar el rol del profesor.

4. Resultados

4.1 Episodio Clase de Primer Año Básico - Contar

El primer episodio corresponde a una clase de primer año básico donde se presenta a los estudiantes una tarea matemática de conteo. La interacción comienza con una tarea matemática presentada en la pizarra donde se muestra a un conejo en una recta numérica, posicionado en el número 5, y se presenta la instrucción “El conejo se encuentra en el número 5 y debe dar 5 saltos de 2 en 2 ¿A qué número

ACTIVIDAD

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

El conejo se encuentra en el número 5, y debe dar 5 saltos de 2 en 2. ¿A qué número llega?

RESPUESTAS ESPERADAS

-Cuentan 5 saltos de 2 en 2, respuesta esperada correcta = 15
-Cuentan 5 saltos de 1 en 1, respuesta esperada incorrecta = 10
-Cuentan 5 saltos de 2 en 2 pero incluyendo el punto de partida, respuesta esperada incorrecta= 13

llega?". Darlyn sale a la pizarra y con el plumón marca con una línea pasando cada dos números, dibujando desde el 5 al 7, del 7 al 9, del 9 al 12 y del 12 al 14; luego, se da cuenta que le falta un salto más del conejo, por lo que vuelve a la pizarra y dibuja una línea más desde el 14 al 16. Posteriormente, Carla (profesora) alienta la discusión al preguntar a los estudiantes si es que están de acuerdo con la respuesta dada por Darlyn, lo que genera el surgimiento de nuevas respuestas. Felipe plantea una refutación a la garantía presentada por Darlyn al indicar el error cometido por ella en su proceso de pensamiento, y cuando Carla le pide que pase adelante a explicar por qué no está de acuerdo con Darlyn, Felipe realiza el ejercicio en la pizarra, llegando a la conclusión 2.

Imagen 1. Tarea Matemática Contar

4.1.1 Análisis de la argumentación

En el episodio de esta clase se puede observar una interacción con características de argumentación según el modelo de Toulmin (1958), la cual se presenta en la fig. 1.

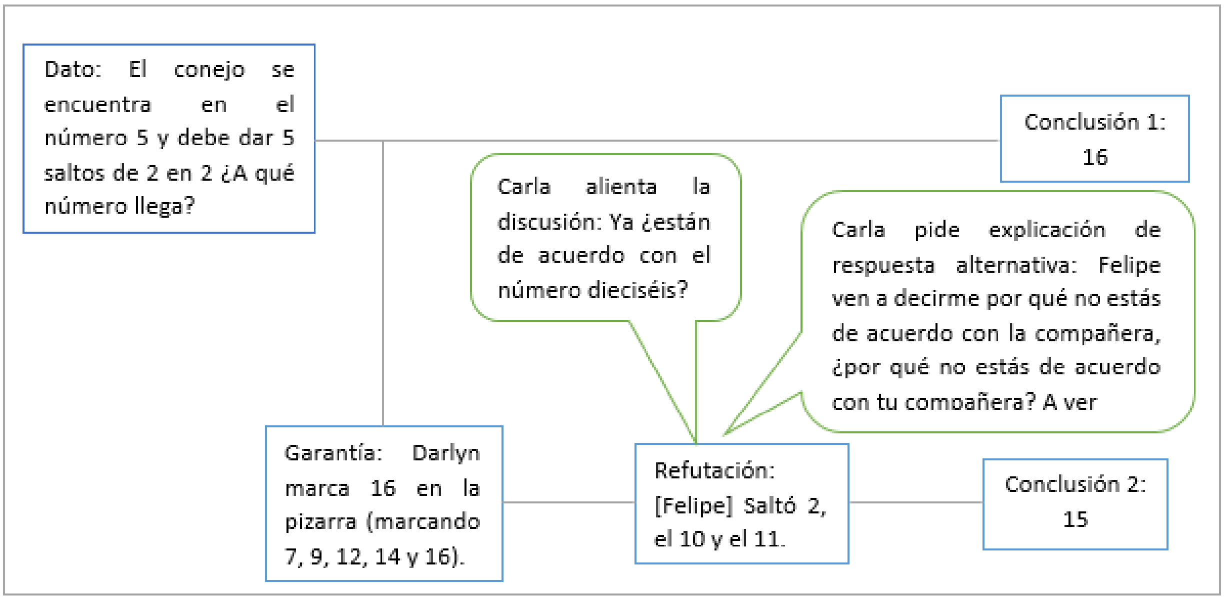


Fig. 1. Estructura argumentación Primer Año Básico

4.1.1.1 Aparición de posturas diferentes.

Durante el episodio de argumentación analizado surgen una serie de posturas diferentes, pero como garantía y refutación propiamente tal solo surgen dos, que aparecen reseñadas en la fig. 1. A continuación se presenta un fragmento de la transcripción del episodio, donde puede apreciarse el surgimiento de cada componente de la argumentación.

Carla: miren la Darlyn dijo que ella se había dado cuenta solita que había dado cuatro saltitos, pero tenía que dar cinco. Ya ¿están de acuerdo con el número dieciséis?

Alumnos: No

Otros: Sí

Alumno: yo llegué hasta el quince

Carla: ¿tú también llegaste hasta el número dieciséis?

Alumno: yo llegué al catorce

Carla: ¿tú también llegaste al número dieciséis?

Alumno: yo llegué al catorce tía

(…)

Carla: la compañera, Felipe mira para acá, ¿la compañera dio los cinco saltos?

Felipe: sí, pero yo llegué hasta el quince

(…)

Carla: tú llegaste al catorce, entonces, Felipe ven a decirme por qué no estás de acuerdo con la compañera, ¿por qué no estás de acuerdo con tu compañera? A ver

(Felipe sale a la pizarra y observa la resolución de Darlyn)

Carla: explícale, entonces si tú no estás de acuerdo ¿por qué?

(Felipe continúa observando la pizarra)

Carla: miren Felipe está analizando lo que hizo la Darlyn, Felipe ¿por qué no estás de acuerdo?

Felipe: saltó dos, saltó el 10 y el 11

Carla: a ver, miren lo que está diciendo Felipe. Mira Cristóbal lo que está diciendo Felipe, tú también llegaste a dieciséis.

Cristóbal: no

Carla: explícale, a ver

Felipe: se pasó estos dos

Carla: a ver, mira al compañero, mira lo que dice tu compañero. Explícale a ella a ver. Felipe explícale a la Darlyn ¿qué hizo ahí?

Felipe: se pasó dos números

Carla: mira ¿están de acuerdo con lo que dice Felipe que la Cristin… que la Darlyn se pasó dos números?

Cristóbal: no

Carla: a ver ¿cómo tendría que haberlo hecho? Felipe hácelo arriba, por aquí (le muestra que debe dibujar sobre la recta numérica, sin borrar la respuesta de Darlyn)

(Felipe toma el plumón y comienza a dibujar saltos de dos en dos, primero del 5 al 7, del 7 al 9, del 9 al 11, del 11 al 13 y del 13 al 15)

Carla: miren, (…) lo de verde es lo que hizo la Darlyn, y lo de azul es lo que hizo Felipe. Felipe llegó a un número diferente que Darlyn, llegó hasta el quince y la Darlyn llegó hasta el dieciséis. Llegó a un número más que Felipe, Felipe llegó a un número menos que la Darlyn, ¿Cuál de los dos estará correcto?

Alumna: el Felipe

Alumno: la Cristin

Carla: la Cristin no ha pasado ahora

Alumnos: la Darlyn

Carla: ¿la Darlyn estará correcta o Felipe?

Alumnos: Felipe

Alumnos: Darlyn

Como puede observarse, Felipe primero nota el error de Darlyn, lo explica al curso y luego establece una nueva conclusión que se configura como la respuesta correcta. Aunque en la clase aparece una diversidad de respuestas posibles, solo las dos conclusiones indicadas en el diagrama 1 son presentadas en la pizarra, por lo que las otras respuestas no son argumentadas por los estudiantes. De cierta manera, Carla limita a dos opciones de razonamiento las posibles respuestas para el problema presentado al curso.

4.1.2 Rol del profesor en la promoción de la argumentación

4.1.2.1 Oportunidades para la confrontación de ideas.

Carla, en su rol como profesora del curso, incentiva a que Darlyn y Felipe demuestren a sus pares el proceso mediante el cual llegaron a sus respuestas. Esta forma de mostrarlo implica hacer el movimiento en la recta numérica frente al curso, para que los demás estudiantes puedan observar qué puntos fue marcando cada uno. En ese sentido, Felipe primero indica el error de Darlyn y éste se postula como la refutación a su garantía. La acción de incentivar a que los alumnos demuestren su proceso a los demás se ve reflejado en la petición por parte de Carla de que los niños pasen a la pizarra a mostrar la forma en que resolvieron la tarea matemática, y expliquen su forma de hacerlo. Adicionalmente, esto se ve complementado por la pregunta explícita de Carla respecto a si están todos de acuerdo con la respuesta planteada por Darlyn, lo que se plantea como una forma de monitorear la existencia de varias soluciones entre los estudiantes, lo que permite la argumentación.

Adicionalmente a esto, al plantear la pregunta respecto a cuál será la respuesta correcta, Carla potencia que los estudiantes comparen ideas matemáticas en la medida en que se les pide comparar procesos de pensamiento asociados al problema realizado. Asimismo, Carla pide a los estudiantes que demuestren la forma en que resolvieron el problema, por medio de la realización del ejercicio en frente del curso y la explicación de ésta resolución. Finalmente, y asociado a la comparación de ideas matemáticas, la profesora hace preguntas asociadas a la evaluación de las respuestas y argumentos asociados a estas, para juzgar cuál es la respuesta correcta al problema.

4.1.2.2 Postura evaluativa de la profesora ante las respuestas de los estudiantes.

Un aspecto importante a destacar es que Carla no elabora juicios evaluativos de las respuestas planteadas por los estudiantes, sino que espera que ellos mismos reconozcan el proceso de pensamiento que permite una respuesta correcta. A partir de esto, puede considerarse que el modelo de cuestionamiento que se denota de las preguntas realizadas por la profesora corresponde a un modelo de tipo enfoque (National Council of Teachers of Mathematics, 2015), en la medida en que pone atención al proceso de razonamiento de los estudiantes, promoviendo la comunicación del proceso de razonamiento por medio del cual se llegó a la conclusión propuesta.

Por su parte, puede indicarse que Carla cumple con las tres funciones del rol del profesor señaladas por Staples y King (2017), en cuanto motiva a los estudiantes a que manifiesten las diversas conclusiones a las que pueden haber llegado, e invita a que tanto Darlyn como Felipe comuniquen los procesos de pensamiento que los llevaron a elaborar esas conclusiones. Asimismo, Carla apoya el intercambio de ideas entre los alumnos al monitorear la discusión que se genera en la sala, utilizando movimientos productivos para la conversación como sería incentivar la participación de los estudiantes una vez iniciada la discusión. Adicionalmente, la profesora cumple con la última función del rol docente en la argumentación al guiar el trabajo durante la discusión, pidiendo a los estudiantes que comparen los razonamientos y así resultados, de Darlyn y Felipe para juzgar cuál es el correcto.

4.1.2.3 Prácticas de la profesora dentro de la situación de argumentación

En esta situación, es posible verificar que se dan las cinco prácticas señaladas por Smith y Stein (2011), en cuanto la tarea matemática entregada a los estudiantes efectivamente es lo suficientemente desafiante como para contar con respuestas contrapuestas, por lo que Carla anticipa correctamente las respuestas de sus estudiantes. Asimismo, la profesora monitorea, selecciona y secuencia las respuestas de los estudiantes de forma que facilita el proceso de decisión de los estudiantes acerca de la respuesta correcta al problema presentado. Esto es posible de señalar en base a los momentos en que Carla destaca la respuesta de Darlyn y luego pide a Felipe que pase adelante a mostrar su resultado, el cual es diferente al que fue presentado por Darlyn; de esta manera, Carla busca entre las respuestas de los estudiantes a la tarea matemática, diversidad de respuestas, secuenciando las respuestas de modo que la respuesta correcta no sea la primera que aparece dentro de la discusión. Finalmente, los estudiantes conectan las diferentes respuestas presentadas, pudiendo decidir cuál es la correcta.

4.2 Episodio Clase de Cuarto Año Básico - Regularidades

La interacción comienza con la entrega por parte de la profesora (Mónica) de una tarea matemática a realizar en parejas. Esta tarea consiste en una división para cada dupla de estudiantes, donde falta el divisor y el cociente, y se les da la instrucción de que éstos deben ser el mismo número. Ante esto, surgen una serie de respuestas entre los estudiantes, agrupadas en torno a completar el problema con los números 1, 2 y 3.

4.2.1 Análisis de la argumentación

En el episodio de la clase de cuarto básico, se puede observar una interacción con características de argumentación. La estructura de ésta se presenta en la fig. 2.

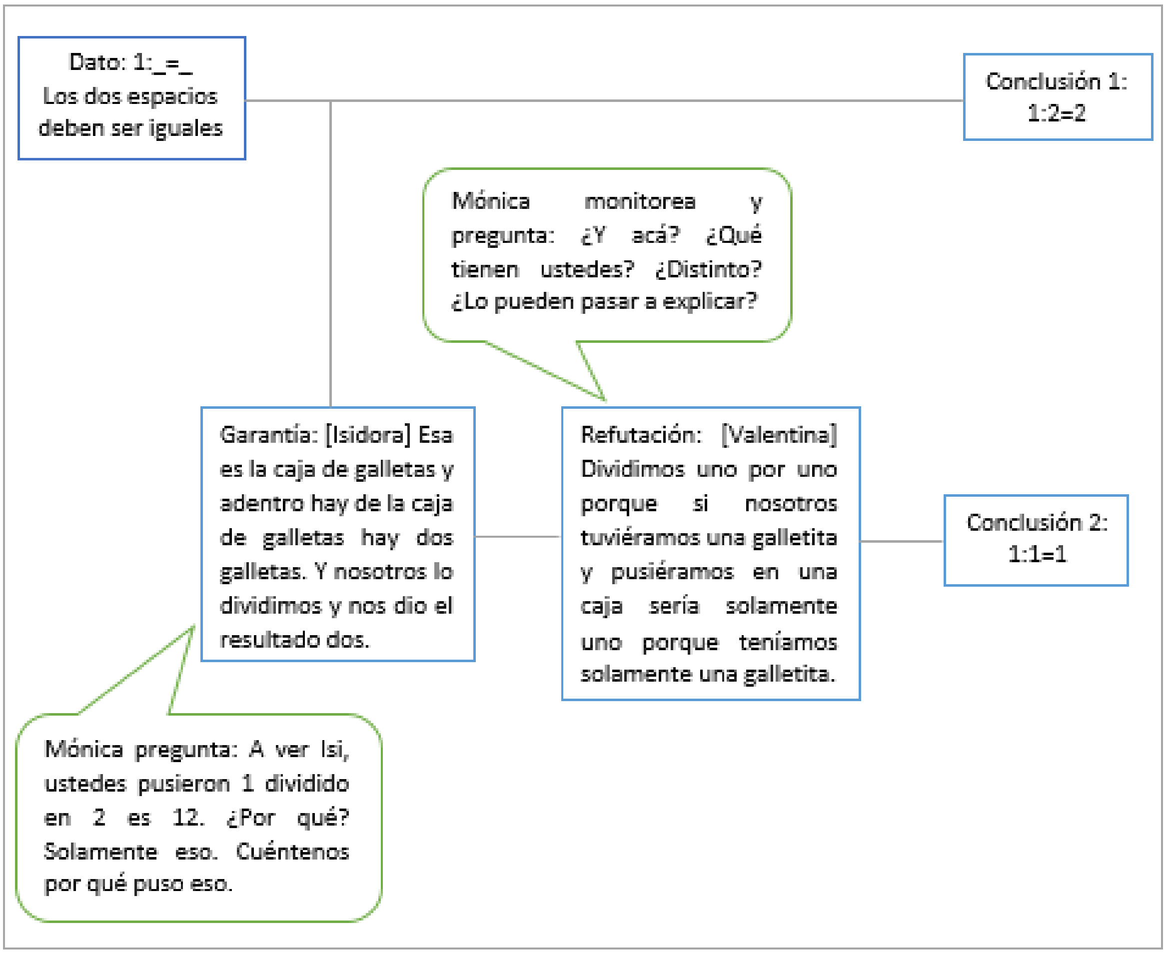


Fig. 2. Estructura argumentación Cuarto Año Básico

Como puede observarse en la fig. 2, la garantía es propuesta por Isidora, quien por medio de ésta llega a la conclusión 1, que es la conclusión errónea. Posteriormente, surge la refutación de Valentina que permite llegar a la conclusión 2, y corresponde a la respuesta correcta. Es importante considerar que la refutación de Valentina se sustenta en la misma metáfora realizada por Isidora, siguiendo el mismo modelo de razonamiento. Esto permite mantener el proceso de pensamiento planteado por Isidora y facilita la comprensión de la refutación indicada por Valentina.

4.2.1.1 Aparición de posturas diferentes.

Durante la interacción aparecen varias posturas diferentes, pero solo pueden considerarse como componentes de argumentación las que aparecen reseñadas en el diagrama 2 como garantía y refutación. A continuación se presenta un fragmento de la transcripción de la situación de argumentación.

Mónica: Ya, adelante, rápidamente, a la pizarra los dos. Escriben su división y los demás vamos a ir tomando atención y vamos a ver si estamos de acuerdo con ellos o no estamos de acuerdo (estudiante desarrolla la *división en la pizarra) ¿Está lista su división? Perfecto. Explíquelo, ¿qué ocurrió ahí? (…)*

Isidora: Esa es la caja de galletas y adentro hay de la caja de galletas hay dos galletas. Y nosotros lo dividimos y nos dio el resultado dos.

Mónica: ¿Quién tiene otro resultado?, a ver. Porque vi mucho resultados. A ver, Vanessa, ¿qué pusieron ustedes?

Vanessa: Que, uno dividido por dos es uno.

Mónica: Uno dividido por dos es uno. Distinto a lo que está ahí. Allá pusieron, uno dividido en dos es dos. ¿Qué ocurrió? ¿Cómo lo hicieron ustedes?

Vanessa: Es que, lo dividimos porque la división, cómo que también es parte de la suma y tuvimos que sumarle en realidad uno.

Mónica: Nada. ¿Y acá? ¿Qué tienen ustedes? (Responden estudiantes a la vez) ¿Distinto? ¿Lo pueden pasar a explicar?

Mónica: Distinto. ¿Por qué ustedes pusieron 1?

Valentina: Dividimos uno por uno porque si nosotros tuviéramos una galletita y pusiéramos en una caja sería solamente uno porque teníamos solamente una galletita.

Mónica: Ya, aquí, tiene que haber alguien que tenga la razón. Porque dijimos que era una regularidad, algo que se da siempre, y ahí tenemos muchas cosas. Ah, ya. ¿Qué cree usted?

Daniela: Que la Vale está correcta.

Mónica: ¿Qué?

Daniela: Que la Vale está correcta.

Mónica: Que la Vale está correcta. Usted estaba de acuerdo con otra persona. ¿Con quién estaba de acuerdo den antes?

Daniela: Con la Tiare.

Mónica: Con la Tiare y ahora, ¿Qué le hace cambiar de opinión?

Daniela: Porque uno es uno dividido en uno, y es uno solo uno sola vez.

Mónica: Uno dividido es uno. Es uno porque uno se divide una sola vez. ¿Eso era lo que usted estaba diciendo, o no? ¿Es lo mismo? Sí. Valentina, ¿Qué crees tú?

De esta forma, puede observarse que surge una postura asociada a la conclusión 1, presentada por Isidora, donde se indica que 1:2=2. Luego, surge la respuesta correcta como refutación de la primera conclusión, generando la conclusión 2: 1:1=1, planteada por Valentina.

Es interesante considerar que la refutación se hace en base a la misma metáfora utilizada por la estudiante que entrega la garantía. Por tanto, no solo se refuta la conclusión, sino que además la forma de razonamiento por medio de la que se llegó a ella. Esto potencia el cambio conceptual asociado a la conclusión errónea, puesto que toma el mismo razonamiento inicial y lo modifica para llegar a la respuesta correcta.

4.2.2 Rol del profesor en la promoción de la argumentación

4.2.2.1 Oportunidades para la confrontación de ideas.

Mónica incentiva a los estudiantes para que demuestren el proceso mediante el cual llegaron a sus respuestas, de modo que se potencie la argumentación efectiva de estas, más que la sola exposición. Esto se ve reflejado en dos acciones clave. En primer lugar, como aparece en las nubes de diálogo del diagrama 2, Mónica explícitamente pide a los estudiantes explicar a sus compañeros como obtuvieron la respuesta que indican, porqué obtuvieron ese resultado. En segundo lugar, monitorea las respuestas de los estudiantes, incentivando la aparición de respuestas diferentes a las que se han planteado previamente en el ejercicio; esto permite que estudiantes que sean menos dados a la participación en clases, pero tengan respuestas diferentes a las ya presentadas, puedan ser detectados por la profesora e incentivar su participación.

Mónica pide a los estudiantes que comparen ideas matemáticas, en cuanto les pregunta si es que la explicación planteada por alguno de los compañeros les hace cambiar de opinión, lo que obliga a que comparen procesos de razonamiento matemático asociados al problema. Asimismo, las preguntas realizadas por Mónica incluyen el pedir a los estudiantes que expliquen el método por medio del cual demostrar la forma en que resolvieron el problema, así como también pide elaboración por parte de los estudiantes, lo que refiere a que éstos elaboren una idea, explicando a sus pares lo que quieren decir. Finalmente, la profesora hace preguntas que piden evaluación por parte de los estudiantes acerca del acuerdo que tienen respecto a la idea presentada por sus pares.

Finalmente, debe considerarse que Mónica toma una postura asociada a escuchar la matemática de los estudiantes (Cox et al., 2017), en cuanto integra la voz de los estudiantes y sus argumentos, con la conceptualización de la división como operación matemática que cuenta con ciertas características y reglas. Al integrar ambas, la profesora hace sentido a la matemática de los estudiantes a la vez que la inserta en el marco del contenido específico a tratar en la clase.

4.2.2.2 Postura evaluativa de la profesora ante las respuestas de los estudiantes.

La profesora no elabora juicios evaluativos de las respuestas dadas por los estudiantes. Es decir, no señala si estas son correctas o incorrectas, sino que espera a que los estudiantes entre ellos, por medio del proceso argumentativo puedan juzgar cuál es la respuesta correcta. Esto potencia la autonomía de los estudiantes ante su aprendizaje, en cuanto ellos deben reflexionar frente al problema y elaborar un argumento que permita explicar la forma en que razonaron y llegaron al resultado final.

A partir de esto, puede considerarse que el modelo de cuestionamiento que muestran las preguntas planteadas por Mónica corresponde a un modelo de cuestionamiento tipo enfoque (National Council of Teachers of Mathematics, 2015), en cuanto pone atención al proceso de razonamiento de los estudiantes, e incentiva el que éstos comuniquen sus ideas. Adicionalmente, puede considerarse que la profesora cumple con las tres funciones del rol del profesor propuestas por Staples y King (2017) en la medida en que incentiva el pensamiento de los estudiantes al invitarles a compartir sus ideas con el resto del curso, y apoya la clara comunicación de éstas. Asimismo, utiliza movimientos productivos para la conversación como forma de apoyar el intercambio de ideas entre los estudiantes, tales como: incentivar la participación de los estudiantes una vez iniciada la discusión, repetir lo que dicen los estudiantes en sus argumentos y pedir mayor aclaración de sus procesos. Junto a esto, Mónica cumple con la última función del rol docente en la argumentación al guiar el trabajo durante la discusión, insistiendo en que los estudiantes señalen sus razonamientos matemáticos y argumentos -en lugar de solo explicarlos-, toma el error como una oportunidad para reconceptualizar el problema y explorar contradicciones de los estudiantes, pudiendo así identificar errores conceptuales profundos y, pide a los estudiantes que comparen los razonamientos presentados al preguntarles si han cambiado de opinión.

Mónica guía la discusión en la medida en que monitorea la diversidad de respuestas obtenidas por los estudiantes, incentiva que los estudiantes justifiquen sus respuestas, pero no comenta las respuestas o argumentos de éstos. Adicionalmente, la profesora pregunta a los estudiantes que plantean posturas diferentes a la de la refutación si es que luego de escuchar ésta han cambiado de opinión acerca de su propia conclusión. De esta manera, la profesora da espacio para que los mismos estudiantes puedan reflexionar acerca de su proceso de razonamiento y juzgar cuál es la respuesta correcta.

4.2.2.3 Prácticas de la profesora dentro de la situación de argumentación

En la argumentación presentada en este video también es posible detectar las cinco prácticas planteadas por Smith y Stein (2011). Mónica anticipa las respuestas de los estudiantes por medio de una tarea matemática con suficiente complejidad como para que surjan diferentes respuestas, pero que aún sea posible de realizar por parte de los estudiantes. Al igual que en el caso de Carla, monitorea, selecciona y secuencia las respuestas de los estudiantes, dando espacio a una situación de argumentación con diferentes posturas, donde cada alumno pueda explicar su razonamiento. El monitoreo de las respuestas que realiza Mónica se vuelve explícito cuando solicita que más estudiantes den su respuesta, indicando que ella “vio muchos resultados”. En este caso, la selección de respuestas se da por parte de la participación de cada estudiante, posibilitada por Mónica quien incentiva el que más estudiantes participen hasta llegar a quienes tienen la respuesta correcta. La conexión entre las respuestas dadas anteriormente es facilitada por Valentina, quien al tomar la metáfora de Isidora para explicar su propio razonamiento, conecta ambas respuestas y da paso a la refutación de su compañera.

5. Discusión

La argumentación como herramienta de enseñanza-aprendizaje es utilizada en diversas asignaturas, debido a que permite no solo el aprendizaje de contenidos, sino que también el desarrollo de habilidades de discusión (Chowning, Griswold, Kovarik & Collins, 2012). En el caso de la clase de matemática, puede ser más complejo de visualizar el desarrollo de la argumentación, pero no por ello menos valioso.

La argumentación en la clase de matemática permite a los docentes develar errores profundos en el patrón de pensamiento de sus estudiantes, los cuales muchas veces pueden pasarse por alto al realizar tanto actividades como evaluaciones más tradicionales. En ese sentido, el uso de la argumentación como forma de monitorear el aprendizaje de los estudiantes, no solo permite una visión más amplia de la comprensión del contenido por parte de los estudiantes, sino que además permite aumentar la flexibilidad de los docentes ante la diversidad dentro del aula (Solar, 2018). Esto puede ejemplificarse por medio del análisis realizado a la argumentación de cuarto año básico acerca de regularidades. Un proceso argumentativo en que se pide a los estudiantes explicar su proceso de razonamiento que dio lugar a cierta respuesta, permite a la profesora dilucidar la comprensión que tienen sus estudiantes respecto a la división como operación matemática. Asimismo, en este caso el que los estudiantes elaboren una refutación que se sustenta en la misma metáfora por medio de la cual se explicó el razonamiento de la garantía, permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes. Se continúa hablando en el mismo idioma, y desde ahí es posible elaborar una explicación alternativa, y eventualmente correcta. En base a esto, es importante destacar que el análisis de los episodios de clase en este artículo plantea la relevancia que tiene la refutación como acción fundamental para el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el contexto de la argumentación en la clase de matemática. La refutación da espacio a la verdadera discusión acerca del problema presentado, y cuando ésta se da dentro de la misma metáfora explicativa, puede facilitar la comprensión del contenido así como del patrón de pensamiento utilizado por los estudiantes.

En línea con esto, es necesario abordar la relevancia de las respuestas incorrectas dentro de la dinámica de argumentación. En un contexto no argumentativo, las respuestas incorrectas solo se indican como incorrectas y se da la respuesta correcta, incluyendo una explicación de parte de la profesora respecto a porqué esa respuesta es correcta; esto plantea un estudiante pasivo, que recibe contenidos y simplemente por escucharlos y modificar la respuesta de un problema no solo entiende, sino que también aprende el contenido. La argumentación como práctica valida la visión de un estudiante activo frente al conocimiento, que es capaz de apropiarse del contenido, a la vez que también requiere de esta apropiación para un aprendizaje efectivo. Un estudiante capaz de verbalizar su razonamiento y explicarlo a sus pares, podría ser más capaz de detectar errores en éste, y así modificarlo para pensar en su error. De esta manera, la argumentación en su punto culmine permite a los estudiantes el realizar conexiones no solo en sus propios patrones de pensamiento, sino que también con el razonamiento de sus pares (Smith & Stein, 2011), formando verdades comunidades de aprendizaje en el aula. En este punto, toma relevancia el manejo que tiene el docente de la argumentación como práctica de enseñanza, así como su rol dentro de esta práctica.

Las profesoras en ambas interacciones de argumentación no estigmatizan la respuesta incorrecta -el error-, sino que permiten que éste sea una respuesta igualmente válida que las demás, dando espacio a sus alumnos para que descarten las respuestas erróneas por sí mismos. Esta forma de manejar el error puede dar mayores espacios para que los estudiantes alcen la voz y planteen sus respuestas, sin temor a ser avergonzados por sus pares, sino que se plantean como insumos necesarios dentro del proceso grupal para llegar a la respuesta correcta. En ese sentido, es el grupo curso el que trabaja por conseguir una respuesta correcta, más que el estudiante en aislamiento quien resuelve cada problema. De esta manera, las docentes escuchan la matemática de los estudiantes, más que ellas posicionarse como quienes cuentan con el conocimiento que es entregado a un grupo de estudiantes pasivos (Cox et al., 2017). Como se puede observar en las interacciones de las dos profesoras analizadas en este trabajo, ambas toman un rol que oscila entre lo protagónico y lo secundario según se necesite. Las profesoras potencian la aparición de diversidad de respuestas que permitan la argumentación, proveyendo de refutaciones para la primera respuesta sindicada; asimismo, instan a los estudiantes a explicar sus procesos de razonamiento, para que sus pares entiendan la forma en la que obtuvieron sus resultados. En ese momento, ellas toman roles secundarios y escuchan a los estudiantes, sin señalar errores en la respuesta o en el razonamiento, dando espacio para que los estudiantes de forma independiente puedan apropiarse del contenido y evaluar el proceso de razonamiento más apropiado para el problema específico que están abordando.

Dentro de este juego de posturas de las profesoras, se destacan además las oportunidades de participación que entregan a los estudiantes, potenciando la argumentación de varios estudiantes, y presentando la mayor cantidad de alternativas de respuesta posibles en el aula. Adicionalmente, ambas profesoras guían la interacción desde un modelo de tipo enfoque (National Council of Teachers of Mathematics, 2015), en que se atiende al proceso de pensamiento de los estudiantes, y se posicionan desde una postura en que pueden haber múltiples formas de llegar a una respuesta. Este modelo implica para el docente tomar un rol más secundario para dirigir la clase, pero no por ello menos complejo. Como señalan Smith y Stein (2011), la argumentación requiere de prácticas que debe realizar el docente, de modo que pueda darse en el aula una interacción dialógica entre estudiantes y docente (Solar, 2018). De esta manera, el docente tiene que anticipar, monitorear, seleccionar, secuenciar y conectar las respuestas de los diferentes estudiantes, para poder convertir la actividad en una dinámica de aprendizaje para todos los estudiantes, y no en solo una actividad que salga de las prácticas de enseñanza más tradicionales.

Estas acciones que debe realizar el docente son las que posibilitan una argumentación efectiva entre los estudiantes, resaltando los pasos que deben cumplirse para elaborar un argumento y hacerlo comprensible para sus pares. En ese sentido, el rol del docente es mantener la estructura de la argumentación, cuidando el que las prácticas planteadas por Smith y Stein (2011) vayan facilitando el proceso de los estudiantes. El profesor se posiciona como un facilitador del aprendizaje de los estudiantes más que como quien se encarga de forma completa y absoluta de éste, tomando un rol activo pero no protagónico en el proceso. De esta manera, deja los espacios necesarios para que los estudiantes hagan propio el contenido de la tarea matemática y puedan involucrarse en la interacción de argumentación. El que ambas profesoras den oportunidades para la confrontación de ideas es lo que en primer lugar abre espacios para que los estudiantes tomen un rol más protagónico y se hagan cargo de sus propios procesos de razonamiento, mientras las profesoras monitorean las características de la interacción. Asimismo, la falta de juicios evaluativos potencia la participación de los estudiantes y una mayor independencia ante el conocimiento: los estudiantes evalúan las respuestas en base a su conocimiento y razonamiento, no reciben una respuesta de forma pasiva desde sus profesoras. Finalmente, se puede observar que las profesoras integran las cinco prácticas de Smith y Stein (2011) en las actividades realizadas en aula, facilitando el desarrollo de la argumentación.

A partir de esto, puede considerarse que el rol del docente en la práctica de la argumentación matemática en aula refiere en términos generales a la gestión de la argumentación, posibilitando espacios, presentando desafíos y secuenciado respuestas, más que un rol activo de poseedor del conocimiento que trabaja con estudiantes pasivos que lo reciben. En términos específicos, el rol del docente refiere a lo ya presentado: promover la confrontación de ideas entre sus estudiantes, evitar realizar juicios evaluativos a las respuestas planteadas por los alumnos, presentar desafíos matemáticos con la complejidad precisa para que los estudiantes deban trabajar en ellos, pero no tanto como para que no les sea posible resolverlos; monitorear el trabajo de sus estudiantes, de modo de asistirlos cuando sea necesario, pero también para poder organizar apropiadamente la situación de argumentación; seleccionar las respuestas que serán presentadas al grupo curso, así como a los estudiantes que lo harán, de modo de presentar un espectro amplio que permita la argumentación; secuenciar las respuestas presentadas, para que la respuesta correcta no sea la primera en presentarse, sino que se presente dentro del grupo y así los estudiantes puedan por si mismos evaluar su validez; y conectar las respuestas con ideas y conceptos matemáticos, pudiendo llevar la argumentación a la adquisición de contenidos.

Frente a esto, es fundamental formar a los docentes para que cuenten con las herramientas y habilidades necesarias para desarrollar este tipo de prácticas en sus aulas. Debe enseñarse a los profesores a potenciar la argumentación en sus salas de clases, en cuanto ésta permite tanto el desarrollo de las habilidades lingüísticas, expresivas y sociales de sus estudiantes (Bickmore & Parker, 2014), a la vez que permite un mayor acercamiento a los procesos matemáticos y su razonamiento (Solar, 2018). A partir de esto, se puede lograr un aprendizaje más profundo de la matemática, en lugar de un aprendizaje mecánico basado en la memorización de operaciones y fórmulas. Adicionalmente, el uso de la argumentación en el aula de matemáticas también pone en manifiesto la necesidad de que los docentes se sientan cómodos con estructuras en las que ellos toman roles más secundarios, donde hay múltiples aspectos de la clase que deben ser manejados, pero hay más espacio para la diversidad de respuestas y lo no planificado (Smith & Stein, 2011). Es en este aspecto donde la percepción de los estudiantes hacia el conocimiento matemático podría cambiar y así modificarse su relación con la matemática. La argumentación da espacio para que el contenido no sea algo fijo y ajeno, sino que se vuelva algo maleable, donde aunque haya una sola respuesta correcta, ésta pueda ser dialogada entre todos, tomando el contenido y haciéndolo propio.

La promoción de la argumentación es una práctica posible de utilizarse en cualquier nivel de escolarización, incluso en los primeros años, posibilitando una visión de la matemática como un área del conocimiento más accesible para los estudiantes, de la cual ellos también pueden participar. A partir de esto, debe considerarse que aunque la argumentación en la clase de matemática requiere de trabajo por parte de los docentes, así como formación en esta práctica, las ganancias asociadas a la experiencia de aprendizaje y comprensión del contenido por parte de los estudiantes la vuelven muy valiosa y necesaria dentro del aula.

Referencias

Bickmore, K. (2014). *Peacebuilding dialogue pedagogies in Canadian classrooms. Curriculum Inquiry,* 44(4), 553–582. http://doi.org/10.1111/curi.12056

Bickmore, K., & Parker, C. (2014). *Constructive Conflict Talk in Classrooms: Divergent Approaches to Addressing Divergent Perspectives*. *Theory & Research in Social Education,* 42(3), 291–335. http://doi.org/10.1080/00933104.2014.901199

Chowning, J. T., Griswold, J. C., Kovarik, D. N., & Collins, L. J. (2012). *Fostering critical thinking, reasoning, and argumentation skills through bioethics education*. *PLoS ONE,* 7(5), 1–8. http://doi.org/10.1371/journal.pone.0036791

Conner, A.M., Singletary, L., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T. (2014). *Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities*. *Educational Studies in Mathematics,* 86(3), 401-429.

Cox, D. C., Meicenheimer, J. & Hickey, D. (2017). *Eliciting and Using Evidence of Student Thinking Giving Students Voice*. En Spangler, D. A. & Wanko, J. J. (Eds.) *Enhancing Classroom Practice* (pp. 89-97). National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Geboers, E., Geijsel, F., Admiraal, W. & Ten Dam, G. (2015). *Citizenship orientations and knowledge in primary and secondary education. Social Psychology of Education,* 18 (4), 749-767.

Krummheuer, G. (2015). *Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction*. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 51-74). Springer. Dordrecht.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom.* Harvard University Press. Cambridge, MA.

Mercer, N. & Dawes, L. (2008). *The value of exploratory talk.* En Mercer, N. & Hodgkinson, S. (Eds.) *Exploring talk in school* (pp. 55-71). Sage. Londres y Los Angeles.

Ministerio de Educación. (2013). *Bases Curriculares Educación Básica*. Gobierno de Chile.

National Council of Teachers of Mathematics (2015). *De los principios a la acción.* NCTM. Reston, VA.

Pimm, D. (1994). *Spoken mathematical classroom culture: Artifice and artificiality*. En Lerman, S. (Eds.) *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (pp. 133-147). Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Reisman, A. (2015). *Entering the Historical Problem Space: Whole-Class Text-Based Discussion in History Class*. *Teachers College Record,* 117(2), 1-44.

Schuitema, J., Veugelers, W., Rijlaarsdam, G., & ten Dam, G. (2009). *Two instructional designs for dialogic citizenship education: an effect study. The British Journal of Educational Psychology*, 79(Pt 3), 439–461. http://doi.org/10.1348/978185408X393852

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Solar, H. (2018). *Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. Revista Colombiana de Educación*, (74), 155-176.

Solar, H. & Deulofeu, J. (2016). *Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas*. *Bolema,* 30(56), 1092-1112. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Solar, H., Ortiz, A. & Ulloa, R. (2016). *MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia*. *Estudios Pedagógicos,* 42(4), 281-298. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016

Staples, M. & King, S. (2017*). Eliciting, Supporting, and Guiding the Math: Three Key Functions of the Teacher's Role in Facilitating Meaningful Mathematical Discourse.* En Spangler, D. A. & Wanko, J. J. (Eds.) *Enhancing Classroom Practice* (pp. 37-48)*.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge University Press. Cambridge.

Voigt, J. (1995). *Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms.* En Cobb, P. & Banersfeld, H. (Eds.) *The emergence of mathematical meaning* (pp. 163-201). Lawrence Erlbaum Associates. Hillside, NJ.

Wood, T. (1998). *Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing?*. En Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G. & Sierpinska, A. (Eds.) *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

AUTORES

Camila Rasse: Psicóloga y Magíster en Psicología de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Dra. (c) en Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus temas de interés incluyen competencias ciudadanas, aprendizaje socioemocional, educación técnico-profesional, y el uso de metodología cualitativa en investigación en educación.

Correo: cmrasse@uc.cl. Dirección: Vicuña Mackenna 4860, Macul. Santiago de Chile. Facultad de Educación, Programa de Doctorado, Campus San Joaquín. CP: 782-0436. Teléfono: +56223545311.

Publicaciones (últimos 5 años)

Henríquez, R. & Rasse, C. (2018). Desafíos de la Formación Ciudadana para su Enseñanza y Aprendizaje. En Sánchez, I. (Eds.) *Ideas en Educación II. Definiciones en Tiempos de Cambio.* Santiago: Ediciones UC, pp. 711-735.

Rasse, C. & Berger, C. (2017). Creencias de padres y profesores acerca de la agresión entre estudiantes en el ambiente escolar. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 55* (1), 1-11.

Berger, C., Cuadros, O., Rasse, C. & Rojas, N. (2016). Diseño y Validación de la Escala de Creencias Normativas Sobre la Prosocialidad en Adolescentes Chilenos. *Psykhe (Santiago)*, 25 (1), 1-17.

Horacio Solar: Doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona. Profesor de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Profesor Asistente de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación incluyen la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas y el desarrollo profesional docente de matemáticas.

Correo: hsolar@uc.cl. Dirección: Vicuña Mackenna 4860, Macul. Santiago de Chile. Facultad de Educación, Campus San Joaquín. CP: 782-0436, Teléfono: +56223545383

Publicaciones (últimos 5 años)

Solar Bezmalinovic, H. & Deulofeu Piquet, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092-1112.

Solar, H., Ortiz, A. & Ulloa, R. (2016). MED: In-service instructional model for mathematics teachers based on experience [MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia]. *Estudios Pedagogicos*, *42*(4), 281-298.

Ulloa, R. & Solar, H. (2017). Observando el aula de formación inicial: desarrollando conocimiento matemático para la enseñanza en dos casos de formación de profesores de educación básica. *Estudios Pedagógicos*, *XLIII*(2), 333-354.

Dockendorff, M. & Solar, H. (2018). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. International. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 49*(1), 66-84.

Solar Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana De Educación* (74), 155-176.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 88-99

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Re-Significación de la Representación Matemática en Niños de Grado Tercero de Primaria en una Institución Educativa Pública de Santiago De Cali (Colombia)

León Blass Panesso Cruz, Jhon Gregory Belalcazar Valencia

Fecha de recepción: 05/04/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen	En este artículo se busca analizar la re-significación de la representación matemática en niños de grado tercero de primaria en una institución educativa pública de Santiago de Cali. Por lo tanto, se exploró inicialmente el significado que tenían los estudiantes sobre qué son las matemáticas y se registró la información. A continuación, se implementó una tarea matemática basada en una comprensión lectora (poema), la cual es diferente de las actividades tradicionales utilizadas en el salón de clase y nuevamente surgió la pregunta sobre qué son las matemáticas. Finalmente, se indagó sobre qué les pareció la actividad en su totalidad, se recolectó la información y se organizó en una base de datos para su posterior interpretación. El análisis del material recolectado se realizó utilizando el método de análisis de contenido de Bardin (2002), pero se implementaron modificaciones, las cuales fueron propuestas por el investigador. **Palabras clave**: representación, matemáticas, re-significación, análisis de contenido.
Abstract	This article seeks to analyze the re-signification of mathematical representation in children of third grade of primary school in a public educational institution of Santiago de Cali. Therefore, the meaning that students had of what mathematics is and the information was recorded was initially explored. Next, a mathematical task based on a reading comprehension (poem) was implemented, which is different from the traditional activities used in the classroom and again the question arose about what mathematics is. Finally, they inquired about what they thought of the activity in its entirety, the information was collected and organized in a database for its subsequent interpretation. The analysis of the collected material was done using the content analysis method of Bardin (2002), but modifications were implemented, which were proposed by the researcher. **Keywords**: representation, mathematics, re-signification, content analysis.
Resumo	Neste artigo procuramos analisar a ressignificação da representação matemática em crianças de terceiro ano do ensino fundamental de uma instituição pública de ensino de Santiago de Cali. Para isso se explorou

	inicialmente o significado que os alunos tinham sobre o que é a matemática e se registrou a informação. Em seguida, se implementou uma tarefa matemática baseada em uma compreensão leitora (poema), a qual é diferente das atividades tradicionais usadas em sala de aula e novamente surgiu a pergunta o que é a matemática. Por fim, indagou-se sobre o que acharam da atividade em sua totalidade, as informações foram coletadas e organizadas em um banco de dados para sua posterior interpretação. A análise do material coletado foi realizada pelo método de análise de conteúdo de Bardin (2002), mas foram implementadas modificações propostas pelo pesquisador. **Palavras-chave:** representação, matemática, ressignificação, análise de conteúdo.

1. Introducción

Los niños desde una edad temprana interactúan con el mundo de los números y desarrollan un significado sobre la representación matemática a partir de sus experiencias. Por lo general, el contacto que establecen los sujetos al inicio de sus vidas con las matemáticas se encuentra mediado por la familia y la escuela. Dicha relación, por ejemplo, en los centros de enseñanza durante la niñez edifica el significado de la representación matemática y configura la forma en que el niño asumirá las matemáticas durante su proceso educativo. Frecuentemente, las actividades propuestas en las instituciones educativas para estimular el acercamiento de los niños al mundo de las matemáticas son diseñadas sobre la base de aprender un algoritmo, desconociendo otro tipo de comunicación aritmética.

Ahora bien, reforzar constantemente un algoritmo para memorizar las estructuras aritméticas desarrolla un significado que abandona por completo otro tipo de formas de relacionarse con los números. En consecuencia, el estudiante define la matemática como una estructura algorítmica (suma, resta, multiplicación, fracción, etc.), puesto que en su cotidianidad se encuentra expuesto a este tipo de estímulos. Sin embargo, este artículo evidencia cómo un significado sobre la representación matemática establecido puede modificarse implementado una actividad basada en una comprensión lectora (poesía), la cual difiere de tareas tradicionales solo enfocadas al aprendizaje de una estructura algorítmica.

Así mismo, para poder rastrear el significado inicial sobre la representación matemática y su posterior re-significación, es importante establecer a que nos referimos con representación en el presente artículo. Existe la posibilidad de abordarla desde una perspectiva del desarrollo propuesta por Josef Perner (1994), el cual la define como una imagen mental que evoca eventos y existen niveles representacionales según la edad del sujeto. Por otro lado, está la posibilidad de la vertiente del aprendizaje fundamentada por Karmiloff-Smith (1994), donde la representación es definida como una unidad básica de conocimiento contenida dentro de un dominio y es la concepción que se desarrollará en este artículo.

Finalmente, para lograr rastrear el significado y la re-significación de la representación matemática se utilizó el método microgenético. Según Siegler (como se citó en Sánchez, Cerchiaro y Guevara, 2013) el método microgenético permite describir el cambio cognoscitivo a través de secuencias progresivas de observaciones que revelan los indicios de los mecanismos que subyacen al mismo. Así mismo, facilita las observaciones de los niños durante el período de cambio, visualizando los aspectos cualitativos y cuantitativos de la variación. Igualmente, se utilizó la técnica de análisis de contenido, puesto que posibilita la caracterización de la representación matemática de los sujetos durante el estudio.

2. Método

Identificar las unidades de registro y comprender su dinámica dentro del material proporcionado a los estudiantes es fundamental para este estudio. Por tal razón, se seleccionó la técnica de análisis de contenido propuesta por Bardin (2002), la cual facilita la identificación de las unidades de registro y las transforma en frecuencias. Sin embargo, la técnica no posibilita rastrear la dinámica de los datos dentro del estudio, puesto que se limita a caracterizar la frecuencia sin analizar el movimiento de las palabras.

Ahora bien, se comprende la dinámica según Newton (1687) como el análisis matemático del movimiento de los objetos y sus causas. En consecuencia, se realizó la conversión de las unidades de registro en un dato binario, permitiendo visualizar todo el texto como un conjunto de elementos numéricos que facilitó rastrear la intensidad, la densidad y el movimiento de la palabra. Es decir, el texto se transformó en lenguaje binario donde cada palabra corresponde a un byte de información, facilitando la visualización de la intensidad en la unidad seleccionada dentro del documento y contribuyó al rastreo del movimiento de la palabra al inicio como al final del producto elaborado por los estudiantes. La gráfica #1, ejemplifica la conversión de una de las unidades de registro seleccionadas en el estudio a sistema binario, donde la intensidad más fuerte se representa por medio del número 1 y la disminución de la actividad de la unidad con el número 0.

CONVERSIÓN A SISTEMA BINARIO

Sistema numérico que se caracteriza por emplear solamente dos dígitos (0 y 1). El número cero indica apagado o inhibido, y el número 1 indica encendido o energizado.

Unidad de registro: “aprender” (Byte)

Ocho Bits por letra: “a”

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
0	1	1	0	0	0	0	1

Letra “a”: 01100001

Nota: Se realiza el mismo procedimiento con cada una de las letras.

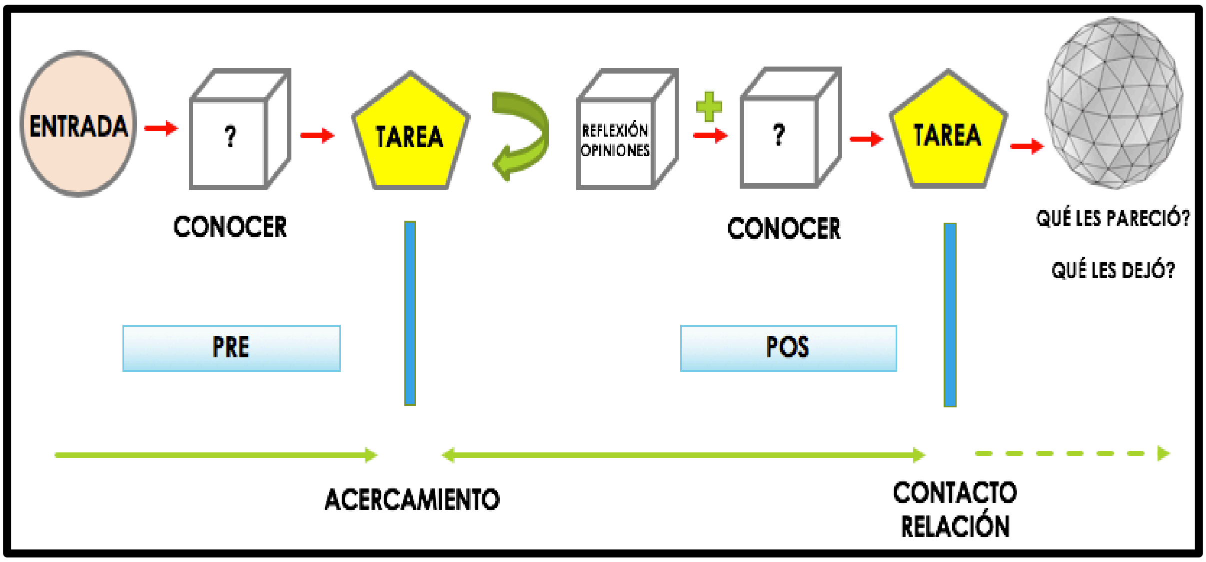
<u>INTERSECCIÓN CONTENIDO PRE - TAREA</u>

aprender
01100001 01110000 01110010 01100101 01101110 01100100 01100101 01110010 **=** **0** **34**
1 **30**

Gráfica 1. Conversión a sistema binario. Fuente: Elaboración propia.

2.1. Método microgénetico

Revela varias dimensiones o características del cambio: trayectoria (secuencia de conductas o conocimientos que se ponen de manifiesto a lo largo de los ensayos o pruebas), ritmo (velocidad con que ocurre el cambio), amplitud (generalización a otros conceptos o habilidades relacionados), fuentes del cambio (causas) y variabilidad (diferencias individuales en relación con las tres dimensiones anteriores) (Flynn & Siegler, 2007). La gráfica #2 visualiza el diseño del estudio, el cual se desarrolla en dos etapas (Pre-Pos). La etapa Pre inicia con la pegunta a los estudiantes sobre ¿qué son las matemáticas?, las respuestas son consignadas en hojas de trabajo. Después de conocer el significado que tienen de las matemáticas los sujetos (suma, resta, multiplicación, etc.) se entrega la actividad matemática basada en una poesía. Esta actividad matemática genera inquietud en los estudiantes, puesto que no es una actividad matemática tradicional. La etapa Pos, se inicia con el intercambio de opiniones entre los estudiantes sobre la actividad de la poesía y se plantea nuevamente el interrogante sobre ¿qué son las matemáticas?, se procede a consignar las respuestas en las hojas de trabajo, donde se evidencia claramente los nuevos significados elaborados por los sujetos sobre las matemáticas. Los sujetos finalizan la actividad matemática "poesía" y se registran las impresiones que tuvieron de todo el proceso (¿qué les pareció?, ¿qué les dejó?).



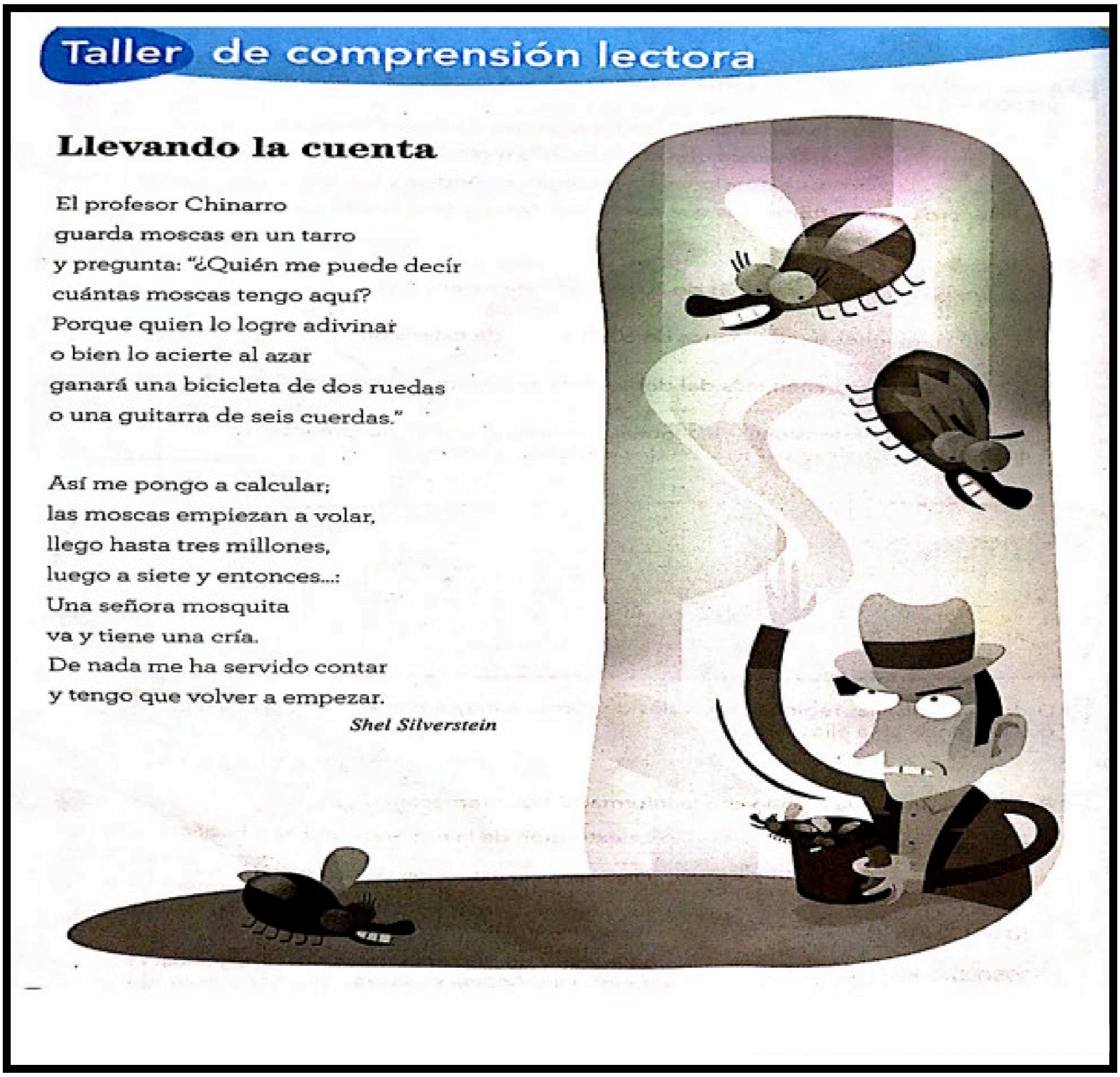
Gráfica 2. Diseño del estudio. Fuente: Elaboración propia.

2.2. Participantes

Cinco niños entre 9 y 11 años (Hombres = 1 y Mujeres = 4) fueron seleccionados entre 20 estudiantes. Los niños pertenecen a la Institución Educativa Técnica de Comercio Simón Rodríguez, Sede María Panesso de grado tercero de primaria ubicada en Santiago de Cali (Colombia). Los criterios para la selección de los sujetos de estudio fueron: no presentar antecedentes neurológicos, ni antecedentes de problemas de aprendizaje y su promedio académico debía ser satisfactorio.

2.3. Material y productos

A continuación, se presenta el material utilizado durante el estudio.



Taller de comprensión lectora

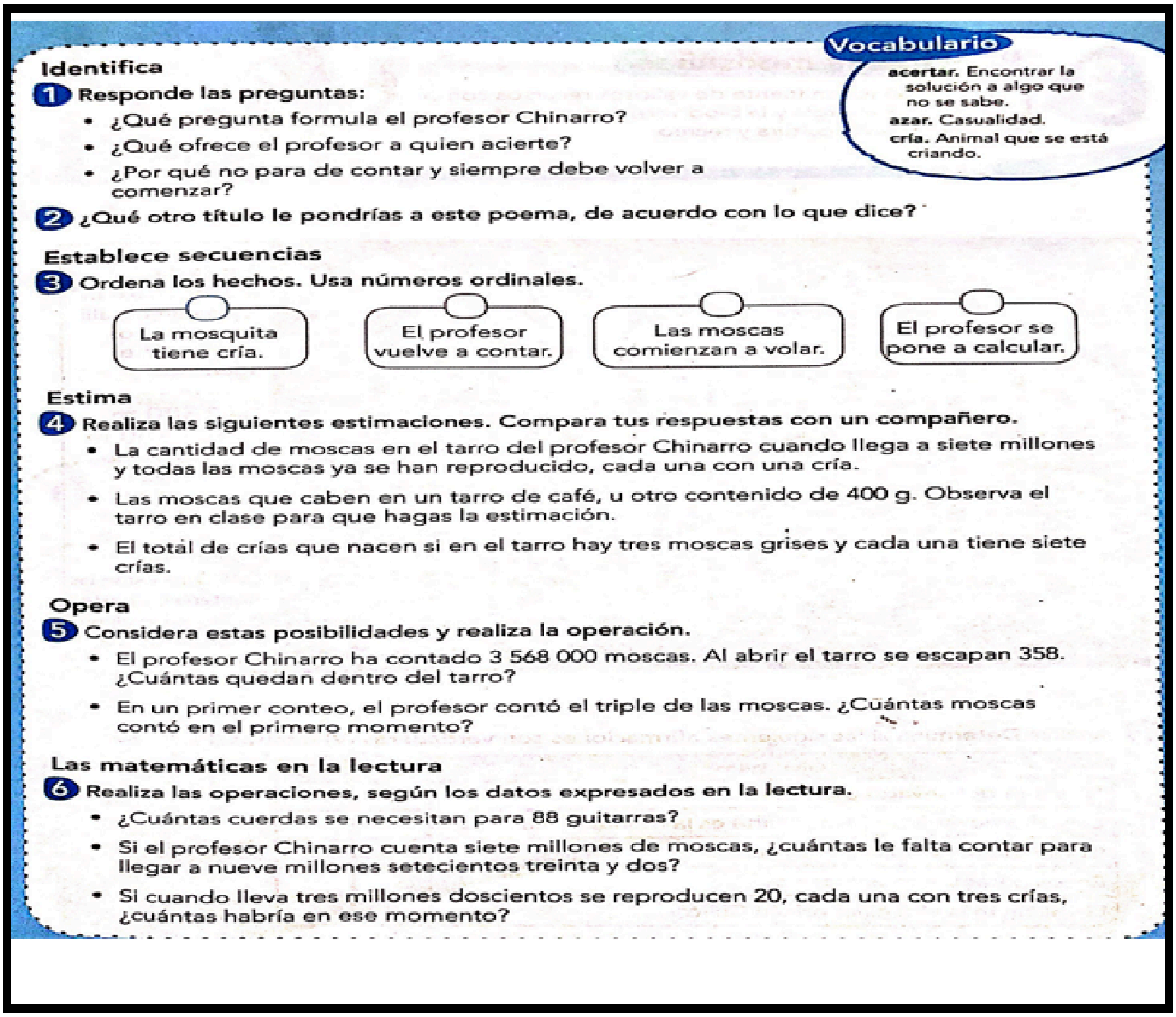
Llevando la cuenta

El profesor Chinarro
guarda moscas en un tarro
y pregunta: "¿Quién me puede decír
cuántas moscas tengo aquí?
Porque quien lo logre adivinar
o bien lo acierte al azar
ganará una bicicleta de dos ruedas
o una guitarra de seis cuerdas."

Así me pongo a calcular;
las moscas empiezan a volar,
llego hasta tres millones,
luego a siete y entonces...:
Una señora mosquita
va y tiene una cría.
De nada me ha servido contar
y tengo que volver a empezar.

Shel Silverstein

Gráfica 3. Actividad matemática basada en una poesía. Fuente: Proyecto SE grado 4º



Identifica

1 Responde las preguntas:

- ¿Qué pregunta formula el profesor Chinarro?
- ¿Qué ofrece el profesor a quien acierte?
- ¿Por qué no para de contar y siempre debe volver a comenzar?

2 ¿Qué otro título le pondrías a este poema, de acuerdo con lo que dice?

Vocabulario

acertar. Encontrar la solución a algo que no se sabe.
azar. Casualidad.
cría. Animal que se está criando.

Establece secuencias

3 Ordena los hechos. Usa números ordinales.

La mosquita tiene cría. | El profesor vuelve a contar. | Las moscas comienzan a volar. | El profesor se pone a calcular.

Estima

4 Realiza las siguientes estimaciones. Compara tus respuestas con un compañero.

- La cantidad de moscas en el tarro del profesor Chinarro cuando llega a siete millones y todas las moscas ya se han reproducido, cada una con una cría.
- Las moscas que caben en un tarro de café, u otro contenido de 400 g. Observa el tarro en clase para que hagas la estimación.
- El total de crías que nacen si en el tarro hay tres moscas grises y cada una tiene siete crías.

Opera

5 Considera estas posibilidades y realiza la operación.

- El profesor Chinarro ha contado 3 568 000 moscas. Al abrir el tarro se escapan 358. ¿Cuántas quedan dentro del tarro?
- En un primer conteo, el profesor contó el triple de las moscas. ¿Cuántas moscas contó en el primero momento?

Las matemáticas en la lectura

6 Realiza las operaciones, según los datos expresados en la lectura.

- ¿Cuántas cuerdas se necesitan para 88 guitarras?
- Si el profesor Chinarro cuenta siete millones de moscas, ¿cuántas le falta contar para llegar a nueve millones setecientos treinta y dos?
- Si cuando lleva tres millones doscientos se reproducen 20, cada una con tres crías, ¿cuántas habría en ese momento?

Gráfica 4. Taller matemático basado en la poesía. Fuente: Proyecto SE grado 4º

2.4. Técnica de análisis de la información

Para el análisis de los textos proporcionados por los estudiantes se utilizó el análisis de contenido de Bardin (2002). Según Bardin, el análisis de contenido permite la utilización de material no estructurado, se puede obtener información sin existir una intervención del investigador y se parte del contexto para identificar la información. En síntesis, es una técnica de investigación cuya finalidad es la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de la comunicación o de cualquier otra manifestación de la conducta.

La técnica de análisis de contenido presenta tres fases. La primera fase es el preanálisis donde se realiza la elección de documentos, formulación de hipótesis y elaboración de los objetivos. En este estudio los documentos seleccionados fueron los textos producidos por los cinco estudiantes, la hipótesis formulada fue "Si niños de grado tercero de primaria realizan tareas matemáticas basadas en una comprensión lectora (poemas), entonces la representación que tiene el niño sobre qué son las matemáticas se transformará". Así mismo, el objetivo es analizar la re-significación de la representación matemática a través de textos elaborados por niños de grado tercero de primaria de una institución educativa pública de Santiago de Cali.

La segunda fase consiste en el aprovechamiento del material, donde ocurre la codificación y descomposición del texto en función de las categorías. Según Bardin (2002), la codificación se realiza sobre los datos en bruto del texto que son transformados sistemáticamente y convertidos en unidades que permitan una descripción precisa de las características pertinentes del contenido. En este estudio, las unidades seleccionadas al realizar la codificación fueron palabras claves como aprendizaje, números, comprensión lectora, matemáticas, entre otras, que se desarrollaran en la sección de resultados. Por último, la tercera fase se refiere al tratamiento, la inferencia y la interpretación del material obtenido durante el estudio. Sin embargo, en este estudio se realizan modificaciones desde una perspectiva del sistema binario.

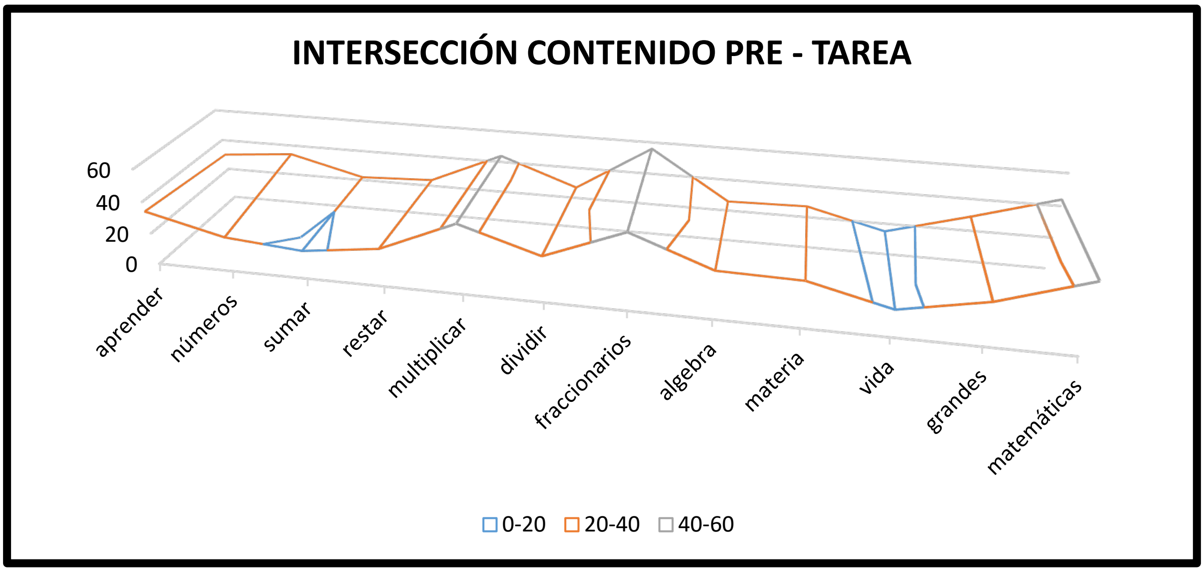
3. Resultados

En esta sección se realiza la descripción de los resultados con su respectivo análisis. El objetivo del estudio es analizar la re-significación de la representación matemática en niños de grado tercero de primaria en una institución educativa pública de Santiago de Cali. Por tal razón, se utilizaron las siguientes unidades de registro, puesto que la intensidad en el discurso de los estudiantes fue relevante, la tabla #1 ilustra las palabras seleccionadas durante los tres momentos del estudio.

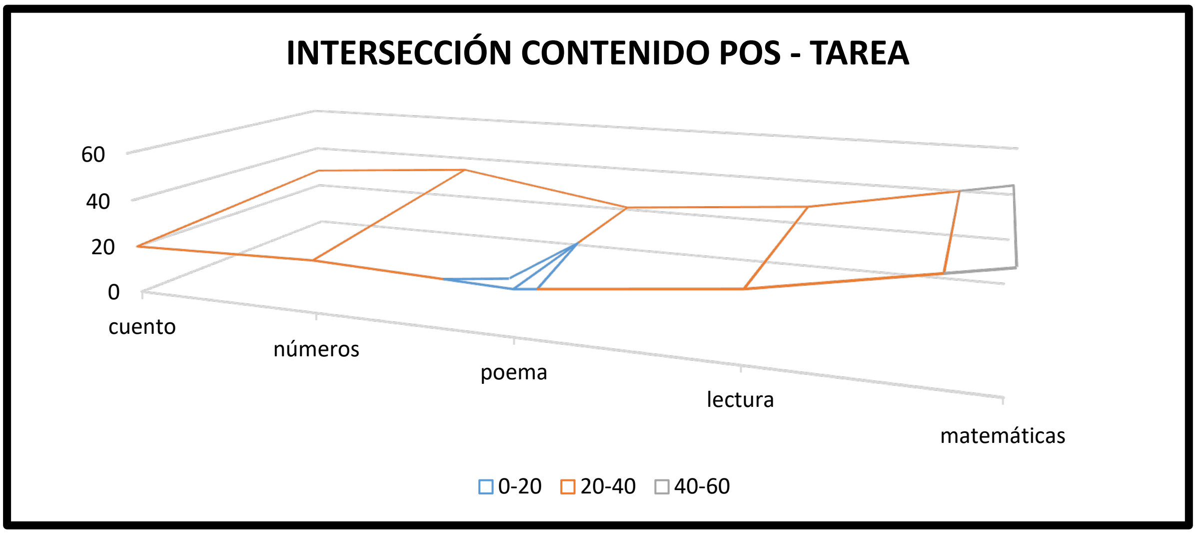
PRE-TAREA	POS-TAREA	PREGUNTA FINAL
aprender	cuento	comprensión
números	números	encantó
sumar	poema	gustó
restar	lectura	lectora
multiplicar	matemáticas	matemáticas
dividir		
fraccionarios		
algebra		
materia		
vida		
grandes		
matemáticas		

Tabla 1. Unidades de registro seleccionadas durante los tres momentos del estudio. Fuente: Elaboración propia.

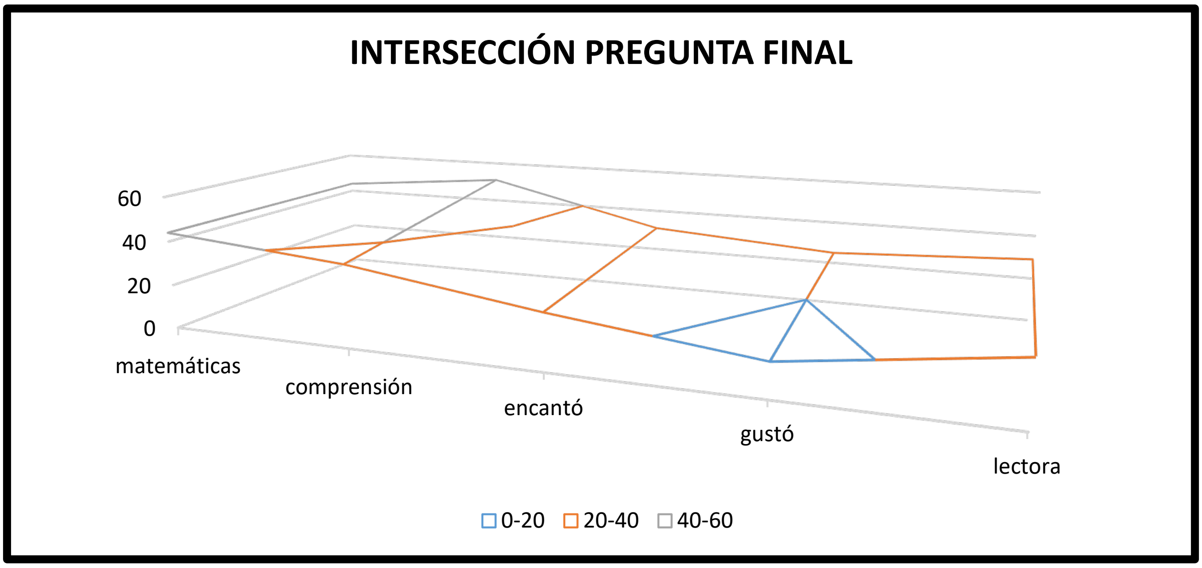
Después de seleccionar las unidades de registro con mayor frecuencia en los textos producidos por los estudiantes, se decidió realizar una conversión a sistema binario. Esta transformación de la forma habitual de analizar las frecuencias propuesta por Bardin (2002), se fundamenta porque el sistema binario permite visualizar la dinámica de la unidad de registro durante el discurso, sin abandonar el significado que brinda el número y reemplazarlo por otro tipo de análisis, lo cual es habitual. Para realizar la modificación de la palabra a binario se requiere utilizar la tabla de código ASCII propuesta por Gorn, Bemer & Green (1963), pues, permite identificar el valor numérico de la palabra, asumiéndola como un Byte que se descompone en 8 Bits, esto facilita caracterizar la intensidad dentro del discurso. En las gráficas que se presentan a continuación, se ilustra como la palabra en lenguaje binario facilita el seguimiento durante el discurso con su respectivo espacio-temporalidad.



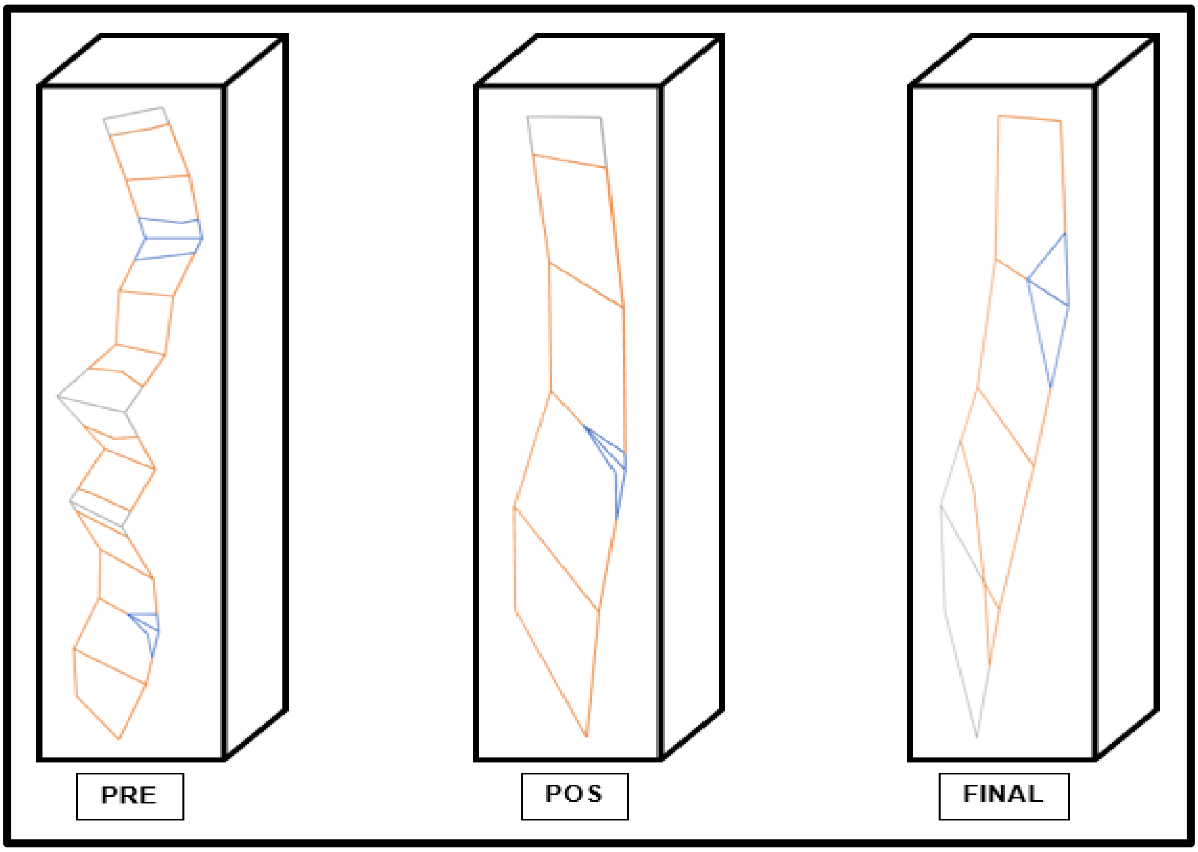
Gráfica 5. Dinámica de las unidades de registro durante la Pre – Tarea. Fuente: Elaboración propia.



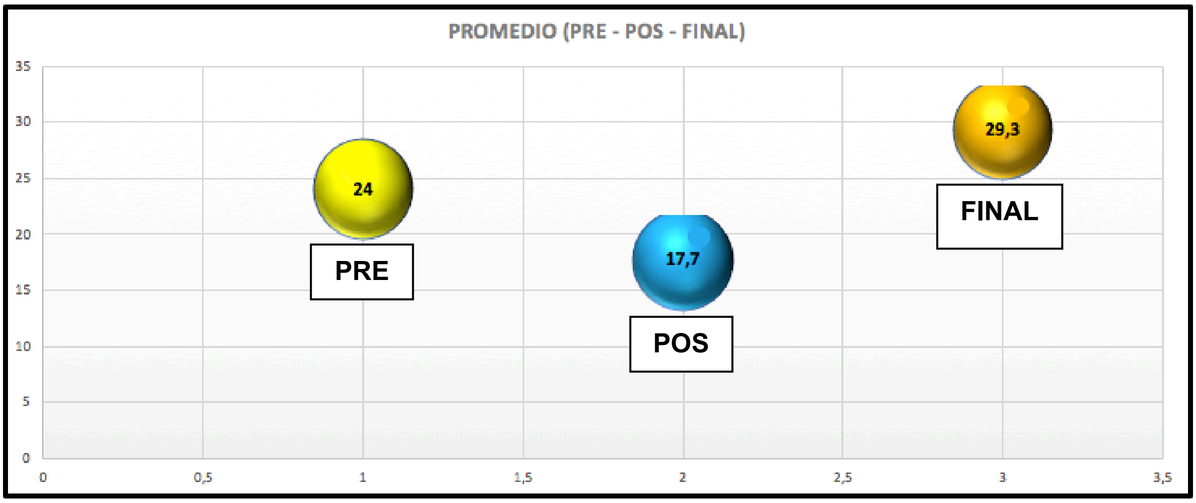
Gráfica 6. Dinámica de las unidades de registro durante la Pos – Tarea. Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 7. Dinámica de las unidades de registro durante la Pregunta final. Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 8. Espacio-Temporalidad unidades de registro en las tres fases de la tarea. Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 9. Promedio del comportamiento de los sujetos durante las fases del estudio. Fuente: Elaboración propia.

La gráfica #5, refleja como la intensidad de las unidades de registro (palabras) es elevada durante la Pre–Tarea, porque los niños al estar en interacción constante con las matemáticas en su contexto escolar tienen la certeza sobre el significado. Las palabras claves que se registran durante el texto de la Pre-Tarea, coinciden con las actividades matemáticas tradicionales que se implementan en la cotidianidad en el salón de clase, basadas en algoritmos básicos (suma, resta, multiplicación, división). Ahora bien, la gráfica #6 evidencia como al presentar una actividad matemática diferente a las habituales, los niños se cuestionan y por tal razón la frecuencia de las palabras claves del texto Pos–Tarea disminuye al igual que su intensidad en el discurso.

La gráfica #7, coloca de manifiesto como la palabra matemáticas se posiciona al inicio de la dinámica del discurso a diferencia de los otros momentos del estudio. En la Pre-Tarea, los niños realizan una operacionalización del significado de la matemática a partir de algoritmos básicos y se ubica en la parte final del discurso. Igualmente, ocurre en la Pos-Tarea donde el significado de matemáticas se forma a partir de otras unidades y nuevamente se posiciona al final. Sin embargo, en el último momento del estudio la intensidad se mantiene, pero varía la dinámica, se ubica al inicio posiblemente porque surge una resignificación de la matemática como un fenómeno complejo compuesto por diversidad de elementos que interactúan en el contexto.

La gráfica #8, evidencia la espacio-temporalidad de las unidades de registro dentro del discurso según el momento del estudio. Según Einstein (1905a, 1905b), tiempo-espacio no pueden separarse y dependen del estado del movimiento, la conversión de las palabras a sistema binario facilita la caracterización del movimiento dentro del discurso. Por último, la gráfica #9, ilustra el desempeño de los estudiantes durante los tres momentos del estudio. En la Pre-Tarea el promedio es alto porque cuando se realiza la pregunta a los estudiantes sobre ¿qué son las matemáticas?, responden con seguridad basándose en sus saberes previos fundamentados en actividades matemáticas tradicionales. La Pos-Tarea refleja un descenso significativo en el promedio porque ocurre un desequilibrio en la representación que tienen los niños sobre qué son las matemáticas, puesto que, se presenta una actividad matemática basada en una poesía que cuestiona las tareas tradicionales utilizadas en la institución educativa. Ahora bien, el final del estudio refleja una plasticidad y capacidad de asimilación excepcional en los niños, integrando en la re-significación de las matemáticas sus conocimientos previos y los nuevos saberes que surgieron durante el estudio, lo cual restablece el equilibrio incrementando significativamente el promedio.

4. Conclusiones

La representación matemática inicial de los estudiantes se modificó a través de la implementación de un estímulo (actividad matemática basada en una poesía) que generó inestabilidad en las concepciones preestablecidas. Según Karmiloff-Smith (1994), la representación es una unidad básica de conocimiento localizada en un dominio específico, en este estudio el dominio fueron las matemáticas y la representación es el significado. Ahora bien, la re-significación que ocurre al finalizar la implementación del estudio se puede comprender a través de un modelo de redescripción representacional propuesto por Karmiloff-Smith (1994). En este estudio se evidencia como la información se vuelve explícita y se une a las estructuras cognitivas del sujeto, permitiendo que la representación sea flexible y manipulable porque está en constante transformación.

En el presente estudio, el proceso de redescripción representacional del significado de las matemáticas ocurre como parte de un impulso intra e inter dominios. Es decir, los niños se centraron en la información proveniente del medio externo, la dinámica interna del sistema pasa a controlar la situación y las representaciones se convierten en el centro del cambio, contribuyendo a la interacción entre las estructuras internas de los niños con los datos externos. Entonces, el modelo de redescripción representacional facilita la comprensión de la re-significación matemática que experimentaron los niños y fundamenta la conversión del texto a sistema binario para caracterizar la dinámica interna del sistema del sujeto.

Así mismo, se debe destacar que al convertir las palabras en lenguaje binario y atribuirles el valor de un Byte, facilita la comprensión del texto como un conjunto de elementos numéricos donde cada unidad de registro posee una particularidad de movimiento. Igualmente, la conversión a sistema binario permite analizar la espacio-temporalidad de las unidades de registro y descomponer la palabra (Byte) en bits, facilitando la caracterización de la dinámica de la palabra en el texto como su propio movimiento interno. En conclusión, la conversión a sistema binario de las unidades seleccionadas permite comprender como la palabra dentro del texto sufre fluctuaciones, es decir, en que momento es mucho más fuerte la intensidad (1 = encendido) o cuando disminuye el movimiento durante el discurso (0 = apagado).

Referências

Bardin, L. (2002). Análisis de contenido. Tercera edición. Madrid: Ediciones Akal.

Gorn, S., Bemer, R. W., & Green, J. (1963). American standard code for information interchange. Communications of the ACM, 6(8), 422-426.

Einstein, A. (1905a). Does the inertia of a body depend upon its energy-content. Annalen der Physik, 18(13), 639-641.

Einstein, A. (1905b). On the electrodynamics of moving bodies. Annalen der Physik, 17(891), 50.

Flynn, E., & Siegler, R. (2007). Measuring change: Current trends and future directions in microgenetic research. Infant and Child Development: An International Journal of Research and Practice, 16(1), 135-149.

Karmiloff-Smith, A. (1994). Más allá de la Modularidad. La Ciencia Cognitiva desde la Perspectiva del desarrollo. Madrid: Alianza Editorial.

Newton, I. (1987). Philosophiæ naturalis principia mathematica (Mathematical principles of natural philosophy). London (1687).

Perner, J. (1994). Comprender la Mente Representacional. Barcelona: Paidos.

Sánchez, H., Cerchiaro, E., & Guevara, M. (2013). Cambio y variabilidad: Un marco de referencia en los estudios sobre el primer año de vida. Acta Colombiana de Psicología 16 (1): 101-113.

Autores:

León Blass Panesso Cruz: Psicólogo; Especialista en Pedagogía; Especialista en Educación y Tecnologías; Magíster en Educación énfasis en Matemáticas; Doctorando en Psicología (Línea de Investigación: Neurociencias y Matemáticas). Actualmente Asistente de Docencia Instituto de Psicología Universidad del Valle; Profesor Asistente Escuela de Ciencias de la Educación Universidad Icesi; Profesor de Matemáticas Institución Educativa Técnica de Comercio Simón Rodríguez.
Contacto: león.panesso@correounivalle.edu.co

Jhon Gregory Belalcazar Valencia: Arquitecto; Psicólogo; Especialista en Psicología Social; Magíster en Psicología; Doctor en Psicología (Universidad del Valle). Actualmente Profesor Universidad del Valle; Profesor Universidad de San Buenaventura Cali; Profesor Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
Contacto: jgbelalcazar@yahoo.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 100-108

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Distribuciones muestrales en poblaciones binomiales: Dificultades de comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato

Nuria Begué, Carmen Batanero, Mª Magdalena Gea y Danilo Díaz-Levicoy

Fecha de recepción: 23/07/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019

Resumen

Una de las principales dificultades en el estudio de la inferencia estadística es la comprensión del concepto de distribución muestral. En este trabajo se resumen de las principales dificultades descritas en la investigación sobre el tema y se analiza su comprensión por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato. Con esta finalidad se estudian la media y el rango de cuatro valores proporcionados por estudiantes de tres cursos diferentes a una tarea relacionada con la distribución binomial. Los resultados muestran una comprensión razonable del valor esperado, aunque algunos estudiantes muestran el sesgo de equiprobabilidad. La comprensión de la variabilidad en el muestreo es pobre, pero mejora con la edad.
Palabras clave: Distribución muestral, comprensión, Educación Secundaria y Bachillerato

Abstract

A main difficulty in the study of statistical inference is the understanding of the concept of sampling distribution. In this work, we summarize the main difficulties described in the research on the subject and analyze its comprehension by secondary and high school students. For this purpose, the mean and range of four values provided by students of three different courses to a task related to the binomial distribution are studied. The results show a reasonable understanding of the expected value, although some students show the equiprobability bias. The understanding of sampling variability is poor, but improves with age.
Keywords: Sampling distribution, understanding, secondary and high school.

Resumo

Uma das principais dificuldades no estudo da inferência estatística é a compreensão do conceito de distribuição amostral. Neste trabalho, resumimos as principais dificuldades descritas na pesquisa sobre o tema e analisamos sua compreensão por alunos do Ensino Médio. Para tanto, estuda-se a média e o intervalo de quatro valores fornecidos por alunos de três cursos diferentes a uma tarefa relacionada à distribuição binomial. Os resultados mostram uma compreensão razoável do valor esperado, embora alguns alunos mostrem o viés de equiprobabilidade. O entendimento da variabilidade e pobre, mas melhora com a idade.
Palavras-chave: Distribuição amostral, compreensão, Ensino Médio.

1. Introducción

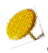
La comprensión del muestreo y de las características de las muestras es parte de la cultura estadística pues establece un vínculo entre estadística y probabilidad y permite comprender las situaciones de muestreo que aparecen en la vida cotidiana (Burrill y Biehler, 2011).

El actual diseño curricular español (MECD, 2015) incluye el estudio del muestreo ya desde el comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria y el de la distribución muestral en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Dicha distribución muestral es un concepto fundamental en la inferencia frecuencial, donde se utiliza para la construcción de intervalos de confianza y la realización de contrastes sobre los parámetros que describen las poblaciones.

Sin embargo, la investigación previa describe errores en la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. En este trabajo se describen las principales dificultades asociadas al tema y se presentan los resultados del análisis de una tarea dirigida a la evaluación de las mismas en estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

2. Principales dificultades en la comprensión de distribuciones muestrales

Son varios los trabajos que analizan las dificultades de los estudiantes con la distribución muestral, por ejemplo, Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015) o Makar y Rubin (2018). Una de las principales es que los estudiantes no siempre diferencian las tres distribuciones que intervienen en un proceso de muestreo (Harradine et al., 2011, Kadijevich, Lipson, 2003). Consideremos, para describirlas, la tarea presentada en la Figura 1, tomada de Gómez. (2014) que hemos usado en este trabajo y también en nuestra investigación previa (Begué, Batanero y Gea, 2018).

Tarea. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo . Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Figura 1. Tarea de lanzamiento de chinchetas (Gómez, 2014)

En una situación de muestreo se parte de una población, en la que estudiamos una cierta variable aleatoria, que queda especificada por una distribución teórica de probabilidad. En la tarea mostrada en la Figura 1, consideramos un experimento aleatorio con dos tipos de sucesos: que la chincheta caiga hacia arriba (éxito) o hacia abajo (fracaso) y nos interesamos por la variable aleatoria “número de éxitos en n ensayos”, que se describe mediante la distribución Binomial B(n,p). Dicha distribución depende de dos parámetros: n=número de ensayos y p= probabilidad de ocurrencia del éxito. Por tanto, la variable “número de chinchetas que caerán hacia arriba en la caja” sigue la distribución binomial B(100, 0,68).Otros ejemplos de la distribución binomial serían el número de partidarios a un cierto partido político en un grupo de personas, el número de productos defectuosos en un lote o el número de aprobados de una clase en un examen.

Si tomamos una muestra aleatoria de la población, obtenemos algunos valores de la variable, pero no todos. Por ello, podemos considerar una variable estadística en la muestra con su correspondiente distribución de datos. En la tarea propuesta en la Figura 1, si cuatro alumnos vacían sucesivamente la caja de chinchetas, cada uno puede obtener un valor diferente del número de chinchetas con la punta hacia arriba; por ejemplo, se podrían obtener los valores 67, 65, 70, 71. Estos cuatro valores constituyen una muestra de cuatro elementos de la distribución binomial B(100, 0,68) y tiene una distribución diferente de la distribución en la población. Así, mientras la media en la población de partida μ sería igual a 68, la media $\bar{x}$ de los datos de esta muestra es igual a 68,25. Si no conociésemos el valor de μ, se usaría $\bar{x}$ para estimar su valor.

La muestra anterior 67, 65, 70, 71, es sólo una de las posibles muestras de cuatro valores de la distribución binomial B (100, 0.68) en cada una de las cuales la media muestral podría variar. Por tanto, se puede definir una nueva variable aleatoria $\overline{X}$ para describir todas las posibles medias muestrales citadas. La distribución de esta nueva variable se denomina *distribución muestral de la media* y permite la construcción de intervalos de confianza o la realización de contrastes de hipótesis. Estas mismas tres distribuciones aparecen en cualquier otro problema de muestreo; por ejemplo, nos podemos interesar por la media en una población normal y entonces tendríamos la distribución normal en la población, la distribución de datos en una muestra y la distribución de la media de una población normal. El trabajo conjunto con estas distribuciones tiene una gran complejidad conceptual, por lo que los alumnos las suelen confundir.

Por otro lado, los estudiantes parecen comprender que la media de la muestra se acerca a la de la población. Pero no entienden las implicaciones del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la media muestral. Tversky y Kahneman (1982) hablan de insensibilidad al tamaño de la muestra, que sería uno de los sesgos asociados a la heurística de la representatividad, también descrita por estos autores.

Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) investigaron la comprensión del muestreo en una población binomial de 272 estudiantes (10-19 años), pidiéndoles dar el número de sucesos de un cierto tipo en una muestra de 10 elementos y otra de 100 elementos. Los autores identifican tres niveles progresivos en el razonamiento sobre el muestreo: 1) el nivel de razonamiento aditivo (el más frecuente), que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente, la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; este es el nivel más frecuente de los estudiantes de acuerdo a Saldanha y Thompson (2002),; 2) el nivel de razonamiento proporcional, en el que se utilizan proporciones al realizar estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) el nivel de razonamiento distribucional (el menos frecuente) donde se integran las ideas de valor esperado y de variabilidad, al realizar estimaciones.

En Begué, Batanero y Gea (2018) planteamos a un grupo de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, cuatro tareas de muestreo, una de las cuales es la presentada en la Figura 1. En el trabajo actual nos restringimos a unta tarea, pero completamos el anterior con un grupo de estudiantes de Bachillerato y con el estudio de las diferencias de comprensión mostradas en los tres grupos de estudiantes.

3. Metodología

El estudio que describimos en este trabajo se llevó a cabo con tres grupos de estudiantes: 157 de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años; en total 9 grupos), 145 de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años; en total 8 grupos) y 234 de 2º curso de Bachillerato. Todos los alumnos cursaban sus estudios en centros públicos diferentes en las ciudades de Huesca y Zaragoza; estos centros y los profesores de los estudiantes colaboraron en nuestro trabajo con autorización de los directores.

Se propuso a los estudiantes la tarea presentada en la Figura 1, que completaron individualmente por escrito, como una actividad en la clase de matemáticas. Las respuestas obtenidas (cuatro valores de la distribución binomial B(100, 0.68) para cada estudiante), se codificaron. Para cada estudiante se obtuvo la media aritmética y el rango de los cuatro valores dados, que se analizan a continuación.

4. Comprensión del valor esperado en la distribución muestral

Como se ha indicado, en la tarea mostrada en la Figura 1, el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es una variable aleatoria binomial, B(100, 0,68). En consecuencia, el número esperado de chinchetas que caerán con la punta hacia arriba en la muestra de 100 elementos es $n\hat{p}$ = 68 y su desviación típica, $\sigma = \sqrt{n\widehat{p}\,(1-\widehat{p}\,)}$= 4,66. Al tratarse de un valor grande de ensayos, se puede aproximar esta distribución mediante la distribución normal N (68, 4.66).

La distribución muestral de la media puede entonces aproximarse también mediante una distribución normal N(68, σ/√4), es decir N(68, 2.33) ya que la suma de valores de una distribución normal es también normal y la media se obtiene a partir de una suma dividida por una constante. Utilizando dicha aproximación normal de la distribución de la media muestral obtenemos el intervalo que contiene el 95% de los valores centrales, que es [63,3-72,7]. Consideraremos, entonces, que los estudiantes tienen una buena comprensión del valor esperado de la distribución muestral si la media de los cuatro valores propuestos se sitúa en este intervalo. Por ejemplo, sería adecuada la respuesta del estudiante que indica los valores 67, 65, 70, 71, puesto que su media es 68,25. Pero no lo sería la del estudiante que responde 32, 43, 57, 50, pues su media es 45,5, muy alejada de la media teórica de la población.

	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	2º Bach (n=234)
Estimación aceptable del valor esperado [63.3-72.7]	28,6	33,1	44,3
Equiprobabilidad [45- 55]	26,8	23,4	17,7
Otros valores	38,2	38,7	38,0
No completa	6,4	4,8	4,7

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes por grupo según valor medio de las cuatro estimaciones

En la Tabla 1 presentamos el porcentaje de estudiantes cuyos valores medios en la respuesta a la tarea planteada se sitúan en el intervalo de estimación aceptable o en otros intervalos. Hemos considerado, en especial, los estudiantes cuyo valor medio se acerca mucho al 50%, al proporcionar cuatro valores muy cercanos al mismo. Dichos estudiantes no se guían por el valor dado en el enunciado de la tarea para estimar la probabilidad de que la chincheta caiga con la punta hacia arriba. Estarían considerando los dos posibles sucesos como equiprobables, es decir, caerían en el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992).

Observamos que sólo el 28,6% de los estudiantes de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria el 33,1% de los de 4º curso y el 44,3% de los de Bachillerato dan respuestas cuyos valores medios se incluyen en el intervalo aceptable de estimación, aunque el porcentaje de respuestas aceptables va aumentando con el curso. Hay un porcentaje apreciable de estudiantes que caen en el sesgo de equiprobabilidad, aunque dicho porcentaje disminuye con el curso escolar. El número de alumnos que no responde o que proporciona otro tipo de valores es similar en todos los grupos.

4. Comprensión de la variabilidad. Distribución muestral del rango

Al responder a la tarea planteada, no sólo es importante que la media de los cuatro valores se acerque a la teórica, sino que se debe tener en cuenta una variabilidad adecuada de los elementos de la muestra, que se puede deducir del rango obtenido a partir de los cuatro valores dados. La distribución muestral del rango en muestras de cuatro elementos no es normal, ni tampoco aproximadamente, pero se puede simular fácilmente, como mostramos en la Figura 2. Dicha figura muestra la simulación de los rangos obtenidos en 10000 muestras aleatorias de cuatro elementos de la distribución binomial B(100, 0,68), utilizando el programa Fathom. A partir de esta distribución muestral empírica podemos ver que el 95% de los valores centrales del rango varían entre 3 y 18, intervalos que incluye las respuestas de variabilidad aceptable.

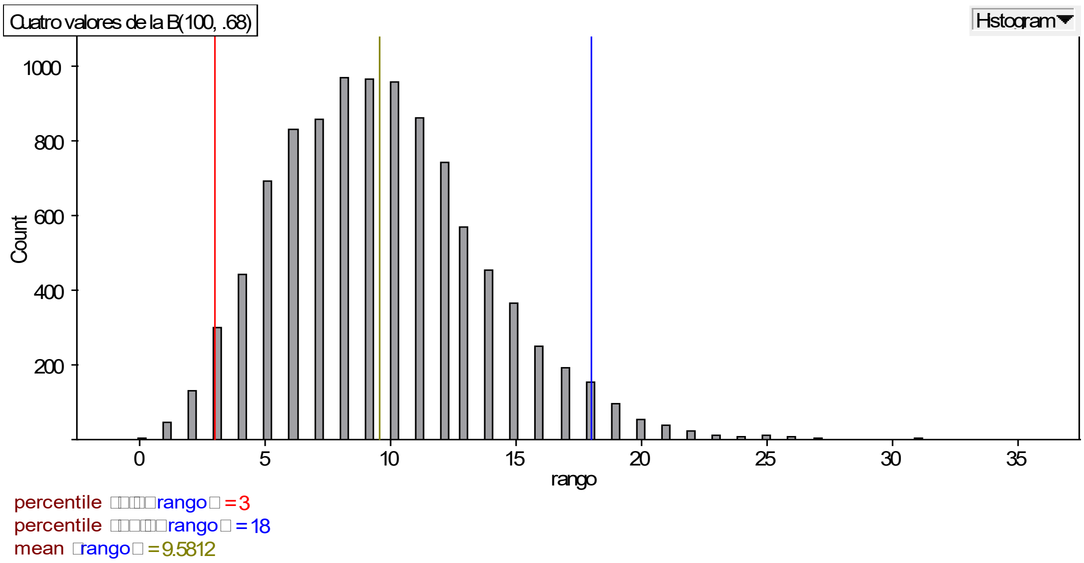


Figura 2. Distribución muestral empírica de los rangos en muestras de 4 elementos de la B (100, 0,68)

Fuente: producida por los autores

Variabilidad	2ºESO (n=157)	4ºESO (n=145)	2º Bach (n=234)
Estimación aceptable [3-18]	20,3	29,5	40,8
Estimación de una variabilidad muestral excesiva >18	62,4	56,6	42,8
Alta concentración <3	10,8	9	11,8
No completa	6,4	4,8	4,7

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes por grupo según intervalo en que se sitúa el rango de las cuatro estimaciones

Los resultados del análisis de los rangos de los cuatro valores producidos por cada estudiante se presentan en la Tabla 2, donde vemos que son minoría los estudiantes que conceden una variabilidad adecuada en este ítem, a pesar de que se consideran 100 repeticiones del experimento, lo que sería una muestra grande. Por tanto, los estudiantes no alcanzan el razonamiento distribucional sobre el muestreo (Shaughnessy et al, 2004), pues no tienen en cuenta simultáneamente el valor esperado y la variabilidad. En general, los estudiantes conceden una variabilidad excesiva al muestreo, en contra de lo que indica la teoría estadística, aunque también en lo que se refiere a la variabilidad la comprensión parece mejorar con la edad. Esto lo vemos en la disminución del porcentaje de estudiantes con variabilidad excesiva con el curso y el aumento de las respuestas con variabilidad aceptable.

5. Significación de las diferencias

Con objeto de analizar si las diferencias entre los resultados en Bachillerato y los obtenidos en los cursos anteriores son estadísticamente significativas, presentamos en la Tabla 2 las medias y desviaciones típicas del valor medio y el rango de dicho valor medio en las cuatro estimaciones de cada estudiante en cada uno de los grupos con el error de muestreo y el número de estudiantes que responden al ítem en cada grupo. Observamos muy poca diferencia en el valor medio, siendo el correspondiente al 4º curso algo más alto, es decir, más próximo a la probabilidad teórica, aunque aún muy diferente de ella. Por el contrario, hay una diferencia notable, de casi 7 puntos, en el rango de las cuatro estimaciones, entre los estudiantes de Bachillerato y los de 2º y de 4 puntos con los estudiantes de 4º curso, que indica que sus estimaciones tienen menor variabilidad.

	Curso	N	Media	D. típica.	Error muestreo
Media	2º	147	56,920	13,7228	1,1318
	4º	138	58,899	11,6006	,9875
	Bachiller	234	57,579	16,7599	1,0956
Rango	2º	147	32,07	22,499	1,856
	4º	142	26,68	20,764	1,743
	Bachiller	234	22,55	20,680	1,352

Tabla 3. Estadísticos de la media y el rango por curso

Para comprobar si estas diferencias observadas son estadísticamente significativas se ha realizado la prueba del análisis de varianza tomando el grupo de estudiantes como variable independiente. Al analizar la diferencia de medias se obtuvo un calor F= 0,672 con 2 g.l. que no fue estadísticamente significativa, mientras que el analizar la diferencia de rangos se obtuvo F:9,095, con 2 g.l. que corresponde a un valor $p<0{,}001$ y por tanto estadísticamente significativo. En consecuencia, la comprensión de valor esperado es similar en los grupos; en general buena, salvo el grupo de estudiantes que razona de acuerdo al sesgo de equiprobabilidad. Por otro lado, parece que al progresar el curso los estudiantes visualizan mejor la disminución de variabilidad en las muestras grandes

5. Implicaciones didácticas

Los diseños curriculares actuales permiten comenzar la enseñanza del muestreo desde la etapa secundaria, donde la tarea que analizamos en este trabajo puede ser implementada y discutida con los estudiantes, para hacerles comprender sus ideas correctas e incorrectas sobre el muestreo.

El análisis de los resultados del estudio, aunque muestra mejora de la comprensión con el curso, también indica que queda un camino para recorrer si queremos que los estudiantes alcancen plena comprensión del concepto de distribución muestral. Hoy día es sencillo realizar actividades de simulación; en nuestro caso, hemos mostrado la simulación de la distribución muestral del rango utilizando Fathom, pero también hay muchos recursos interactivos de simulación en internet. Es importante invertir un tiempo de enseñanza en la exploración de estos recursos con los estudiantes, ya que los posibles errores de comprensión del muestreo y distribución muestral, se arrastran posteriormente en el estudio de la inferencia.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M.M.. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63-79

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57–69). New York: Springer.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011).Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246).Springer

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 557-568.

Lipson, K. (2003). The role of the sampling distribution in understanding statistical inference. *Mathematics Education Research Journal, 15*(3), 270-287.

Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi (Ed.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261-294). Cham: Springer.

Saldanha. L. y Thompson, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51,* 257-270.

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 117-128). Nueva York: Cambridge University Press.

Well, A. D., Pollastsek, A.y Boyce, S. J. (1990). Understanding the effects of the sample size on the variability of the means. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 47,* 289-312.

Zacks, S. (2014). *Parametric statistical inference: basic theory and modern approaches*. London: Elsevier.

Autores

Nuria Begué, Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Zaragoza (UNIZAR), Zaragoza, España, nbegue@unizar.es

Carmen Batanero Bernabeu: Catedrática de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). batanero@ugr.es

María M. Gea: Profesora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Es coordinadora del Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Danilo Díaz-Levicoy, Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada (UGR). Profesor en la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule (UCM), Talca, Chile. dddiaz01@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

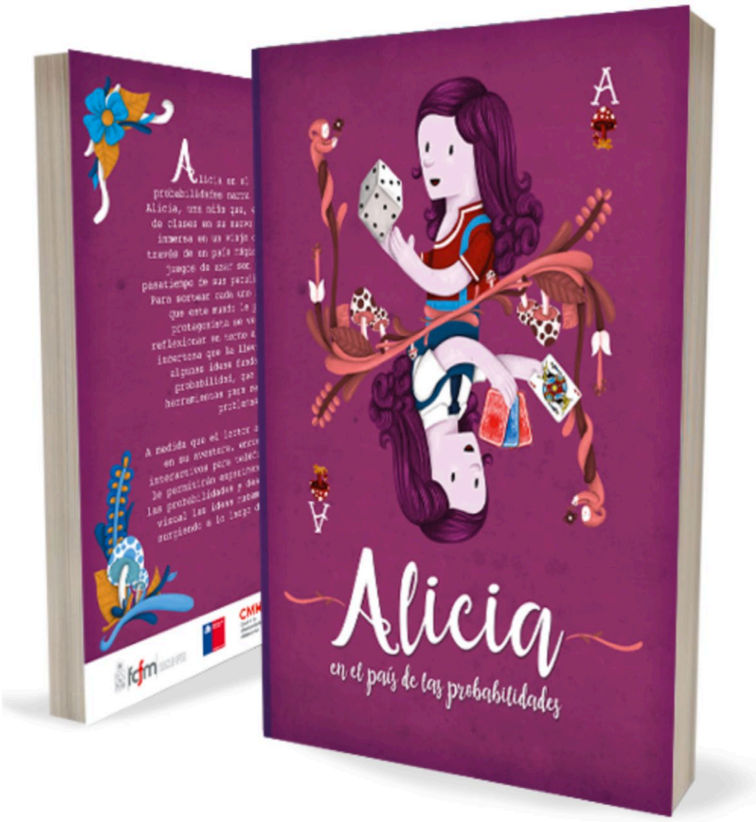
ISSN: 1815-0640
Número 56. Agosto 2019
Páginas 109-112

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

RESEÑA: Alicia en el país de las probabilidades

Claudia Vásquez Ortiz
Pontificia Universidad Católica de Chile

Fecha de recepción: 23/07/2019
Fecha de aceptación: 27/08/2019



Alicia en el país de las probabilidades (Brito, Guíñez, Salinas, Gálvez, Peet y Martínez, 2018), fue creado por un equipo multidisciplinario compuesto por matemáticos, profesores de matemáticas, ingenieros, así como también, diseñadores, ilustradores, guionistas y programadores del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile. Este cuento aborda ideas claves sobre la probabilidad y fue desarrollado con el propósito de estimular el interés por las matemáticas y brindar oportunidades para el aprendizaje de las probabilidades. Este cuento interactivo se encuentra dirigido a estudiantes de 11 a 15 años de edad, y fue concebido tomando en consideración la progresión de objetivos de aprendizaje que declara el currículum chileno de Matemática de Educación Básica (Mineduc, 2012). Para ello, se utilizó una narrativa que combina acertijos matemáticos con un mundo de fantasía inspirada en el clásico de Lewis Carroll. Se trata de un historia matemática genuina (Borasi, Sheedy y Siegel; 1990), es decir, las ideas matemáticas son claves para la ambientación y para el desarrollo de la trama.

Este cuento narra la historia de Alicia, quien, en su primer día de clase en su nuevo colegio, se embarca en un viaje de aventuras a través de una tierra mágica donde los juegos de azar son la actividad principal de sus habitantes. Para superar los desafíos de este mundo, la heroína se ve obligada a pensar en situaciones de incertidumbre, lo que la lleva a descubrir ideas fundamentales sobre la probabilidad que utilizará para resolver y analizar problemas.

El libro promueve el aprendizaje de las matemáticas a través del enfoque de resolución de problemas, facilitado por juegos interactivos para teléfonos inteligentes que ayudan a los niños y niñas a explorar problemas, que involucran probabilidades y apoyan el descubrimiento y la comprensión de las ideas matemáticas que surgen a lo largo de la historia. Un elemento clave son las ilustraciones, las cuales sirven no tan solo para dar vida a los diferentes personajes y paisajes mágicos, sino que también para apoyar la visualización y comprensión de ideas matemáticas, como una herramienta para representar estrategias y procedimientos matemáticos para resolver problemas.

La narración gira en torno a seis 6 capítulos (Figura 1). En cada uno de ellos la protagonista debe enfrentar un desafío que implica jugar y analizar un juego de azar. Cada capítulo se centra en una idea importante de la probabilidad y su secuencia se generó para promover la comprensión del azar a distintos niveles.

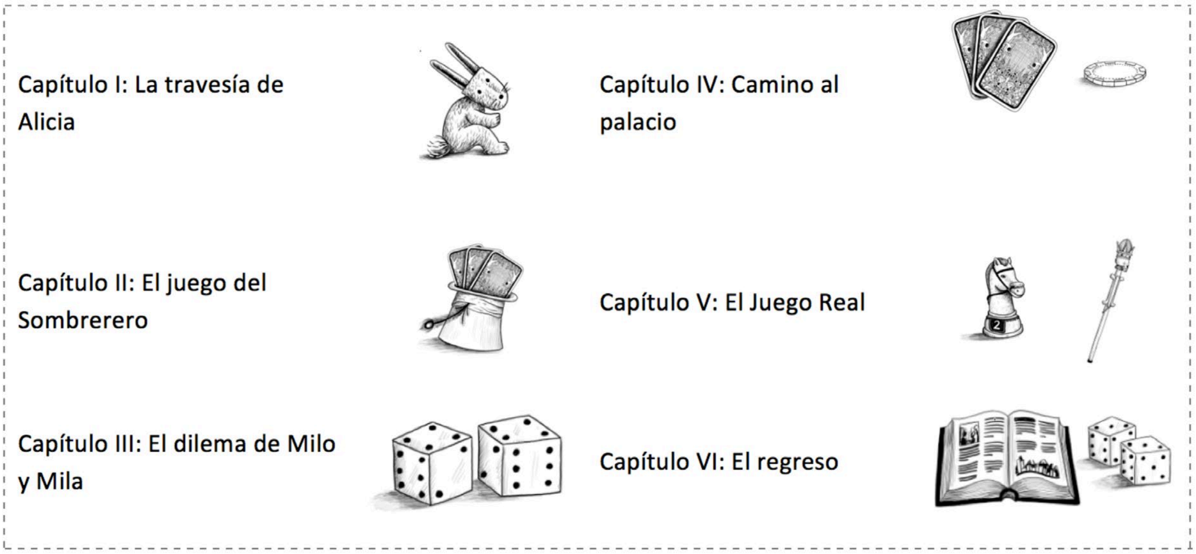


Figura 1. Capítulos de Alicia en el país de las probabilidades.

En los primeros capítulos se presentan situaciones que involucran experimentos aleatorios, como juegos con dados y tarjetas que se analizan a través de la noción frecuentista o empírica de probabilidad. En una de ellas, Alicia se enfrenta a un juego de tarjetas, en el cual gana si se sacan dos tarjetas del mismo color desde un sombrero que contiene dos tarjetas rojas y una azul (Figura 2). Este juego no es simétrico y en él suele evidenciarse una creencia errónea: si un experimento tiene dos resultados posibles, entonces ambos resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir. En la historia, los personajes repiten varias veces el experimento, hasta que uno de ellos dice saber lo que eventualmente ocurrirá, gracias a su experiencia luego de haber jugado muchas veces. En el relato se motiva la aparición de esta creencia, para que el lector pueda contrastarla con los resultados empíricos al enfrentarse a los juegos interactivos de la aplicación móvil.

Figura 2. Juego de las tarjetas.

Una vez que la protagonista ha tenido sus primeras experiencias con juegos de azar, se le presentan nuevos desafíos que implican analizar los resultados de un experimento aleatorio sin simularlo. Para ello, Alicia recurrirá a representaciones y heurísticas que faciliten la búsqueda y análisis de posibles casos de un experimento aleatorio. De esta manera, el lector se aproxima a la noción clásica de probabilidad a través de problemas que involucran la combinatoria y que requieren el desarrollo de estrategias de conteo elementales. Por ejemplo, en el Capítulo 3 se introduce un juego de dados que implica analizar la ocurrencia de eventos de igual probabilidad, motivando el uso de un enfoque clásico de probabilidad en el que se deben encontrar todos los casos posibles (Figura 3).

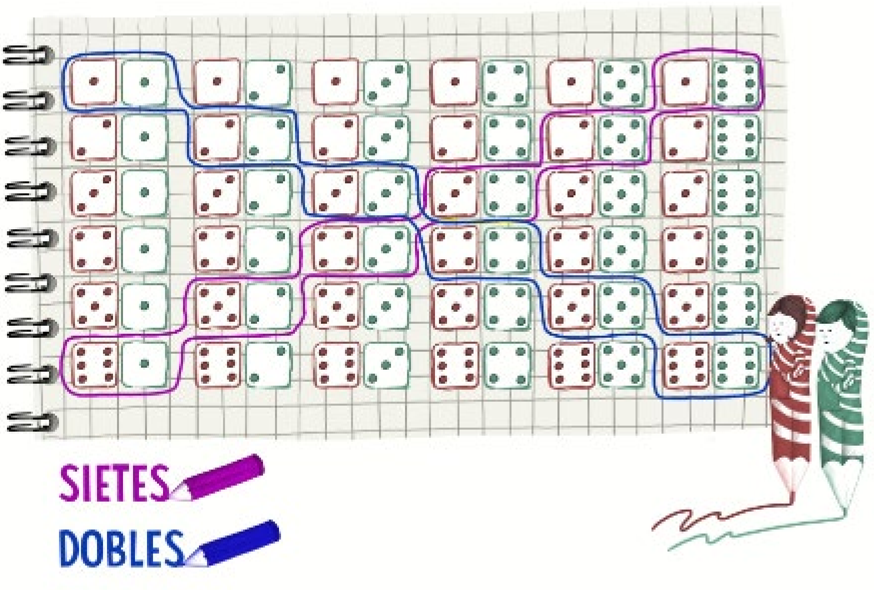


Figura 3. Juego con dados.

En los últimos capítulos, se enfatiza la naturaleza complementaria de los enfoques empíricos y clásicos. Por un lado, hay situaciones en las que el lector puede comprender cómo el análisis de casos posibles permite explicar resultados empíricos de los juegos con dados y tarjetas que pueden ser contraintuitivos. Por otro lado, la protagonista se enfrenta a situaciones en las que utiliza su conocimiento a partir de la repetición de un experimento y lo complementa con el análisis de casos. Con esto, puede anticipar el resultado de un juego, cuando el experimento aleatorio subyacente se repite muchas veces.

Por último, cabe señalar que *Alicia en el país de las probabilidades* cuenta con una aplicación para teléfonos móviles en la que se encuentran juegos interactivos a través de códigos QR. De esta manera, el lector podrá acompañar a Alicia en sus aventuras y experimentar por sí mismo las situaciones descritas en el cuento. Esta aplicación no es necesaria para seguir la trama, sino que está concebida para ayudar al lector a profundizar en la exploración de los problemas presentados, y a extender y aplicar estrategias para resolver problemas relacionados.

Referências

Borasi, R., Sheedy, J. R., y Siegel, M. (1990). The power of stories in learning mathematics. *Language Arts*, *67*(2), 174-189.

Brito, C., Guíñez, F., Salinas, R., Gálvez, G., Peet, T. y Martínez, S. (2018). *Alicia en el país de las probabilidades.* Centro de Modelamiento Matemático. Universidad de Chile.

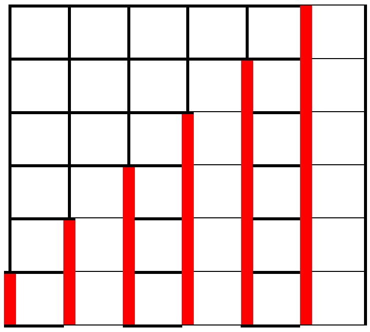
Mineduc (2012). Bases Curriculares Educación Básica. 1º edición, Santiago, Chile.

Triángulos, juegos y emociones

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

¿Cuántos triángulos se pueden formar de modo que sus lados sean tres de los palitos (completos) que se muestran sobre el cuadriculado de la figura?



Este problema es fuente interesante para crear otros problemas y – sobre todo – para que los niños creen sus propios juegos. Mostraré el juego creado por una niña de 10 años, que no conocía cómo están relacionadas las longitudes de los lados de cualquier triángulo y comentaré sus potencialidades didácticas y matemáticas. Destaco la importancia de las emociones para el aprendizaje, máxime cuando se trata de niños y las emociones son originadas al crear ellos mismos un juego.

Con ideas suscitadas por el problema, preparé material concreto – palitos de colores, de tamaños proporcionales a 1, 2, 3 4, 5 y 6 – con el propósito de invitar a jugar con tal material, al inicio libremente y luego formando triángulos. En la Figura 1 muestro el material: 4 palitos de cada color (rojo, marrón, azul, blanco, amarillo y verde), siendo del mismo tamaño todos los del mismo color. La unidad de media de los palitos es la longitud de los palitos de color rojo y para hacer más evidente las longitudes de los palitos en relación a la longitud de los palitos rojos, hay cartelitos con los números correspondientes. También hay cuatro dados, un bolígrafo y un block de hojitas de papel.

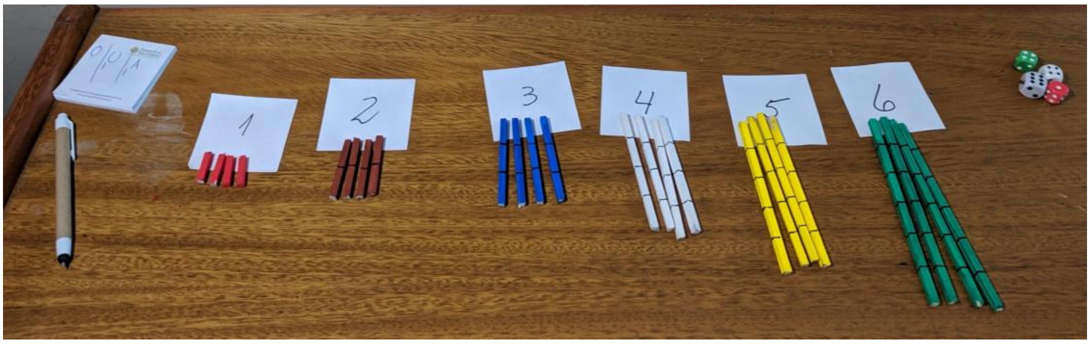


Figura 1

El material

[1] Problema propuesto en una competición matemática para estudiantes de secundaria

Mostré el material a la niña y despertó su curiosidad; más aún cuando le dije que era para que juegue. Comenzó a manipular el material. Al inicio, formó figuras arbitrarias con los palitos. Dejé un tiempo para que ella se familiarice con el material. Observó los dados, usó tres de ellos, los lanzó y según los números obtenidos, escogió tres palitos cuyas longitudes correspondían a tales números. Con esos palitos construyó figuras arbitrarias, como se ve en la Figura 2 (Los colores de los dados no intervenían.)

Figura 2
Construcciones libres

- *¿Qué te parece si formas triángulos con tres palitos?* (Le aclaré que los vértices de los triángulos debían corresponder al encuentro de palitos por sus extremos)
- *Bien.* (Formó triángulos con palitos del mismo color, lo que siempre era posible pues iba obteniendo triángulos equiláteros.)

- *¿Y podrás formar triángulos cuyos lados no sean todos del mismo color?*
- *¡Claro!*

La niña construyó algunos triángulos (Figura 3), pero al escoger dos palitos marrones (de longitud 2) y uno amarillo (de longitud 5) me dijo sorprendida

- *¿¡Con estos palitos no se puede formar un triángulo!?*

Le sugerí que examine si había otros casos de imposibilidad y encontró el caso de palitos de longitudes 1, 2 y 3. y el caso de palitos de longitudes 2, 2 y 5 (Figura 4). Así, descubrió, con sorpresa, que había algunos palitos con los cuales era imposible construir un triángulo, según lo indicado.

Figura 3
Construyendo casos posibles
(Palitos de longitudes 4, 4 y 1)

Figura 4
Descubriendo casos imposibles
(Palitos de longitudes 2, 2 y 5)

Ante este descubrimiento, le pedí a la niña que invente un juego para dos o más personas, usando lo que tenía en la mesa y lo que había descubierto. Entonces se entusiasmó más, pensó un rato, usó tres dados, inventó un juego para dos jugadores, me lo explicó, se dio cuenta que podía ser para más jugadores y a mi pedido, precisó las reglas para el juego. A continuación, tales reglas, con las adecuaciones de lenguaje.

Reglas del juego creado

- *Juegan dos o más jugadores.*
- *Para decidir el orden, cada uno lanza un dado y comienza el que obtiene el mayor número.*
- *Cada jugador, en su turno, lanza **tres dados**.*
- *Por cada número obtenido en los dados, se extrae un palito del tamaño correspondiente a ese número.*
- *Con los palitos extraídos, el jugador debe tratar de formar un triángulo, uniendo los palitos por sus extremos.*
- *Si logran formar un triángulo con los palitos extraídos, se llevan los palitos. Si no se puede formar el triángulo, se devuelven los palitos y tira los dados el otro jugador. Así se continúa hasta que ya no se pueda formar más triángulos.*
- *Gana el que se lleva más palitos.*

Figura 5

Jugando el juego creado

En la Figura 5 se ve que, al lanzar los dados, la niña obtuvo los números 1, 3 y 6 y trata de convencerse que es imposible formar un triángulo cuyas dimensiones de sus lados sean 1 unidad, 3 unidades y 6 unidades.

Ciertamente, para jugar varias rondas, sería necesario tener más palitos de cada tamaño.

Sobre el problema inicial

Como lo mencioné en el pie de página, el problema inicial fue propuesto en una competición matemática para estudiantes de secundaria. Una participante de 12 años, resolvió el problema sin recurrir a material concreto ni a dibujar triángulos.

Escribió ternas con números asociados a los palitos, comenzando por excluir el número 1:

2 3 4, 2 4 5, 2 5 6, 3 4 5, 3 4 6, 3 5 6, 4 5 6

Podemos imaginar que la niña conocía la propiedad que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces, la longitud de cualquier lado es menor que la suma de las longitudes de los otros lados. Así,

$$c < a + b; \quad a < b + c; \quad \text{y} \quad b < a + c$$

Comentarios

1. Luego de conocer el juego creado por la niña, algo que aflora inmediatamente, es que los niños son capaces de crear juegos por *elaboración*; es decir, de manera similar a la creación de problemas, a partir de una situación dada. En este caso la situación es el material que se le presentó (Figura 1). Es más común que la creación de nuevos juegos sea por *variación* de juegos que se les presente a los niños (Malaspina y Malaspina, 2017, 2018). En la creación de problemas o juegos, por *variación*, se modifican uno o más de los elementos que constituyen el problema o el juego inicialmente dado (Malaspina 2018).
2. Adecuadamente orientados, los juegos creados por variación o por elaboración pueden tener un gran potencial matemático y didáctico, con la gran ventaja de generar emociones positivas, tan importantes para el aprendizaje.
3. Evidentemente, el juego creado por la niña tiene el potencial didáctico-matemático de hacer evidente que, dados tres números cualesquiera, no siempre es posible construir un triángulo cuyos lados tengan sus longitudes proporcionales a tales números. Es interesante seguir explorando para llegar a descubrir en qué casos es posible la construcción del triángulo.
4. A partir del problema-juego, se pueden crear otros problemas-juego usando tipos de triángulos a formar. Por ejemplo, que cada jugador disponga de material completamente similar en estructura y en cantidad y se juegue a quien construye más triángulos isósceles, no equiláteros, usando cada vez solo tres palitos.
5. Si se juega a construir triángulos rectángulos, se evidenciará que solo se puede formar el conocido triángulo de lados 3, 4 y 5. Ante esto, se puede añadir la regla de usar hasta dos palitos por cada lado del triángulo y así tener base para intuir la semejanza de triángulos, pues entonces se podrá construir también el triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10, usando dos palitos de 3, dos de 4 y dos de 5 para cada lado.
6. Esta experiencia didáctica muestra, una vez más, que la creación de problemas y de juegos que involucren aspectos matemáticos, favorece el estímulo del pensamiento matemático de quienes los crean. (Malaspina y Malaspina, 2017)
7. Un aspecto muy importante de la creación de problemas y juegos, es el involucramiento emocional de la persona que los crea, y de manera especial cuando es un(a) niño(a) quien crea su propio juego. El aspecto emocional es de suma importancia para aprender, pero lamentablemente se le presta poca atención en el ejercicio docente. Al respecto, Katrancı y

Şengül (2019, p.3), citando a otros investigadores en educación matemática, nos recuerdan la importancia de la creación de problemas para generar emociones y actitudes positivas hacia las matemáticas:

- Los estudiantes que crean problemas pueden ***desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas*** y esto provoca una disminución de sus preocupaciones. (Altun, 2001)
- ***Crear problemas ayuda a mejorar las actitudes y creencias matemáticas de los estudiantes***. (Akay & Boz, 2010; Cankoy & Darbaz, 2010)

Referencias

Katrancı, Y., & Şengül, S. (2019). The Relationship Between Middle School Students' Attitudes Towards Mathematical Problem-Posing, Attitudes Towards Mathematical Problem-Solving, and Attitudes Towards Mathematics. *Education and Science*, *44*(197), 1- 24.

Malaspina, U. (2018). La invención de juegos, en el marco de la creación de problemas de matemáticas. Conferencia plenaria en IX CIEM. En Gaita, C.; Flores, J.; Ugarte, F. y Quintanilla, C. (Eds). *Actas del IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, pp. 3-9. Fondo Editorial de la Universidad Nacional de Huancavelica.

http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2019/06/Actas-IX-CIEM-_-2018-IX-Congreso-Intenacional-sobre-Ense%C3%B1anaza-de-las-Matem%C3%A1ticas..pdf

Malaspina, U. & Malaspina, M. (2018). Stimulus of probabilistic thinking by engaging children and primary teachers in game invention. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds) *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 108). Umeä, Sweden: PME.

Malaspina, U., & Malaspina, M. (2017). Development of mathematical thinking in children by means of game invention. En Morska, J.,& Rogerson,A. *Proceedings of the 14th International Conference: Challenges in Mathematics Education for the Next Decade*, Balatonfüred, Hungary (pp 229-234)