UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XIII – Número 51 – Diciembre
2017 http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Página 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo **Latindex, *CAPES*** y otros.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 02-07

EDITORIAL

Este es el número 51 de la Revista Unión, que esperamos refuerce nuestra presencia en el área de Educación Matemática Iberoamericana y para los autores representa también reconocer su calidad. Estas opiniones nos gratifican y nos alientan a seguir dirigiendo la revista en otro nuevo periodo que acabamos de iniciar. Agradecemos la confianza y haremos todos los esfuerzos necesarios para seguir cumpliendo con los objetivos planteados.

En este volumen, nuestro invitado es Dioniso Burak, doctor por la Universidade Estadual de Campinas (1992) y doctorado en la Universidad Federal de Pará. Actualmente es profesor en la Universidade Estadual de Ponta Grossa y en el posgrado en Ciencia y Educación de las Matemáticas de la Universidad Estadual de Centro-Oeste de Brasil. Investigador Sénior en la Fundação Araucaria del Estado de Paraná. Tiene experiencia en el área de Matemáticas con énfasis en Educación Matemática, trabajando principalmente en los temas de modelación matemática, educación matemática, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Burak es una referencia en el estudio de modelación matemática. Ciertamente, su artículo "**Modelagem na Perspectiva da Educação Matemática: Um olhar sobre seus Fundamentos"** contribuye a la discusión sobre este importante y actual tema. Este artículo aporta una perspectiva del modelaje matemático concebido a la luz de las bases teóricas que dan apoyo a la Educación Matemática. Presenta inicialmente las bases teóricas que subyacen a la concepción de la Educación Matemática, con énfasis en su naturaleza y método.

El número 51 contiene doce artículos, que como siempre reflejan una amplia gama de temas. También hay una reseña, además de la sección história de la Matemática y de problemas.

Gustavo Barallobres discute en su artículo **"Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria". "Los Ejercicios de autoevaluación em el aula virtual como método de ayuda al aprendizaje del alumno universitário"** es tema del artículo de Maria Carmen Lozano Gutiérrez y Maria Camino Ramón-Llorens. El artículo **"Introduciendo la escritura de un diario en matemáticas:**

enfoques de la tarea e impacto en el alumnado” ha sido escrito por Eduardo Fernández Delgado y Matias Arce Sánchez. El cuarto artículo es de María Florencia Cruz y Ana María Mantica y se titula**: “El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas”.** El siguiente es el artículo **“Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori”** de Francisco Regis Vieira Alves. **“A Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital”** se explora en el artículo de Armênio Lannes Xavier Neto y Maria José Ferreira da Silva. Los lectores además, encontrarán **“Educação Estatística e as questões do Exame Nacional do Ensino Médio 2016: reflexões sobre o enfoque Ciência Tecnologia e Sociedade”** de Cristiane de Fatima Budek Dias, Caroline Subirá Pereira, Giane Correia Silva, Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves e Guataçara dos Santos Junior. **“Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo”** es de César Trelles Zambrano y Ángel Alsina Pastells y **“¡Estadístic@s en acción!: Una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la estadística revisitada desde la teoría de la cognición situada y una perspectiva constructivista del aprendizaje”** es de Maria Paula Dieser**. “O movimento conceitual de divisão a partir da atividade orientadora de ensino e a proposição da Davydoviana”** del que son autores Josélia Euzébio da Rosa y Sandra Crestani completa la sección de artículos. **“El Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y la Web 2.0 como elementos integradores del conocimiento didáctico del contenido matemático”** escrito por Yerikson Suárez Huz y **“Una imagen vale más que mil datos: las Representaciones Gráficas en la Enseñanza de la Estadística”** de Hugo Granchetti, Christiane Ponteville y Myriam Nuñez son dos artículos de propuestas para la clase con los que termina este número.

En esta edición de nuestra revista se ha reactivado la sección dedicada a la **História Social de la Educación Matemática en Iberoamérica** con el artigo “**La Geometría en la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática”** de Cinthia del Carmen Humbría Burgo y Fredy Enrique González. Esto es un indicio de la cada vez mayor conciencia existente entre los educadores matemáticos iberoamericanos y de otras latitudes, en relación con la consolidación disciplinaria de nuestro campo. La primera etapa de esta sección está representada por los artículos publicados entre el número 029 (2012) y el número 040 (2014).

Antonio Carlos Brolezzi, presenta la reseña del libro **“Uma aventura no antigo Egito”** del que es autor Rafael Rix Geronimo.

El problema publicado en este número 51 “**Construcción de una caja rectangular de volumen máximo: Indagaciones geométricas”** es propuesto por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM.

Para terminar, quisiéramos agradecer lo labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos*:*

Este é o número 51 de nossa Revista UNION, o qual significa seu vigor e importância na área da Educação Matemática Iberoamericana. A procura dos autores por ela também representa que sua qualidade está sendo reconhecida. Isso nos gratifica e nos anima a continuar responsáveis por ela em mais um mandato. Agradecemos pela confiança e faremos esforços para que ela continue a ser um veículo dos conhecimentos produzidos cumprindo seus objetivos.

Neste volume nosso convidado é **Dionísio Burak,** Doutor pela Universidade Estadual de Campinas (1992) e Pós-doutor pela Universidade Federal do Pará. Atualmente é professor da Universidade Estadual de Ponta Grossa e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Pesquisador Sênior da Fundação Araucária do Paraná. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, educação matemática, ensino e aprendizagem e ensino de matemática. Burak é uma referência em estudos sobre modelagem matemática. Certamente, seu artigo "**Modelagem na Perspectiva Da Educação Matemática: Um olhar sobre seus Fundamentos"** muito contribuirá com a discussão sobre esse tema, importante e atual. Esse artigo apresenta uma perspectiva de Modelagem Matemática concebida à luz dos fundamentos teóricos que amparam a Educação Matemática. Inicialmente expõe as bases teóricas que sustentam a concepção de Educação Matemática, com ênfase na sua natureza e método.

O número 51 traz doze artigos, os quais como é habitual refletem uma gama variada de temáticas. Há ainda uma resenha, além da seção de história da Matemática e problemas.

Gustavo Barallobres discute em seu artigo **"Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria". "Los Ejercicios de autoevaluación em el aula virtual como método de ayuda al aprendizaje del alumno universitário é tema do artigo de** Maria Carmen Lozano Gutiérrez *e* Maria Camino Ramón-Llorens. O artigo **"Introduciendo la escritura de un diario en matemáticas: enfoques de**

la tarea e impacto en el alumnado” foi escrito por Eduardo Fernández Delgado e Matías Arce Sánchez. O quarto artigo é de autoria de María Florencia Cruz e Ana María Mantica e se intitula: **“El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas”.** Na sequência encontra-se o artigo **“Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori”** de Francisco Regis Vieira Alves. A temática **“A Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital”** é explorada no artigo de Armênio Lannes Xavier Neto e Maria José Ferreira da Silva. Ainda os leitores podem encontrar **“Educação Estatística e as questões do Exame Nacional do Ensino Médio 2016: reflexões sobre o enfoque Ciência Tecnologia e Sociedade”** de Cristiane de Fatima Budek Dias, Caroline Subirá Pereira, Giane Correia Silva, Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves e Guataçara dos Santos Junior; **“Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo”** de César Trelles Zambrano e Ángel Alsina Pastells; **“¡Estadístic@s en acción!: Una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la estadística revisitada desde la teoría de la cognición situada y una perspectiva constructivista del aprendizaje”** de Maria Paula Dieser; **“O movimento conceitual de divisão a partir da atividade orientadora de ensino e a proposição da Davydoviana”** de autoria de Josélia Euzébio da Rosa e Sandra Crestani. **“El Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y la Web 2.0 como elementos integradores del conocimiento didáctico del contenido matemático”** escrito por Yerikson Suárez Huz e **“Una imagen vale más que mil datos: las Representaciones Gráficas en la Enseñanza de la Estadística”** de Hugo Granchetti, Christiane Ponteville e Myriam Nuñez são dois artigos de propostas para aula e terminam os artigos deste número.

Nesta edição da revista foi reativada a seção dedicada à **História Social de la Educación Matemática en Iberoamérica** com o artigo “**La Geometría en la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática”** dos autores Cinthia del Carmen Humbría Burgo e Fredy Enrique González. Isso é um indício de uma maior consciência existente entre os educadores matemáticos iberoamericanos e de outras latitudes, em relação com a consolidação disciplinária de nosso campo. A primera etapa desta seção está representada pelos artigos publicados entre o número 029 (2012) e o número 040 (2014).

Antonio Carlos Brolezzi, resenhou o livro **"Uma aventura no antigo Egito"** da editora Appris de Curitiba**,** publicado em 2017 e de autoría de Rafael Rix Geronimo.

O problema do número 51 "**Construcción de una caja rectangular de volumen máximo: Indagaciones geométricas"** é proposto por nosso colaborador habitual, o professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM.

Para terminar, agradecemos o trabalho dos revisores e dos demais colaboradores que fizeram possível este número.

Boa leitura a todos!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Página 08

FIRMA INVITADA

DIONÍSIO BURAK

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1973). Especialização em Cálculo Avançado pela Universidade Estadual de Campinas (1975), Mestrado pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1987), Doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (1992). E Pós-doutorado pela UFPA sob orientação Profa. Drª. Rosália Maria Ribeiro de Aragão. Atualmente é rt-20 da Universidade Estadual de Ponta Grossa e rt- 20 do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Pesquisador Sênior da Fundação Araucária do Paraná. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, educação matemática, ensino e aprendizagem e ensino de matemática. E-mail: dioburak@yahoo.com.br
Endereço para acessar este CV: http://lattes.cnpq.br/3096837034284131.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 09-26

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Modelagem na Perspectiva da Educação Matemática: Um Olhar Sobre seus Fundamentos

Dionísio Burak

Resumen	Este artículo aporta una perspectiva de modelage matemático concebida a la luz de las bases teóricas que dan apoyo a la Educación Matemática. Presenta inicialmente las bases teóricas que subyacen a la concepción de la Educación Matemática, con énfasis en su naturaleza y método. Luego remite la presentación de las bases teóricas que reenvían el hacer en el Modelage Matemático en la perspectiva de la Educación Matemática cuando se centra principalmente en la educación básica, que comprende la educación de los niños, la escuela primaria y la escuela secundaria con el objetivo aportar una enseñanza matemática que supere las formas actuales de enseñanza de las matemáticas y pueda aportar una práctica educative más amplio que la perspectiva disciplinaria. **Palabras claves:** educación matemática; modelage matemático; educación básica; bases teóricas.
Abstract	This article brings a mathematical modeliing perspective conceived in the light of the theoretical foundations that give support to Mathematical Education. It initially presents the theoretical bases that underlie the conception of Mathematical Education, with emphasis on its nature and method. Then forwards the presentation of the theoretical bases that forward the doing in Mathematical Modeling in the perspective of Mathematics Education when focused primarily on basic education, which comprises children's education, elementary school and high school with the objective to contribute a math teaching that surpasses the current ways of teaching mathematics and can contribute a more comprehensive educational practice than disciplinary perspective. Keywords: mathematics education; mathematical modelling; basic education; theoretical basis.
Resumo	O artigo apresenta uma perspectiva de Modelagem Matemática concebida à luz dos fundamentos teóricos que amparam a Educação Matemática. Inicialmente expõe as bases teóricas que sustentam a concepção de Educação Matemática, com ênfase na sua natureza e método. Em seguida são explicitados os encaminhamentos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, quando voltada, prioritariamente, à Educação Básica, que compreende a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, com o objetivo de contribuir com um ensino de Matemática que supere as atuais formas de ensinar matemática e contribua com uma prática educativa mais abrangente do que a perspectiva disciplinar. **Palavras-chave:** educação matemática; modelagem matemática; educação básica; bases teóricas

1 Considerações Iniciais

As últimas décadas trazem avanços nos diferentes campos da atividade humana. O conhecimento científico e tecnológico potencializa os recursos da engenharia, da produção industrial e agrícola, dos meios de comunicação, das técnicas cirúrgicas e tratamento de saúde, como na área médica. Tais avanços são visualizados no campo econômico, político e social e, tão logo, na educação.

A Educação apresenta avanços em muitos aspectos, dentre eles a ampliação do acesso à escola para todas as faixas etárias, avanços, ainda que não potencializados pela Lei 9394/96[1], com as modalidades de ensino Educação de Jovens e Adultos (EJA), Educação Especial, a Educação Profissional e Tecnológica, Educação Indígena, Educação a Distância, Educação do Campo que contemplam a maioria dos estudantes em distintas faixas etárias, bem como, atendem características e especificidades da população, relacionada à diversidade socioeconômica

No entanto, a par das ações requeridas pela legislação, ainda persistem problemas na forma de ensinar e aprender as disciplinas curriculares, notadamente o ensino e aprendizagem da Matemática. Os resultados apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica - Saeb[2], o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM[3] e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - Pisa[4]. Essas avaliações apresentam resultados pouco alentadores. Normalmente as explicações se resumem em justificar que os estudantes aprendem muito pouco, não dominam os conceitos básicos da Matemática. As pontuações obtidas no Pisa, edições de 2014 e 2016, estão aquém do esperado ainda que, comparativamente, o último resultado de 2016 apresente um aumento de 16 pontos em relação a 2014.

Os resultados pouco alentadores têm muitas causas, entre elas um currículo construído sem a participação dos educadores, a falta de estrutura das escolas, a desvalorização da profissão dos professores, entre outros fatores que influenciam e interferem de forma direta no processo de ensino e aprendizagem. Muitos problemas relacionados à aprendizagem decorrem de uma forma de ensino que foca, especificamente, os conteúdos, no caso a Matemática, muitas vezes, centrado numa perspectiva de transmissão de uma ciência pronta e acabada, em que o professor centraliza o processo de ensino. Para Mizukami (1986), esta perspectiva traduz o ensino tradicional que tem como primado o objeto. O estudante é um simples depositário. O grande problema do ensino tradicional é a ausência de valorização do estudante no processo de construção do conhecimento. E, se não for para permitir o acesso ao conhecimento, associado à formação humana, qual é a utilidade da escola?

[1] A Lei de Diretrizes e Bases da Educação que estabelece as diretrizes da Educação no Brasil e compreende a Educação Básica, e suas modalidades, que é obrigatória e gratuita dos 4 aos 17 anos e compreende: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.
[2] Sistema de avaliação da Educação Básica (Saeb), instituído em 1990, é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala e tem como principal objetivo realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de alguns fatores que interferem no desempenho do estudante, fornecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino ofertado.
[3] Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) que tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao final da escolaridade básica.
[4] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - Pisa.

Com o propósito de ver superada esta metodologia de ensino, o artigo traz elementos que embasam o ensino de Matemática com a mediação da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Inicialmente, apresenta elementos teóricos que amparam a Educação Matemática, enfatizando elementos que constituem sua natureza e metodologia, partindo do Modelo do Tetraedro de Higginson (1980), com base nos estudos de Rius (1989a e 1989b), Kilpatrick (1996) e a contribuição dos estudos de Burak e Kluber (2008), entre outros. Na sequência realiza a discussão dos fundamentos que sustentam o ensino de Matemática na Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, a partir dos paradigmas dos estudos de Santos (2006a e 2006b e Morin (2005; 2006 e 2008), da natureza, e método da Educação Matemática que abalizam e justificam os procedimentos adotados na Modelagem na perspectiva da Educação Matemática[5].

2 A Educação Matemática, trajetória e elementos teóricos fundantes

A Educação Matemática originária de um movimento surgido na transição dos séculos XIX e XX, a partir do livro *The psychology of number and Its applications to methods of teaching arithmetic,* escrito em 1895, por McLellan e Dewey e seguido por tantos outros educadores, como John Perry que, em 1901, durante a reunião da Bristish Association, em Glasgow diz ser imensamente importante “[...] considerar que a adoção de um método de ensino elementar deve satisfazer um jovem, entre mil, que gosta de raciocínio abstrato, mas que é igualmente importante que os demais não sejam prejudicados.” (*apud* D’ Ambrósio, 2004, p.71).

No artigo D’Ambrósio (2004) considera que a crise e os conflitos de opinião sobre as reformas na educação estimulam alguns pesquisadores matemáticos, preocupados com a educação dos próprios filhos, a voltar as atenções para o ensino da Matemática. Dentre estes o casal de ingleses Grace C. Young e Willian H. Young que propõem trabalhos manuais como forma de o concreto auxiliar no ensino da geometria.

Todavia o passo mais importante no estabelecimento da educação matemática, como disciplina, é dado por Felix Klein quando, em 1908, publica o livro *Matemática elementar de um ponto de vista avançado*, defendendo, segundo D’Ambrosio mais atenção às “[...] bases psicológicas do que sistemáticas.”(2004, p.72) A consolidação da educação matemática como subárea da matemática e da educação, de natureza interdisciplinar, dá-se com a fundação, em 1908, da Comissão Internacional de Instrução Matemática – IMUK/ICMI, sob a liderança de Felix Klein, conforme D’Ambrósio (2004) durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos.

Com a criação de grupos especializados nas organizações profissionais, notadamente as americanas, no decorrer do século XX, alguns pontos são observados: em princípio um interesse maior para a educação matemática com a fundação, em 1920, do *Nacional Council of Teacher of Mathematics* – NCTM. As

[5] Utiliza-se a expressão Modelagem na Educação Matemática nas referências à Modelagem Matemática na Educação Matemática

reuniões anuais, do NCTM, segundo D'Ambrosio mostravam "[...] uma presença cada vez mais crescente de autores de livros didáticos e dentre eles, alguns eram importantes pesquisadores em educação matemática". (2004, p. 72). Porém, estas presenças, nas reuniões, tinham outra finalidade e, assim, para os pesquisadores em educação matemática, o ambiente começava a ficar pouco convidativo. No período pós-guerra, as propostas de renovação curricular ganham simpatia em vários países. Ainda segundo D'Ambrósio (2004), nos Estados Unidos, criam-se projetos com repercussões internacionais e, dentre eles, o *University of Illinois commitee on school mathematics* em 1951, sob a liderança de Max Bieberman e, em 1958, o *School mathematics study group* - SMSG sob a liderança de Edward G. Beagle, na Stanford University.

A insuficiente participação dos interessados nas pesquisas em educação matemática e desvios de interesses nas reuniões das organizações, dão espaço suficiente à ideias de importantes matemáticos, dentre eles Jean Dieudonné que com as propostas de renovação curricular suscita o movimento denominado, no Brasil, de Movimento Matemática Moderna.

Em decorrência desse movimento, nos Estados Unidos surgiram muitos projetos na década de 1960, que ensejaram à necessidade de criação de centros de referência, entre eles, o *International Clearinghouse on Science*. As últimas décadas trouxeram avanços nos diferentes campos da atividade humana and Mathematics Curricular Development em Maryland, conforme D'Ambrosio (2004), sob a direção de J. David Lockard. A realização do primeiro Congresso Internacional de Educação Matemática – ICME, em Lyon, França, em 1969, e os demais que se seguiram com periodicidade a cada quatro anos. O terceiro congresso Internacional de Educação Matemática, de 1976[6], na Alemanha, traz, na programação, temas tais como: Educação Matemática nos níveis pré-elementar e primário, formação e vida profissional dos professores de matemática, além de temas sobre avaliação, investigações relacionadas ao processo de aprendizagem, à educação de adultos, às tecnologias educativas e preocupações com o currículo escolar, entre outros que são temas de investigação na Educação Matemática.

Os artigos de Rius sobre *La Educación Matemática: Uma reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodologia* (1989a e 1989b) publicados pela *Revista Educación Matemática* do Grupo Editorial Iberoamerica – México trazem importantes discussões em relação à educação matemática. Estes embates, inicialmente, carecem de um ponto de vista único ao explicar a natureza da Educação Matemática, considerada uma disciplina nova. Diversos intentos explicam sua natureza. Cada autor tem um enfoque distinto e coloca ênfase em um aspecto particular. Enquanto Alfhors (s/d), um matemático, destaca os conteúdos e estratégias para a solução de problemas, Griffits e Howson (1974) expressam, (*apud* Rius,1989a) que não é o único propósito da Educação Matemática a apresentação de um corpo fixo de conteúdos matemáticos. Freudenthal (1978) considera que não há educação nem desenvolvimento educativo sem uma filosofia subjacente.

6 III Congresso Internacional de Educação Matemática-III ICME, em Karlsruhe –Alemanha com a presença de mais de 2000 educadores, representando 76 países.

Entretanto, apesar das diferenças dos enfoques, Wain (1978), afirma que “[...] todos coincidem em considerar a Educação Matemática uma atividade operacional fundamentada em uma variedade de áreas de estudo e cujo objetivo é a análise da comunicação nas Matemáticas”. (*apud* Rius, 1989a, p. 30).

O maior avanço nas discussões é dado por Willian Higginson (1980), durante seu ano sabático na Universidade de Cambridge, quando escreve um ensaio sobre os fundamentos da Educação Matemática. A questão levantada por Higginson: “[...] há algo, além da Matemática, significativamente envolvido na Educação Matemática?” A afirmação clássica desta visão é de G. H. Hardy (1925, p.309, *apud* Higginson,1980, p. 4) no contexto do discurso presidencial na Associação Matemática, em 1925. Na ocasião, Hardy afirma: “No ensino de Matemática há uma coisa apenas de imputação primária que um professor deve fazer, um honesto tentar entender o assunto que ele ensina, bem como, ele pode e deve expor a verdade a seus alunos até os limites de sua paciência e capacidade”.

Para Higginson, a questão fundamental que se coloca à Educação Matemática é: “Existe algo, além da Matemática, significativamente envolvida na Educação Matemática?” (1980, p.4). Esta questão, para Higginson, manifestada anteriormente por Hardy, está na raiz de um dos mais graves problemas: a lacuna de incompreensão entre matemáticos e educadores matemáticos e reitera que não há avanços nas questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da Matemática enquanto esses fundamentos não são suficientemente compreendidos.

Na perspectiva de compreensão, Higginson (1980) coloca que a Educação Matemática é constituída por quatro dimensões: da Matemática, da Psicologia, da Filosofia e da Sociologia. Essa configuração é nominada de Modelo do Tetraedro de Higginson (MAPS), cujas faces são constituídas pelas quatro áreas M=Matemática, A=Filosofia, P=Psicologia e S=Sociologia. Sob essa configuração geométrica percebe-se, de forma clara, as possíveis interações e confluências entre as arestas vértices, pelas intersecções das faces. Para questões como: O que? Como? Quando? Quem? Onde? e Por quê? Higginson, afirma que estas disciplinas são não somente necessárias, mas suficientes para definir a natureza da Educação Matemática.

Na explicitação das questões, O que, diz respeito, principalmente, à dimensão Matemática. Por que, diz respeito à dimensão Filosófica, quem e onde à componente Social, e Quando e Como ao componente da Psicologia.

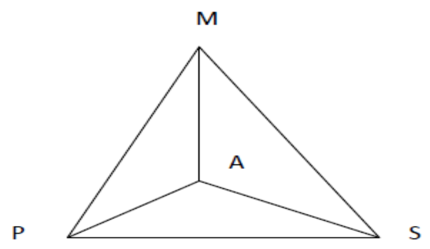


FIGURA 1: Modelo do Tetraedro de Higginson
Fonte: Burak e Klüber (2008, p. 96)

Portanto, mesmo que defasado, o Modelo do Tetraedro de Higginson constitui-se em um novo constructo para o ensino de Matemática. Ele traz a proposta de um novo paradigma para o ensino da Matemática, na medida em que introduz áreas da educação que auxiliam na superação do problema, gerado no âmbito da própria matemática, em relação à comunicação. Para Higginson (1980), este modelo e a otimização de seus efeitos podem mudar com o tempo e lugar. Os avanços nas áreas que constituem o modelo, por exemplo, ditados pela Psicologia, da Sociologia e a incorporação de outras áreas, assevera que há uma dinâmica, na Educação Matemática e, assim, a configuração é alterada.

Os estudos de Burak e Klüber (2008) mostram que, atualmente, a incorporação de outras esferas na Educação Matemática, entre elas a Língua Materna, importante na comunicação da Matemática e da Antropologia na observação da situação da sala de aula, delineia uma configuração, conforme figura abaixo.

Educação Matemática

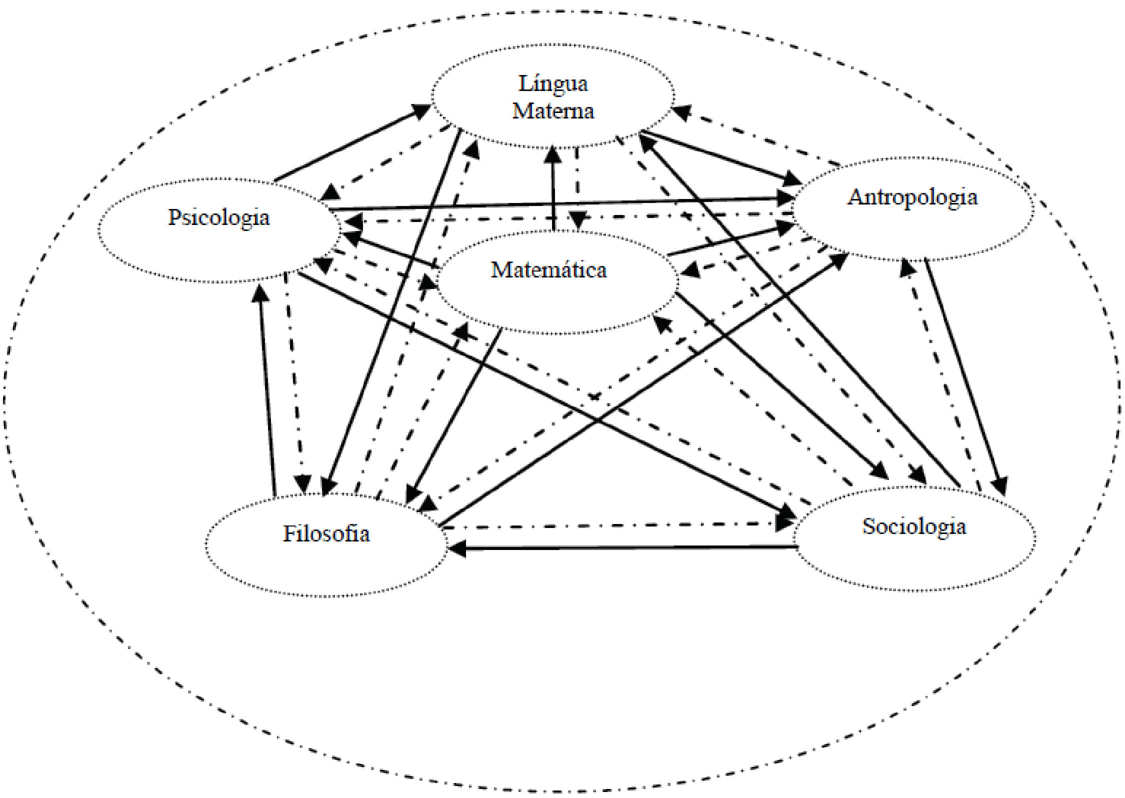


FIGURA 2: Configuração atual da Educação Matemática
Fonte: Burak e Klüber (2008, p. 98)

A figura 2 exibe uma configuração para a Educação Matemática. Reflete uma tentativa de respostas à pergunta formulada por Higginson, ao oferecer várias perspectivas. A primeira é que, com as mudanças verificadas com os avanços nas áreas da Psicologia, principalmente os ditados pela Psicologia da Cognição, cujos expoentes são, entre outros: Piaget (1974), Bruner (1976), Ausubel (1968) e pela Psicologia Histórico-Cultural, de Vygotsky (1984), atribui-se às relações sociais importância fundamental no desenvolvimento intelectual. Além disso, há incorporação de mais áreas à Educação Matemática, como a Antropologia que, segundo Martins e Morais (2005) possibilita decodificar e analisar valores e universos culturais constituintes da instituição escola e, também, expressa manifestações culturais não formais. Neste entendimento, Gusmão (2005) afirma que, a antropologia, com seu quadro teórico e metodológico aplicado ao fazer de outros campos do saber, contribui para o diálogo interdisciplinar. Ainda, tal entendimento se conforma ao de Rius quando expressa que:

> [...] a cada dia a Antropologia é uma disciplina que tem mais a ver com a Educação Matemática. O método da observação participante, de que se vale o antropólogo para estudar uma comunidade é hoje popular entre os investigadores da dinâmica da sala de aula. (1989a, p. 36).

A Linguística, interessada no estudo da linguagem, é importante na forma de comunicação da Matemática e na linguagem matemática como o discurso da aula. É objeto de reflexão, pois confere e promove a explicitação de duas formas de entender o conhecimento, sob o ponto de vista das Ciências Naturais e das Ciências Humanas e Sociais. Desta forma, compreende-se que, na Educação Matemática, a substantivação está na Educação e a adjetivação está na Matemática.

O arranjo da figura 2 destaca a interação entre os atuais componentes da Educação Matemática, ampliando a perspectiva ao tratar e abordar o complexo processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Essa forma de conceber a natureza da Educação Matemática, aliada aos estudos que visam metodologias diferenciadas para o ensino de Matemática, prioritariamente no âmbito na Educação Básica, apresenta alternativas metodológicas para o ensino da Matemática. Este estudo explicita os pressupostos que fundamentam e sustentam os procedimentos da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

A Modelagem Matemática, desde os anos de 1980, é estudada e organizada para se constituir em opção para o ensino de Matemática. Nessa trajetória, insere-se o modo de conceber a Modelagem, que supera a visão de Modelagem Matemática originária da Matemática Aplicada, alinhada aos pressupostos das Ciências Naturais.

Essa trajetória envolve estudos, discussões, reflexões durante a realização de cursos de formação continuada para professores da Educação Básica e nos cursos de Pós-Graduação, nas disciplinas de Licenciatura em Matemática e dos cursos de Pedagogia, bem como, a partir da prática efetiva de sala de aula com estudantes da Educação Básica. Esta formulação da Modelagem é elaborada na interação com professores da Educação Básica, estudantes da graduação, da pós-graduação e da escola básica, durante as últimas três décadas.

3 A Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática

A Modelagem, como alternativa para o ensino de Matemática visando principalmente a Educação Básica, inicia em 1985, com as primeiras ideias lançadas aos professores deste nível de ensino. A trajetória é marcada e balizada pelas perguntas: como ensinar a Matemática de forma a favorecer a aprendizagem dos estudantes? Como dar mais sentido e significado ao ensino da Matemática? Dessa forma, o percurso começa com as referências existentes da Modelagem Matemática, originária da Matemática Aplicada.

Desde 1987, há ações continuadas para superar metodologias existentes e propor modo mais eficiente de ensinar e aprender matemática. No período, os cursos sobre a Modelagem Matemática criam expectativas diversas para a adoção no contexto da Educação Básica. Os escritos de Rius (1989a; e 1989b), abrem caminhos para encontrar respostas às perguntas apontadas anteriormente.

O caminho apresenta duas possibilidades: seguir em frente, trabalhando a Modelagem na perspectiva da Matemática Aplicada ou trilhar o caminho que a Educação Matemática propõe ao discutir sobre sua natureza e metodologia. Para o trabalho junto aos professores do ensino de 1º e 2º graus, denominação à época para as atuais, Ensino Fundamental e Médio, a decisão é abrir um novo caminho, construir uma nova perspectiva para Modelagem incorporando, ainda que implicitamente, as preocupações de Hardy (1925) e a pergunta de Higginson (1980).

Dessa forma, insere-se às práticas de modelagem realizadas os encaminhamentos espontâneos, os sentidos que as próprias atividades ensejam. Assim, a partir dos anos 90, seleciona-se as leituras e os estudos de educadores com concepção de educação libertadora numa Filosofia contestadora do conceito bancário[7] da Educação e as ideias de pensadores como Dewey (1972) um expoente da escola progressiva americana e forte crítico à forma de transmissão de conhecimentos e fatos como objetivos da Educação. Também, são empreendidos estudos, discussões e reflexões nas linhas da psicologia, epistemologia e sociologia que alicerçam a bases teóricas de sustentação e fundamentação para as mudanças.

Os trabalhos, publicados a partir da metade dos anos de 1990, incorporam as mudanças assumidas ao longo dos anos. Assim, institui-se outra forma de encaminhamento para as atividades de Modelagem Matemática na Educação Matemática, contemplando os pressupostos da Educação Matemática e o pensamento de posturas mais críticas em relação à Educação. Há a ampliação de conceitos de modo a abastecer o ensino de Matemática, utilizando uma metodologia que favorece a aprendizagem, tornando o estudante mais dinâmico, mais participativo, com interesse pelo estudo, aprimorando a capacidade de reflexão, o exercício da autonomia, a argumentação, favorecendo o relacionamento com os pares. Enfim, proporciona-se uma educação significativa ao cidadão do século XXI.

Assim, a expectativa é atingir estes objetivos para a formação de um ser humano que, mais que aprender Matemática, adquira subsídios que o ajudem tomar decisões. Nessa perspectiva as atividades de Modelagem, metodologicamente, se constituem de etapas não fixas, mas que orientam e encaminham, pedagogicamente, a prática educativa mediada pela Modelagem Matemática.

Estas etapas, com a Modelagem Matemática, contemplam as dimensões da Educação Matemática propostas por Higginson (1980), a dimensão da psicologia,

[7] Conceito cunhado por Paulo Freire (1970) em que o aluno é visto como uma conta vazia a ser preenchida pelo professor.

principalmente da teoria Cognitivista, que tem como foco o ensino e a aprendizagem dos estudantes da Educação Básica, entendendo o estudante ativo e capaz de elaborar seus conhecimentos. Têm, nos estudos de Piaget, Ausubel, Bruner e Vygotsky entre os outros, numa ótica multirreferencial, as fontes que subsidiam, fundamentam e justificam os encaminhamentos metodológicos adotados no complexo processo que envolve o ensino e a aprendizagem.

Do ponto de vista do conhecimento, a Modelagem Matemática na Educação Matemática tem seu estofo nos estudos de Boaventura de Sousa Santos (2006a; 2006b) e Edgard Morin (2005; 2006; 2008) com o propósito de superar, segundo Martins "[...] as críticas dirigidas aos modelos científicos estruturados a partir do racionalismo cartesiano e do positivismo comteano". (2004, p.85). A Modelagem Matemática na Educação Matemática também é considerada, sob o ponto de vista metodológico, uma prática social, segundo, Miguel, pois como uma tendência metodológica da Educação Matemática tem nela seus pressupostos:

> [...] Só se podem conceber tanto a Matemática, a Educação e a Educação Matemática como práticas sociais, ou seja, atividades realizadas por um conjunto de indivíduos que produzem conhecimentos, e não unicamente como um conjunto de conhecimentos produzidos por um indivíduo em suas atividades. (Miguel, 2004, p. 82).

Portanto, a Modelagem Matemática, neste sentido, é uma prática social, conforme Miguel. Partilha-se do entendimento do autor, uma vez que inclui: "1) uma comunidade humana ou conjunto de pessoas; 2) um conjunto de ações realizadas por essas pessoas em um espaço de tempo determinado; 3) por um conjunto de atividades orientadoras de tais ações e 4) por um conjunto de conhecimentos produzidos por tal comunidade". (Miguel, 2004, p. 82).

A Modelagem Matemática, no entendimento assumido, ao ser uma prática social, promove entre outras discussões aquela que trata da questão do método, com implicações em relação à pesquisa, ao ensino e à aprendizagem, quando por ela mediada. As colocações de Rius (1989, b) acerca dos debates sobre o método na Educação Matemática, são transferidas, também, em relação à Modelagem Matemática na Educação Matemática, desde algumas ideias centrais de duas Escolas Filosóficas da época: O Racionalismo Crítico de Popper e a Teoria Crítica de Adorno e Habermas.

Para o Racionalismo Crítico há um método único para o estudo do objeto, seja ele humano ou natural. Para a Teoria Crítica o método liga-se direta e irrevogavelmente ao objeto de estudo. Isto significa que, para uma melhor compreensão do estudo de cada objeto, é necessário um método capaz de explicar as particularidades desse objeto.

No alcance da pesquisa educacional a controvérsia se faz entre dois modelos: o Modelo da Agricultura e o Modelo da Antropologia. A orientação epistemológica da Modelagem na Educação Matemática, em conformidade com a orientação da Educação Matemática, em vista de sua natureza, tende a seguir a linha das Ciências Sociais e Humanas e orienta a natureza da investigação, que é qualitativa, e visa explicações para a complexidade do processo de ensino e aprendizagem existente na esfera da Educação Básica. Essa forma de orientar as investigações educacionais mantém estreita vinculação com os adeptos da teoria crítica que, segundo Rius, confessam-se aristotélicos e afirmam que “[...] o método está necessária e irrevogavelmente referido ao objeto e que cada objeto impõe uma metodologia específica”. (1989b, p.31).

Nesse entendimento, o método científico não é o melhor orientador das pesquisas da Modelagem na Educação Matemática, na medida em que não diferencia o humano e o natural, conforme aponta Rius quando diz: “Para o racionalista crítico há um único método científico, comum às ciências sociais e naturais, cujo propósito é experimentar tentativas de soluções aos problemas”. (1989 b, p. 31)

Desta forma, a Modelagem, na perspectiva da Educação Matemática, difere de outras, na sua conceituação, quando expressa ser “[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões”. (BURAK, 1992, p. 92). O conjunto de procedimentos se constitui nas etapas e no entendimento de que fenômeno é tudo o que pode ser percebido pelo sujeito.

Dois princípios também são estabelecidos por Burak (1992, p. 51) para o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem na Educação Básica: 1) partir sempre do interesse do(s) grupo(s) de participantes e 2) os dados são coletados, sempre que possível, onde se dá o interesse do(s) grupo(s). Esses princípios são justificados por vários estudiosos. Sob o ponto de vista da psicologia, os estudos na linha do Cognitivismo indicam que o interesse também é despertado por perguntas, ou ainda, quando relacionado à vivência do cotidiano do estudante: um assunto, uma brincadeira, entre outras tantas possibilidades, são considerados como potencializadores da aprendizagem.

O princípio dois tem fundamentos na Etnografia, e favorece uma abordagem mais completa dos fenômenos, por ser um método qualitativo, segundo Gallagher (1984), favorece a melhor compreensão sobre os motivos, valores e crenças, atitudes e compromissos subjacentes aos fenômenos observados. Para Wolcott (1975), o uso da Etnografia em Educação propicia pensar o ensino e a aprendizagem num contexto cultural amplo. De modo geral o enfoque antropológico e a teoria crítica consideram o objeto de estudo estruturalmente, significando segundo Rius “[...] que independentemente do que trata o problema, este somente terá sentido se, se analisa em termos estruturais”. (1989b, p. 32).

Para fins de encaminhamento das atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, Burak (2004) sugere cinco etapas, não rígidas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento do (s) problema(s); 4) resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos relacionados ao tema e 5) análise crítica da solução ou soluções.

1. A escolha do tema, que é sempre do grupo ou dos grupos de participantes, é coerente com a epistemologia do conhecimento complexo na perspectiva de Morin (2006), quando recupera a visão de globalidade, do todo, principalmente no sistema

educativo que privilegia a separação, não apenas por ser centrado nas disciplinas, mas porque não há interação entre as disciplinas.

Vive-se uma realidade multidimensional ao mesmo tempo sociológica, psicológica, cultural que são estudadas de forma compartimentada o que corrobora a afirmação de Morin, quando diz: “Os princípios transdisciplinares, fundamentais da ciência, a matematização, a formalização são precisamente os que permitiram desenvolver o enclausuramento disciplinar”. (2005, p. 136). Petraglia, ao tratar sobre o currículo considera que: “O currículo escolar é mínimo e fragmentado. Na maioria das vezes peca tanto quantitativamente como qualitativamente. Não oferece através de suas disciplinas, a visão do todo, do curso e do conhecimento, nem favorece a comunicação e o diálogo entre os saberes”. (2005, p. 69). Além disto, dificulta a perspectiva de conjunto e de globalização considerados fatores importantes para a aprendizagem.

Partir de um tema possibilita estudar o fenômeno em várias dimensões, em consonância com o ser do estudante que é uma unidade complexa, ao mesmo tempo, biológica, psicológica e social. Os temas, inicialmente, podem não ter nada de matemática. O fato pode despertar no professor alguma ansiedade, algum temor por suscitar dúvida se há matemática no tema proposto e o que desenvolver. Estas questões fazem parte do cotidiano escolar, principalmente nas escolas que têm como meta o cumprimento de um programa com determinados conteúdos matemáticos.

2. Pesquisa exploratória é o modo de conhecer o assunto pois, muitas vezes, o os estudantes não têm muitas informações sobre o tema. No nível de ensino considerado, a Educação Básica, raramente se parte de um problema ou uma situação problema mas, mesmo assim, é necessário colher informações sobre o assunto.

Na Modelagem na perspectiva da Educação Matemática esta etapa é importante para o estudante envolvido conhecer mais sobre o tema, procurar esclarecimentos, sempre que possível, no local em que se localiza o interesse do grupo. Além de se constituir em uma das premissas para o trabalho na visão de Modelagem, é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico, mais atento à situação em estudo.

Para conhecer melhor algum objeto ou evento há que se organizar, saber buscar e como enunciar questões que produzam respostas. Portanto, formular questões, refletir como, onde e como coletar informações sobre o assunto é importante: qual a forma mais adequada para se colher os dados? Onde encontrar dados sobre o tema? Quais os tipos de instrumentos a serem construídos? Quais as características das questões a serem formuladas? Como devem ser formuladas? Saber como organizar os dados e como fazer o tratamento deles constitui-se um valor formativo do estudante.

Essa etapa fundamenta-se nos pressupostos de pesquisa qualitativa, cujos precursores são Bogdan e Biklen (1994), Gallagher (1984), e Wolcott (1975). Os métodos de corte antropológico do tipo etnográfico, fenomenológico, estudos de caso e outras formas de pesquisa participante ajudam na quantidade e qualidade dos dados coletados. No caso da Modelagem e na perspectiva assumida, a natureza dos dados são, de modo geral, qualitativos e permitem tratar os temas sob enfoques distintos, além da ótica matemática.

3. Levantamento do(s) problema(s). Esta etapa constitui-se num momento relevante no desenvolvimento das atividades de Modelagem. É a ocasião em que surgem várias questões como resultado da coleta dos dados na pesquisa exploratória. A ação do professor, como mediador, é significativa pois oportuniza fortalecer, no estudante, aptidões para rever os dados coletados sob uma perspectiva crítica, favorece a construção de problemas ou situações-problemas, a partir da discussão dos dados coletados. A qualidade da ação favorece o aprimoramento da autonomia, a formação de um espírito crítico do estudante que dá sentido e significado à resolução de problemas levantados. É um diferencial no ato educativo por trabalhar as capacidades de organizar, articular e expressar os dados coletados, sob forma de problemas. É um valor formativo e atitudinal, de incomparável significado educativo.

Estes são os primeiros passos para aprimorar a capacidade de, com a mediação do professor, mobilizar e articular conhecimentos para traduzir e transformar situações do cotidiano em situações matemáticas e problemas que envolvem as ciências humanas e sociais, no propósito de proporcionar respostas e soluções que podem ser matemáticas, de atitudes e de comportamento. O levantamento de problemas, segundo Burak “[...] é ainda, uma ação cognitiva por excelência, porque é resultado de um encadeamento que promove a intuição e lógica”. (2010, p. 22).

4. Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento dos conteúdos relacionados ao tema. Dá-se a resolução do(s) problema(s) levantados na etapa anterior e também há a possibilidade de estender os assuntos e conteúdos relacionados com o tema. Na resolução de um problema ou de uma situação-problema, os conteúdos matemáticos ganham importância e significado. Para Burak (2010) as operações, as propriedades, e os diversos campos da matemática, presentes neste momento, atribuem significados aos conteúdos matemáticos. Mobiliza-se, em relação aos problemas matemáticos, todo o ferramental disponível. Os diversos conteúdos, necessários às soluções do problema estendem-se aos diversos campos da matemática ou de outros conhecimentos envolvidos no estudo.

Outro aspecto positivo que essa fase proporciona é que a resolução do(s) problema(s), diferente da forma usualmente encontrada na maioria dos livros textos, ganha novos contornos e sentidos 1) elabora os problemas a partir dos dados coletados em campo; 2) prioriza a ação do estudante na elaboração; 3) parte de uma situação contextualizada; 4) favorece a criatividade na medida em que incentiva o estudante a criar distintas estratégias de pensamento, na solução; 5) confere maior significado ao conteúdo matemático usado na resolução; 6) favorece a tomada de decisão e 7) mais abrangentes, os problemas geram vários subproblemas.

Em outras concepções de Modelagem Matemática, foca-se a construção de um modelo matemático. Entretanto, este não é prioridade quando as práticas ocorrem na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois neste período da formação das crianças há que ensiná-las a construir conceitos mais do que se apropriar de fórmulas e realizar matematizações que pelo nível de abstração exigido, não lhes são significativas. Mesmo nos anos finais do Ensino Fundamental, ainda é prioridade a formação de conceitos e a construção do conhecimento matemático por parte do estudante, pois a educação utiliza modelos prontos, conforme Burak e Aragão “[...] a maioria dos conteúdos trabalhados nesse nível de escolaridade vale-se de modelos já prontos: funções, equações lineares ou quadráticas, fórmulas das áreas das superfícies das figuras planas, áreas das superfícies laterais e totais e volumes de figuras espaciais”. (2012, p. 97).

Nesta forma de conceber a Modelagem, Burak e Aragão (2012) entendem modelo como uma representação que contempla e engloba, além dos modelos matemáticos, uma lista de supermercado, a planta baixa de uma casa, uma figura, um gráfico entre outras. Na maioria das situações, estes modelos permitem a tomada de decisão, mas não facultam fazer predições.

Isto não significa que não se possa construir modelos simples quando, em dada situação, houver necessidade de trazer novos elementos para a o contexto em estudo. Há que considerar o ferramental matemático construído pelo estudante nessa fase da escolarização. Um modelo simples, que reproduza as características do fenômeno estudado, mesmo com uma matemática elementar, é suficiente para esclarecer melhor uma determinada situação.

Nessa perspectiva de Modelagem que contempla além das Ciências Naturais as Ciências Humanas e Sociais, os fundamentos e métodos da Matemática não mudam em nada. Ensejam, ao professor, uma perspectiva mais ampla sobre o ensino pois nela se reconhecem os diferentes objetos de estudo. Sob o ponto de vista apenas das Ciências Naturais, o objeto único é a construção do conhecimento matemático. Quando a Matemática é considerada, além de uma ciência, uma forma de linguagem sua utilidade nas atividades cotidianas de compra e venda e como uma disciplina escolar, se enriquece e transforma-se em uma Ciência Humana e Social, pela adoção das áreas da Educação, da Antropologia, da Linguística nos estudos das linguagens, seja a linguagem matemática ou a linguagem para realizar o discurso da aula nos pressupostos dos paradigmas pós-modernos.

Ao reconhecer a complexidade do processo que envolve o ensino e a aprendizagem da Matemática recorre-se a Morin (2006), quando salienta que o conhecimento enfrenta a complexidade, conceito com o significando de o que foi tecido junto. Reitera que a educação promove a inteligência geral apta a referir-se ao complexo, ao contexto, de modo multidimensional e dentro da concepção global.

É nessa perspectiva que a Modelagem na Educação compartilha do mesmo entendimento. O aperfeiçoamento das várias habilidades capacita o estudante para as competências mais específicas, pois segundo Morin (2006) quanto maior a abrangência da inteligência geral, mais recursos mobiliza para tratar de situações mais particulares. Para Morin, a educação do futuro deve “[...] ao mesmo tempo utilizar os conhecimentos já existentes, superar antinomias decorrentes do progresso nos conhecimentos especializados, na sua nobre missão de promover a inteligência geral dos indivíduos”. (2006, p. 39).

4. Análise crítica da (s) solução (ões). No processo da Modelagem ocupa um momento singular para discutir as hipóteses consideradas quando do levantamento do (s) problema (s), seus alcances e implicações e as soluções encontradas. Acontece concomitantemente à etapa da resolução do (s) problema (s).

É a ocasião propícia para o aprofundamento ou esclarecimentos dos aspectos matemáticos, em relação aos conteúdos, linguagem matemática, a forma de linguagem utilizada em sala de aula, para a análise da coerência e a consistência lógica da solução encontrada. São também avaliados os aspectos não matemáticos, encontrados na situação em estudo que, por ser temática, envolve de forma espontânea outras áreas do conhecimento, objetos de discussão, sob diversos pontos de vista: ambiental, econômico, social e cultural. É favorável para se mostrar e comentar as soluções empíricas e as mais formais, pois, muitas vezes, nessa fase de escolaridade se parte do empírico para o formal. A oportunidade de refazer o processo de pensamento sobre uma determinada situação favorece cada estudante e o grupo, e promove a autoavaliação. Aqui se envolve e incentiva a participação dos estudantes nas discussões.

Para Burak

> [...] discutir as ações decorrentes de uma constatação matemática ou não que resultou em um problema ou uma situação-problema, as consequências das decisões tomadas, as relações as repercussões em vários níveis dentre eles: o individual, familiar, comunitário, as relações possíveis sob diversos enfoques, constitui o ponto forte dessa prática educativa, mediada pela Modelagem. (2010, p.25),

4 Considerações sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática

A Educação do século XXI, rompe com o atual modelo de ensinar e aprender matemática. Por meio da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, supera os modelos de formação mais tradicionais promovidos pela racionalidade técnica, que impõe uma forma de abordagem do processo de ensino e aprendizagem em que o professor centraliza o processo de ensino, pois considera o estudante passivo e a ele são apresentados apenas os resultados. Essa forma concebe a inteligência com a faculdade, segundo Mizukami (1989) de apenas acumular e armazenar as informações. Evidencia o caráter cumulativo do conhecimento e, pela transmissão o modo de ser obtido pelo estudante. Neste padrão, atribui-se pouca importância ao sujeito no ato do conhecimento e a aprendizagem de Matemática se resume à apresentação e demonstração das informações a serem reproduzidas pelo estudante. Não considera as diferenças individuais e a relação professor estudante é vertical.

O cânone da racionalidade técnica forma os professores da Educação Básica e orienta as ações do professor, ainda hoje, na sala de aula. Segundo Diniz-Pereira, "[...] a prática educacional é baseada na aplicação do conhecimento científico e questões educacionais são tratadas como problemas 'técnicos' os quais podem ser resolvidos objetivamente por meio de procedimentos racionais da ciência." (2014, p. 35)

Também Carr e Kemmis (1986) afirmam que o papel do professor, baseado na visão científica da teoria e prática educacional, é de passiva conformidade com as recomendações práticas dos teóricos e pesquisadores educacionais. De acordo com eles,

> Professores não são vistos como profissionalmente responsáveis por fazer decisões e julgamentos em educação, mas somente pela eficiência com a qual eles implementam as decisões feitas por teóricos educacionais; somente com base em seu conhecimento científico sobre a prática educacional, esta poderia ser melhorada (CARR; KEMMIS, 1986, p. 70).

É na perspectiva de ruptura com a forma que persiste no ensino de Matemática, principalmente na Educação Básica que a adoção da Modelagem na Educação Matemática transforma essa prática educativa, quando adere aos pressupostos da racionalidade crítica para a qual a educação, historicamente, é localizada e, conforme Carr e Kemmis “[...] seu propósito, a situação social que ele modela ou sugere, o caminho que ele cria ou determina relações entre os participantes, o tipo de meio na qual ele trabalha e o tipo de conhecimento para o qual ele dá forma.” (1986, p. 39).

A Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma metodologia de ensino, reflete e incorpora no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, os avanços experimentados em todos os campos do conhecimento, nas últimas décadas. Adicionando elementos que sustentam essa posição, na Modelagem na Educação Matemática, o ensino e a pesquisa são indissociáveis. Por ter como ponto de partida um tema é interdisciplinar o que implica e conduz a outra perspectiva de currículo que supera a visão linear e que concebe uma maneira diferente de utilizar o livro didático.

Além disso, o professor compartilha o processo de ensino e torna os estudantes corresponsáveis pela aprendizagem. As aulas são dinâmicas, pois os estudantes em pequenos grupos participam integralmente, com a mediação do professor, de todas as etapas do processo de implantação e execução de uma atividade. Desde a escolha do tema, a participação efetiva na pesquisa de coleta dos dados relativos ao assunto, no levantamento das questões proveniente dos dados, na resolução dos problemas apontados e nas discussões que se sucedem, há pleno envolvimento dos estudantes.

É nessa multiplicidade de ações e processos que se incorporam as discussões sobre o paradigma emergente a partir dos estudos de Boaventura de Sousa Santos e da epistemologia do pensamento complexo, de Edgar Morin, ao fazer emergir os pontos essenciais para uma Educação compatível com o século XXI. Nesta perspectiva, novos estudos são realizados e incorporados, tais como os pressupostos de pedagogias mais críticas da educação, a teoria da Representação Semiótica, os estudos da Psicologia de tendência histórico-cultural que sustenta a interação social como um fator fundamental para a aprendizagem e a aquisição do conhecimento pelo estudante.

Portanto, é fundamentada por estas bases teóricas, das áreas Psicologia, Sociologia, Epistemologia, Antropologia e outros que a Modelagem Matemática é uma metodologia diferenciada de ensino de Matemática, principalmente quando voltada à Educação Básica e permite considerar que a prática educativa, mediada pela Modelagem na Educação Matemática reúne os requisitos para uma efetiva educação transformadora.

5. Referências

BOGDAN. R, BICKLEN, S. (1994). **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria dos métodos. Porto: Porto.

BRASIL. (1996). Ministério da Educação (1996). *Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1996***.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF.

BRASIL. (2016). Ministério da Educação. Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes. Pisa. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33571. Acesso em 28 de setembro de 2017

BRUNER, J. (1976). *Uma nova teoria da aprendizagem*. São Paulo: Bloch.

BURAK, D. (1992). *Modelagem matemática*: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______ . (2004). A Modelagem Matemática e a sala de aula.– I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática I EPMEM. *Anais*... Londrina.

______. (2010). Modelagem Matemática sob um olhar da educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.

Revista de Modelagem na Educação Matemática, v. 1 n. 1, p.10 – 26.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. (2008). Educação matemática: contribuições para a compreensão de sua natureza. *Acta Scientiae ULBRA*, Canoas. v.10, p. 93-106, jul-dez.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. de. (2012) *Modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa***.** Curitiba: CRV.

CARR, W; KEMMIS, S. (1986). **Becoming critical**: education, knowledge and action research. London: The Falmer.

D´AMBRÓSIO, U. (2004). Educação Matemática como disciplina. *Revista Brasileira de Educação*, n. 21, 71-73.

DEWEY, J. (1972). Algumas observações sobre a Psicologia do número. In*: Os primeiros trabalhos de John Dewey 1882-1898,* vol. 5 (1895-1898). Editado por Jo Ann Boydston. Illinois: Carbondale & Edwards: Southern Illinois University.

DINIZ-PEREIRA, E. J. (2014). Da racionalidade técnica à racionalidade crítica: formação docente e transformação social. Perspectivas em diálogo: *Revista de Educação e Sociedade*, Navirai, v.1, n.1-p.34-42, jan-jun., 2014.

FREIRE, P. (1983). *Educação como prática da liberdade*. 16. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

______. (1996). *Pedagogia da Autonomia*: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra.

GALLAGER, J. J. (1984). Métodos cualitativos para el studio de la educación. Texto mimeografado.

GUSMÃO, N. M. M. de. (2009). Entre lugares: antropologia e educação no Brasil. *Revista de Educação*. Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 29-46.

HARDY, G. H. (1925). What is Geometry? Presidential Address to the Mathematical Association. *Mathematical Gazette* XII, 175, 309-316.

HIGGINSON, W. (1980). On the Foundations of Mathematics Education. Texto mimeografado.

KILPATRICK, J. (1996). Ficando estacas: uma tentativa de demarcar a EM como campo profissional e científico. *Zetetiké,* Campinas: CEMPEM- FE - Unicamp, v.4, n.5, p. 99-120.

MCLELLAN, J.A.; DEWEY, J.). (1895). *The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic*. International education series. v. XXXIII. New York: D. Appleton,. em http://archive.org/details/psychologyofnumb00mcleuoft,. acesso em 18 julho 2017.

MARTINS, J. B. (2004). Contribuições epistemológicas da abordagem multirreferencial para a compreensão dos fenômenos educacionais. **Revista Brasileira de Educação**, n. 26.

MARTINS, C. A.; MORAIS, C. W. J. (2005). Antropologia e educação: breve nota acerca de uma relação necessária. **Educação em Revista**, n. 6, p. 83-94.

MIGUEL, A. et al. (2004). *A educação matemática*: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. Revista Brasileira de Educação, n. 27, p.70-93, set./dez.

MIZUKAMI, M. da G. N. (1986). *Ensino*: as abordagens do processo. São Paulo: EPE.

MORIN, E. (2006). *Sete saberes necessários à educação do futuro*. 11. ed. São Paulo: Cortez.

______. (2005). **Ciência com consciência**. 8. ed. Rio de Janeiro: Bertrand.

______. (2008). *Conhecimento do conhecimento*. 4. ed. Porto Alegre: Sulina.

PETRAGLIA, I. C. (2005). *Edgar Morin*: a educação e a complexidade do ser e do saber. 9. ed. Petrópolis: Vozes.

PIAGET, J. (1974). *A epistemologia genética e a pesquisa psicológica*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos.

RIUS, E. B. (1989a). Educación Matemática: una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología. *Educación Matemática*. México: Iberoamerica, v.1, n. 2, p. 28-42.

______. (1989b).Educación Matemática: una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología. *Educación Matemática*. México: Iberoamerica v.1, n.3, p.30-36.

SANTOS, B. de. S.(2006a) . *Um discurso sobre as ciências*. 4. ed. São Paulo: Cortez.

______. (2006b). **Conhecimento prudente para uma vida decente**. 2. ed. São Paulo: Cortez.

VYGOTSKY, L. S. (1984*). A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

WOLCOTT, H.W. (1975). Criteria for an ethnographic approach to research in education. *Human Organization*, 34, p.111-128,1975.

Autores:

Dionísio Burak - Possui Doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (1992) e Pós-doutorado pela Universidade Federal do Pará. Atualmente é professor da Universidade Estadual de Ponta Grossa e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Pesquisador Sênior da Fundação Araucária do Paraná. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, educação matemática, ensino e aprendizagem e ensino de matemática. E-mail: dioburak@yahoo.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 27-47

Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria

Gustavo Barallobres

Fecha de recepción:31/12/2016
Fecha de aceptación: 14/09/2017

Resumen	Ciertas dificultades de los alumnos en el contexto de transición de la aritmética al álgebra son interpretadas como dificultades de abstracción, en función de las características específicas del dominio algebraico. Ellas son habitualmente atribuidas a problemas cognitivos de los alumnos, minimizando el rol de otros factores, como las prácticas de enseñanza asociadas, las concepciones de abstracción y de aprendizaje, la naturaleza misma de los objetos de saber, etc. En este artículo, analizaremos las propuestas de enseñanza de ciertos manuales escolares y describiremos algunos fenómenos didácticos ligados a las interpretaciones cognitivas de las dificultades de aprendizaje, en particular ciertos modos de reducción de la complejidad de los objetos matemáticos mediante procesos didácticos basados en la manipulación de objetos materiales que pueden tener un impacto sobre la conceptualización. **Palabras clave:** algebra, dificultades de aprendizaje, abstracción
Abstract	Certain difficulties of the students in the context of transition of the arithmetic to the algebra are interpreted as being difficulties of abstraction, depending on the specific characteristics of the algebraic domain. These difficulties are usually attributed to students' cognitive problems, minimizing the role of other factors, such as associated teaching practices, abstraction and learning conceptions, or even the very nature of the knowledge objects, and so on. In this article, we will analyze the teaching proposals of some textbooks and describe some didactic phenomena related to the cognitive interpretations of learning difficulties, in particular certain ways of reducing the complexity of mathematical objects through didactic processes based on the manipulation of material objects that can have consequences on the conceptualization. **Keywords**: algebra, learning disability, abstraction
Resumo	Certas dificuldades dos estudantes no contexto de transição da aritmética para a álgebra são interpretadas como dificuldades de abstração, em função das características específicas do domínio

algébrico. Elas, habitualmente, são atribuídas a problemas cognitivos dos alunos, minimizando outros fatores, como as práticas pedagógicas associadas, as concepções de abstração e de aprendizagem, a mesma natureza dos objetos de saber, etc. Nesse artigo, nós analisaremos as propostas pedagógicas de certos manuais escolares e descreveremos alguns fenômenos didáticos associados às interpretações cognitivas das dificuldades de aprendizagem, em particular certos modos de redução da complexidade dos objetos matemáticos por meio de processos didáticos fundados na manipulação de objetos materiais que podem ter um impacto no processo de conceptualização.

Palavras-chave: álgebra, dificuldades de aprendizagem, abstração

1. Introducción

Un fenómeno habitual en las clases de matemática, en lo que respecta al trabajo con alumnos que presentan dificultades de aprendizaje en esta disciplina, consiste en reducir el nivel de complejidad de la tarea presentada con la finalidad de permitir el acceso a ciertos saberes (Giroux, 2000; Lemoyne, G y Lessard, G. (2003); DeBlois, L. 2014; Mari, C.y Squalli, H, 2014) y, de este modo, obtener la producción de ciertas respuestas correctas, lo que puede crear la ilusión de que los alumnos han aprendido puesto que pueden responder de manera pertinente a ciertas tareas. Sin embargo, este recorte o simplificación de la tarea presentada se realiza, en muchos casos, sin analizar el impacto que dicha acción pueda tener sobre la naturaleza del saber que desea enseñarse y, por ende, sobre la conceptualización de las nociones matemáticas implicadas (Lemoyne, G y Lessard, G. (2003), Autor, (2009, 2016).

Esta reducción o simplificación de la tarea puede tomar diferentes formas. En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas en secundaria, una de estas formas consiste en ¨recortar¨ el saber en micro tareas (Houle, 2007) bajo el supuesto que el acceso a una tarea compleja se efectúa mediante la acumulación de ciertas etapas más simples que la componen. Otra de las formas que caracteriza la reducción antes mencionada, consiste en centrar la enseñanza en tareas rutinarias u operatorias, promoviendo de este modo a una algoritmización de los saberes a enseñar (Autor, 2009).

En el caso particular del pasaje de la aritmética al álgebra, existe un juego delicado entre el tratamiento de casos particulares (de ejemplos, de problemas, etc.) y los procesos de generalización y abstracción constitutivos del pensamiento algebraico. Sin embargo, como explica Sierpinska (2012), la generalización en álgebra requiere una experiencia en la resolución de problemas permitiendo abstraer y generalizar métodos particulares con el objetivo de tratar clases de problemas, experiencia que es difícil de adquirir en la escuela secundaria tanto por los limites de los conocimientos limitados que disponen los alumnos que por el tiempo de enseñanza impuesto por la institución escolar.

Cuando se trabajo con alumnos con dificultades en matemática, es frecuente afirmar que éstos alumnos tienen dificultades de abstracción y de generalización (Autor, 2016; Bergeron, L., 2017), es decir, se asocia la dificultad que tienen a características cognitivas específicas de los alumnos; sin embargo, el análisis de Sierpinska (2012) muestra claramente la complejidad que implica el acceso a un dominio de saber como el álgebra y, por ende, lo importante que es tener en cuenta las dimensiones epistemológicas y didácticas en la interpretación de dichas dificultades.

En este contexto de transición de la aritmética al álgebra, un fenómeno asociado al problema de la simplificación de tareas que hemos evocado precedentemente se manifiesta de la siguiente manera: partiendo de la hipótesis de que ésta transición está marcada por problemas de abstracción (puesto que el álgebra es un dominio de saber abstracto), se intentan "concretizar" los objetos de saber para que sean más accesibles a los alumnos. En este artículo, describiremos algunas formas que adquiere esta concretización, en particular en el contexto de la enseñanza del álgebra y el impacto que puede tener sobre la conceptualización de esta disciplina; por otro lado, indagaremos la manera en la que la concepción habitual de la abstracción condiciona el análisis de las dificultades de los alumnos minimizando el rol que las interpretaciones hechas por los alumnos tienen en el seno de la interacción didáctica.

2. Generalización, abstracción y álgebra

Piaget (Fundación Jean Piaget, 2000) distingue los procesos de abstracción simples o empíricos de aquellos que el autor llama procesos de abstracción reflexiva. Los primeros son relativos a experiencias implicando objetos materiales y determinan observables sobre la acción comprendida como proceso material (un movimiento, una posición, etc.) permitiendo extraer propiedades o informaciones propias a un cierto nivel de conocimiento. Sin embargo, Piaget remarca, evitando una asociación directa con el empirismo, que lo que es identificado en un cierto plano de conocimiento como objeto de reflexión para ser elevado a un plano superior no es el simple reflejo de las propiedades del mundo exterior sino que proviene de las acciones del sujeto. La noción de ¨forma¨, por ejemplo, no es concebida como un aspecto intrínseco a los objetos sino que implica, para Piaget, una cierta forma de interacción con los objetos materiales, es decir determinadas acciones específicas.

Los procesos de abstracción reflexiva están también vinculados con las interacciones del sujeto pero las inferencias asociadas a estos procesos refieren a coordinaciones de acciones efectuadas sobre los objetos. Se trata de un proceso de reconstrucción reflexiva, en un sentido cognitivo, sobre el plano de la representación, a través del cual el sujeto se esfuerza por construir una comprensión conceptual de lo que percibe o cree percibir. Este tipo de abstracción puede permanecer sobre un plano inconsciente o manifestarse de manera consciente (por ejemplo, el análisis comparativo de dos procedimientos); es en éste ultimo caso que Piaget habla de abstracción reflexiva.

Los procesos de abstracción son acompañados de procesos de generalización; en el caso de la abstracción empírica, las generalizaciones son frecuentemente inductivas, es decir, producidas mediante validación empírica o verificaciones de las relaciones establecidas en la interacción con los objetos materiales, sin intentar buscar ¨razones¨ que irían más allá de lo observable. Por otro lado, las generalizaciones extensivas y comprensivas que emergen de relaciones establecidas entre las acciones realizadas sobre los objetos, conducen a la producción de nuevos contenidos (es decir, más allá de lo «observado») y se asocian a validaciones que superan la verificación empírica, lo que hace posible la conceptualización. Se trata, para Piaget, de generalizaciones constructivas vinculadas a la abstracción reflexiva que implican nuevas representaciones y permiten aportar diferentes explicaciones para una misma situación ; al mismo tiempo, estas generalizaciones posibilitan nuevas construcciones.

En el caso específico del álgebra, las experiencias constitutivas de este dominio de saber no refieren a objetos materiales sino a acciones que se ejercen sobre ellos y a coordinaciones más generales de estas acciones. Para Gonseth (1936), la abstracción matemática es la «forma» de la experimentación: la construcción de la noción de recta, por ejemplo, requiere conocimientos preliminares de ciertas realizaciones más o menos groseras, tales como el borde de una regla, la línea que esta regla permite trazar, etc., pero la reflexión sobre las acciones efectivas y sus coordinaciones conduce a la creación de representaciones esquemáticas abstractas que dan forma al objeto matemático (en construcción permanente, según los niveles de abstracción implicados). Los objetos algebraicos son esquematizaciones que permiten expresar relaciones (ligadas a situaciones específicas) que se desean retener. Al mismo tiempo, cada esquematización puede tornarse ella misma como un objeto de estudio y así sucesivamente, obteniendo diferentes «capas» o niveles de abstracción vinculados a los objetos. El dominio de referencia sobre el cual se constituye el pensamiento algebraico no es material sino matemático; las actividades y las acciones refieren a objetos matemáticos ya constituidos y permiten elaborar nuevos objetos. Las preguntas que orientan las relaciones a establecer (o las relaciones que se desean retener) son específicas e internas a las prácticas matemáticas. Otte (1992) afirma que las fórmulas algebraicas representan un estado de una forma de generalización (nunca acabada), un estado provisorio de un proceso de interacciones entre lo particular y lo general. Los modos de representación no son únicos, diferentes formulaciones pueden expresar características diferentes de un mismo objeto. Las relaciones entre lo particular y lo general, vinculando objetos, conceptos y signos se elaboran contextualmente y son susceptibles de generalización en función de su eficacidad hipotética en la resolución de actividades propias a la práctica matemática.

En el trabajo específicamente escolar, los dos tipos de generalizaciones mencionadas están presentes, por ejemplo, en actividades vinculadas a la identificación de regularidades obtenidas mediante el análisis de casos particulares (procesos inductivos), pero también mediante el uso de inferencias que conducen a un conjunto de relaciones organizadas deductivamente (procesos constructivos, validaciones universales).

Los análisis epistemológicos permiten identificar otro proceso de abstracción y generalización que caracteriza el desarrollo de las matemáticas y en el cual el simbolismo ha jugado un rol fundamental: se trata de la invención de objetos matemáticos mediante la manipulación de símbolos y en el cual se realiza una suspensión local de las significaciones provenientes de otros registros. Serfati (2005) explica que los trabajos anteriores a Leibniz (1646-1716) se sitúan en el registro de las significaciones: los únicos movimientos del pensamiento que eran reconocidos como legítimos se dirigían desde el registro de las representaciones al registro simbólico; ni Descartes ni Cardan consideraban que el registro estrictamente simbólico pudiera proporcionar sugestiones o informaciones (Serfati 2005, p.6). La creación de formas «sin significación» (Serfati, 2005), inconcebibles en el contexto de la escritura retórica, fue también resistida por muchos matemáticos y filósofos que rechazaban el hecho de que las matemáticas pudieran evitar de plantearse ciertos problemas ontológicos. En su texto «Funciones y conceptos», Frege (1848-1925) afirmaba:

> «La aritmética tiene por objeto los números enteros; de este modo, las letras «a» y «b» que aparecen en la expresión «a+b» solo pueden representar números enteros y basta con definir el uso del signo «+» ubicado entre los dos números enteros. Cualquier extensión del campo de objetos asignados a “a” y a “b” exige una nueva definición del signo «+». Prestar atención a que toda expresión tenga una denotación, a nunca calcular suponiendo que se lo hace sobre signos vacíos, creyendo operar sobre objetos; es esto lo que exige el rigor científico (…)»
>
> (Fonctions et concepts , Frege 1879, p. 92-93 , citado por Serfati, p.348).

Serfati (2005) muestra claramente que esta etapa es dominada por una concepción idealista de los objetos matemáticos en la cual la escritura simbólica estaba solamente al servicio de la representación de dichos objetos. Leibniz propone un cambio fundamental de la función del simbolismo: el sistema simbólico, además de representar objetos ideales, se transforma en un medio de invención de nuevos objetos. En este contexto, nuevas formas de abstracción y generalización emergen basadas en la preservación de conceptos y de formas simbólicas previamente definidas (por ejemplo, la invención de nuevos números preservando las propiedades de los campos numéricos ya conocidos). Si bien esta manera de producir objetos matemáticos ha enfrentado grandes dificultades, en particular referidas a los fundamentos de las matemáticas, no se puede negar que al interior de ciertos límites, ha sido y es una forma de producción en matemáticas que, desde un punto de vista didáctico, plantea ciertos obstáculos (Brousseau, 1998).

3. Metodología

La metodología adoptada en este trabajo es de tipo cualitativa, centrándose en el análisis del sentido y las significaciones de los discursos que emergen de ciertas propuestas pedagógicas (L'Écuyer, 1987; R.Mucchielli, 1988; Paillé, P et A.Mucchielli, 2012), y sobre el estudio didáctico de protocolos de observación del desarrollo de situaciones (Brun, J. et Conne, F, 1990). Hemos elegido ciertas actividades extraídas de los manuales escolares utilizados en Quebec, tanto en primaria como en secundaria, que ponen en evidencia los fenómenos didácticos mencionados precedentemente.

Los episodios didácticos elegidos provienen de una clase de primer año de secundaria de una escuela de alumnos que tienen dos años de retraso en relación al desarrollo curricular regular. La identificación de estos alumnos se realiza mediante el uso de los resultados de las evaluaciones nacionales que permiten asegurar el pasaje de un curso al siguiente. En Quebec, la denominación «alumnos con dificultad de aprendizaje» cubre diferentes categorías (dificultad de comportamiento, dificultad de adaptación, dificultades de lenguaje, etc.). En nuestro caso, se trata de una escuela que recibe a alumnos con un retraso escolar importante pero que no tienen problemas de comportamiento.

4. Lo concreto y lo abstracto en la aritmética y el álgebra: ciertas formas de concretización

Ciertas propuestas pedagógicas referidas a la enseñanza de las matemáticas, y en particular a la enseñanza de la aritmética y el álgebra, parten de un presupuesto raramente justificado y que pareciera ser independiente de la especificad del contenido en cuestión y de las condiciones específicas de producción de conocimientos: «debido al carácter abstracto de los objetos matemáticos, la enseñanza debe partir de algo más simple, en particular mediante la manipulación de material concreto». Bajo el supuesto que los alumnos tienen características cognitivas específicas, por ejemplo, algunos son más «visuales» o «táctiles», ciertas propuestas de enseñanza proponen utilizar dibujos para ayudar a los alumnos a «visualizar» los objetos matemáticos o utilizar material concreto elaborado a tales fines para favorecer la «manipulación». Desde un punto de vista del aprendizaje, este tipo de propuestas presuponen un cierto empirismo que lleva a considerar que los objetos matemáticos están presentes en los dibujos o en el material concreto y que la acción fundamental de los alumnos es de «ver» en ellos lo que la propuesta didáctica supone que es visible.

Analicemos el siguiente ejemplo de un manual escolar de Quebec (Canadá):

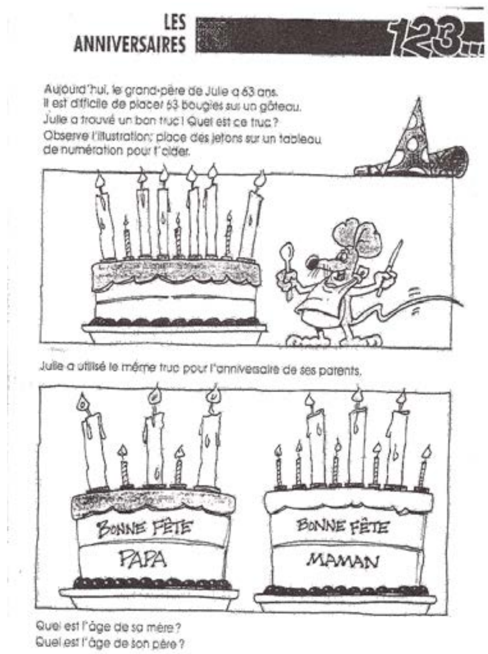


Imagen 1

Manuel Climaths, 2011

La consigna del problema explica que el abuelo de Julia tiene 63 años y que como es difícil poner tantas velitas en la torta, se ha inventado un «truco» para que todas las velitas entren. La consigna propone explícitamente "observar la ilustración" para obtener la respuesta y ayudarse ubicando fichas sobre una tabla de numeración. A continuación se presentan otras dos tortas con velas y se afirma que se usó el mismo «truco» que en la primera torta para ubicar las velitas. La tarea de los alumnos consiste en determinar la edad del padre y de la madre. Analizaremos cómo los alumnos comprenden el « truco » al cual hace referencia la consigna.

El autor de la actividad presupone que el alumno «observará», en la primera torta (imagen 1), 6 velas grandes y 3 pequeñas y que atribuirá 10 años a cada una de las velas grandes y 1 año a cada vela pequeña. De esta manera, el papá debería tener, para el autor del manual, 32 años y la mamá 35 años.

Sin embargo, un alumno ha propuesto la siguiente respuesta:

En la primera torta hay 9 velitas , entonces: 9 x 7 = 63… cada velita vale 7.

Entonces, el papá tiene entonces 35 años y la mamá 56.

La respuesta del alumno es absolutamente correcta, puesto que ninguna de las condiciones de la actividad exige atribuir valores diferentes a las velas de distinto tamaño. Sin embargo, esta respuesta no es considerada correcta por el autor del manual (ni por el maestro) quien espera que el alumno «observe» en el problema presentado el conocimiento matemático que él presupone está «contenido» en el dibujo (la respuesta esperada está enunciada en la guía para le docente). Sin embargo, el ejemplo revela que éste conocimiento no está contenido en el dibujo y que, por lo tanto, no es accesible por «observación»; el conocimiento que se desea elaborar es producto de la interacción del alumno con el problema específico y, de esta manera, depende de las condiciones propias de la situación didáctica (siendo el problema matemático una parte importante de esta situación).

Otro ejemplo, también extraído de un manual escolar de Quebec, muestra la utilización de material concreto para explicar la sustracción de números negativos:

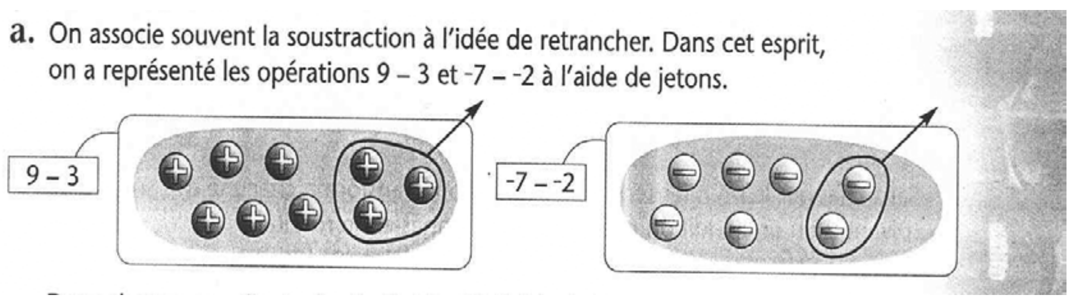


Imagen 2

Manuel Panoramath, 2013

El autor afirma que habitualmente se asocia la sustracción a la idea de «extraer» y que, para preservar este sentido, se han representado dos cálculos, 9-3 y -7-(-2) mediante la ayuda de fichas. En el primer ejemplo, hay 9 fichas con signo + (representando el número « 9 ») y se extraen 3 de estas fichas. Este esquema representa la operación 9-3.

En el segundo ejemplo, se dispone de 7 fichas en las que se han dibujado signos negativos y se extraen dos de estas fichas, representando así el cálculo -7-(-2). Sin entrar en los detalles de la complejidad a la cual conduce esta propuesta en el momento de explicar las operaciones combinando números positivos y negativos, la materialización de los cálculos que se presentan en este pasaje es suficiente para mostrar sus límites en el contexto mismo de la sustracción de dos números negativos: el cálculo -2- (-7) no puede ser representado con este sistema puesto que no es posible “extraer” 7 objetos de 2 objetos.

En esta propuesta didáctica, los números enteros son tratados como números naturales y son asociados a la representación de magnitudes (-2 representa «dos» fichas); la sustracción es interpretada de la misma manera que en le contexto de los números naturales (como una extracción). Sin embargo, la naturaleza específica de los números negativos muestra rápidamente los limites de estas interpretaciones: todo intento de reducción de los números enteros a la representación de magnitudes (como un medio de reducir el nivel de abstracción) produce una serie de contradicciones que se manifiestan rápidamente. Vemos que en este caso, cómo la decisión didáctica de utilizar un material concreto para introducir ciertos objetos matemáticos tiene un impacto sobre la naturaleza de dichos objetos y por ende, sobre la conceptualización del nuevo campo numérico.

En la guía destinada al profesor, el autor del manual afirma que las situaciones de enseñanza deben proponer contextos reales, apoyadas sobre la realidad cotidiana de los alumnos:

> «Observar, interpretar, interactuar con el mundo mediante la ayuda de las matemáticas, tal es la idea principal retenida para sensibilizar a los alumnos de la omnipresencia de las matemáticas en su entorno» (Manuel Panoramaths, guía del profesor, Introducción, p.3).

Una confusión se desliza entre la modelización matemática y el recurso a objetos materiales (como el caso de las fichas) utilizados para ilustrar el funcionamiento de ciertos saberes matemáticos (en nuestro caso, los números enteros).

De este modo, las propuestas que adoptan principios genéricos tales como «ir de lo concreto a lo abstracto», «favorecer la utilización de material concreto», «volver a lo concreto cuando hay problemas de comprensión», «usar ejemplos para ilustrar objetos abstractos», etc., deben analizarse considerando la especificidad de los saberes implicados: una vigilancia epistemológica es necesaria, en particular, en lo que respecta a la preservación de los objetos de enseñanza. Un implícito guía estas propuestas pedagógicas: el acceso a los objetos matemáticos se realiza, en general, mediante inducciones empíricas. Sin embargo, la naturaleza de estos objetos resiste a este empirismo, ya que diferentes formas de abstracción y generalización son específicas de la constitución de objetos matemáticas y no pueden ser ignoradas ni al pensar las propuestas de enseñanza ni al interpretar las dificultades de los alumnos en matemática.

En el caso particular del álgebra, el rol de la aritmética como «dominio de experiencia posible» (Chevallard, 1989) a partir del cual elaborar el pensamiento algebraico es marcado por una concepción limitada del álgebra en tanto que lenguaje: en el ámbito escolar, el lenguaje algebraico es usado para simbolizar las propiedades conocidas de la aritmética. Estas propiedades no son consideradas como saberes sobre los cuales apoyarse para efectuar cálculos con expresiones algebraicas y para validar dichos cálculos (Broin, D. 2002).

Analicemos un ejemplo de un manual escolar utilizado en Quebec (Manuel «À vos maths !») , en el cual se trata a las variables que figuran en las expresiones algebraicas como objetos materiales, reduciendo implícitamente una de las funciones fundamentales de estas expresiones, la de expresar una generalidad:

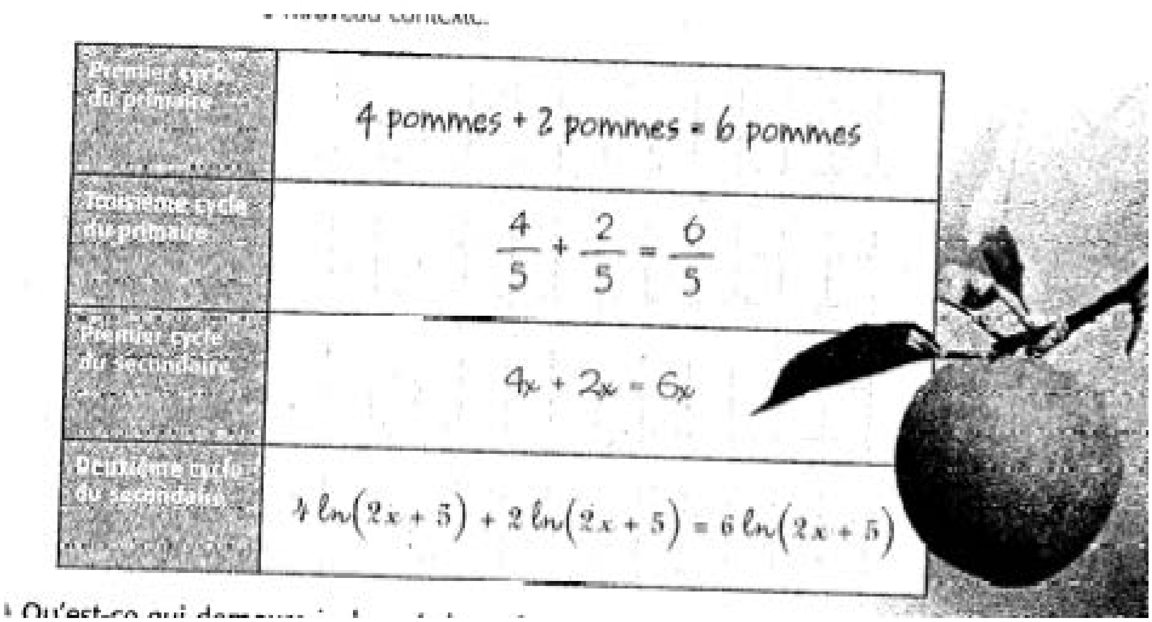


Imagen 3

Manuel à vos maths, 2014

En la expresión 4 x + 2 x = 6x, se asocia la letra x al objeto «manzana» (“ponme” en francés) y el cálculo se justifica haciendo referencia a este contexto material:

4 manzanas + 2 manzanas = 6 manzanas.

Esta asociación de las variables a objetos concretos lleva a postular ciertas reglas de acción que pueden generar ciertos obstáculos didácticos. El autor afirma que en la adición o la sustracción de términos semejantes, las cantidades deben ser «de la misma naturaleza», es decir que no es posible efectuar 2 a + 2 b ya que no se pueden sumar “manzanas” con “peras”.

Sin embargo, sabemos bien que cuando se trata de probar que la suma de dos números pares es un numero par, debemos operar con la expresión 2 a + 2 b para poner en evidencia el factor 2 (2 (a+b)). En el contexto escolar, esta operación se la vincula con la “factorización”, agregando de esta manera diferentes tipos de nombres para diferentes tipos de tareas. En el caso de 2 a + 2 a = 4 a, se habla de suma de términos semejantes y no de factorización; sin embargo, 2 a + 2 a = 2 a (1+1) = 4 a.

De esta manera, se establece una confusión ya que, para cierto tipo de tareas se afirma la imposibilidad de transformar la expresión 2 a + 2 b y para otras se propone la factorización. Este confusión aparece puesto que se evita tratar el problema del cálculo algebraico en el dominio estrictamente matemático.

En un pasaje posterior, el autor remarca que la interpretación de la multiplicación como "adición reiterada" es útil para adicionar términos semejantes:

$$5x + 3x$$

$$x+x+x+x+x+x+x+x$$

$$8x$$

A partir de la proposición de varios ejemplos similares con coeficientes naturales, el autor produce una generalización inductiva (del tipo a x + b x = (a+b) x), afirmando que sólo los coeficientes influencian el resultado de la adición o de la sustracción de términos semejantes y que, además, los coeficientes no tienen porque ser solamente números naturales: 2,3 y – 6,4 y = -4,1 y.

De este modo, se construye por inducción, una regla de acción destinada a operar con términos semejantes, en continuidad con la idea de asociar las variables a objetos materiales. Efectivamente, la inducción es necesaria puesto que la adición reiterada (primer modo de validación) no permite justificar la adición de términos semejantes con coeficientes no naturales.

La representación de las variables mediante el uso de objetos materiales (con el objetivo de reducir el nivel de complejidad o el nivel de abstracción implicado en los cálculos algebraicos) conduce a una aritmetización de las operaciones algebraicas: en particular, el signo de igualdad es utilizado como sinónimo de «resultado de» y no como una equivalencia. La propiedad distributiva de la multiplicación, que fundamenta el cálculo a x + b x = (a + b) x, no es ni siquiera mencionada. Esta propiedad aparece cuando se trata de transformar 3 (x+5) = 3x + 15 pero no es utilizada cuando se trata de efectuar 9x + 2x = (9+2) x. Una vez más, el signo de la igualdad pareciera no ser interpretado como una equivalencia; recordemos, además, que en este último ejemplo, al autor afirma que se ha «factorizado» la expresión y nunca menciona que se ha usado la propiedad distributiva.

Esta concepción empirista-sensualista del conocimiento propone una construcción de la teoría algebraica por abstracción y generalización inductiva, a partir de la «observación» de ejemplos particulares de la aritmética; la aritmética no es usada aquí como un medio para producir una semántica para los enunciados algebraicos (Chevallard, 1989).

5. Dominios de experiencia y enseñanza del algebra

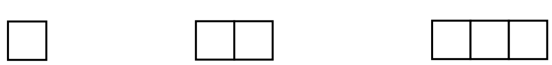
Desde un punto de vista histórico, el álgebra se desarrolla en interacción con los dominios numéricos y geométricos, interacción que va más allá de producción de generalizaciones y abstracciones inductivas y que se caracteriza por una idea de unificación y de búsqueda de métodos generales permitiendo resolver clases de problemas. Se trata de una relación dialéctica entre los dominios de referencia (“una realidad posible”) y el saber emergente que constituye el pensamiento algebraico (Chevallard, 1989): por un lado, los sistemas de números, por ejemplo, funcionan como dominio de cálculo sobre la base del cual se elabora el pensamiento algebraico y, por otro lado, el cálculo algebraico es un útil fundamental para la construcción de los dominios numéricos sucesivos. Es en el contexto de esta dialéctica que el carácter operatorio del útil algebraico adquiere significación y permite revelar aspectos no conocidos del dominio de referencia:

> “…el pasaje de la expresión (2p – 1) + (2p+1) a la expresión 4p, mediante simplificación, pone en evidencia que (2p-1) + (2p+1) designa un múltiplo de 4; el pasaje de 4p a $(p+1)^2$ – $(p-1)^2$ permite poner en evidencia que (2p – 1) + (2p + 1) es una diferencia de dos cuadrados…” (Chevallard, 1989, p 75).

Otte (2006) expresa también, de otra manera, este carácter «revelador» del álgebra: apoyándose sobre Peirce, el autor interpreta el álgebra como siendo una especie de diagrama que ayuda a comprender el estado de las cosas experimentadas o imaginadas. El álgebra permite mostrar algo diferente del hecho en sí mismo, ella permite un desplazamiento de un tipo de pensamiento centrado sobre objetos hacia un pensamiento centrado sobre relaciones, rindiendo cuenta de esta manera de la actividad misma. Aún si el diagrama algebraico (la fórmula) no tiene semejanza con el objeto al que refiere, el diagrama permite acceder a verdades relativas a dicho objeto, diferentes de aquellas que determinan su construcción. La utilidad de las formulas algebraicas consiste precisamente en esta capacidad de revelar verdades inesperadas (Otte, 2006).

Desde el punto de vista de la enseñanza, las relaciones susceptibles de generalización y, por ende, el carácter revelador del pensamiento algebraico al cual se refiere Otte están estrechamente ligadas con la intencionalidad didáctica de la situación propuesta (no se trata de inventar nuevos objetos matemáticos sino de buscar condiciones de apropiación de una práctica preexistente).

Analicemos los siguientes ejemplos extraídos del manual “À vos maths!” (premier año de la escuela secundaria) que ha sido utilizado en la clase en la cual hemos recogido las experimentaciones . En el primer caso, se propone construir con fósforos dibujos como los siguientes agregando en cada paso un cuadrado:



Paso 1 Paso 2 Paso 3

a) ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura correspondiente al paso 59?

b) ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura correspondiente al paso 657?

Este problema y los que presentaremos a continuación han sido trabajados en una clase de alumnos con dificultades en matemática, siendo el objetivo la introducción de ciertas expresiones algebraicas simples. En un primer tiempo, se propone la actividad precedente sin pedir la elaboración de una fórmula algebraica. En las actividades posteriores, la introducción de letras y la expresión del término general mediante una fórmula algebraica aparecen como objetivos didácticos.

Durante la puesta en común en la que se analizan diferentes maneras de contar, el profesor discute una de las proposiciones de los alumnos (que le conviene a sus fines didácticos):

Paso 1 4
Paso 2 4 + 3 = 7
Paso 3 7 + 3 = 10
Paso 4 10 + 3 = 13
Para el paso 59, un alumno afirma:
A1: Necesitamos conocer cuantos fósforos se utilizaron en el paso anterior para poder agregar 3.
Profesor: ¿Y cuántos fósforos tienen en el paso 58?
A2: No sabemos…
Profesor: ¿Y pueden calcularlo?
…..silencio…..
A1: Bueno, necesitaríamos saber cuántos fósforos se usaron en el paso 57 ….
Profesor: ¿Y entonces?
A1 No sé, … es largo…
Profesor: Les voy a mostrar una manera de escribir los cálculos, a ver si esto los ayuda.
Paso 1 4
Paso 2 4 + 3 = 7
Paso 3 4 + 3 + 3 = 10
(El profesor acompaña la escritura con explicaciones orales, mostrando que en lugar de escribir el resultado 7, escribe la manera en que este resultado ha sido calculado.)
Paso 4 4 + 3 + 3 + 3 = 13
(Este paso también es acompañado de una explicación oral del mismo tipo que la precedente.)
Paso 5 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16
¿Cuántas veces sumamos 3?

A1: 4 veces
Profesor: Entonces, ¿están de acuerdo que para hacer más rápido puedo escribir, para el paso 5,   4 + 4 x 3?
A2: Sí
Profesor:
Paso 6   4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
¿Podemos hacer 4 + 5x 3?
A2: si
Profesor: ¿Y si queremos calcular el paso 40?
A2: Ah… se puede hacer 4 + 39 x 3
Profesor: Bien, entonces ahora pueden calcular para el paso 59…
A1: Sería…. 4 + 58 x 3….
Profesor: Bien.. ¿y para 657?
A2: 4 + 656 x 3
…………

A continuación, el profesor propone la siguiente actividad, que él mismo ha elaborado :

Se desea decorar un piso con baldosas y alrededor de cada baldosa gris se ponen baldosas blancas como se muestra en el dibujo.

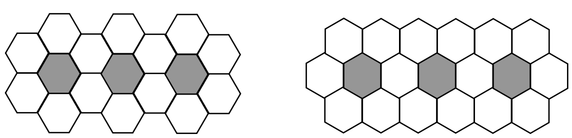


Image 4

a) ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan si el dibujo contiene 35 baldosas grises? ¿Y si contiene 679 baldosas grises?
b) Encontrar una fórmula que permita calcular el número de baldosas blancas necesarias para un número cualquiera de baldosas grises. Justificar.

El mismo grupo de alumnos (A1 y A2) tiene dificultad para interpretar y resolver el nuevo problema. Luego de diversos intentos, el profesor interviene:

…
Profesor: ¿Recuerdan lo que hicimos en la actividad anterior?
Silencio….

Profesor: Buscamos una manera de calcular para ir más rápido…
A2: Ah sí, cierto…
Profesor: ¿Pueden hacer un razonamiento similar para calcular rápidamente, como hicimos antes?
A2: Ah sí…

Paso 1	4 …	4+ 2
Paso 2	4 + 3 +…	4+ 3 + 2
Paso 3	4 + 3 + 3 …	4+ 3 + 3 + 1

……
A2: No se puede, no tenemos siempre 3….

Este pasaje muestra que la expresión «un razonamiento similar» usada por el profesor es interpretada de manera específica por el alumno: éste no "ve" en la estrategia propuesta en el primer problema la regularidad que el profesor espera sea reconocida (es decir, aquella que consiste en partir del primer término que es 6 y agregar siempre 4). Según Sadovsky et al. (2001), no es sorprendente que los alumnos no observen lo que el profesor espera, y que retengan aspectos que no son aquellos vinculados a la intencionalidad didáctica. Para el profesor, el ejemplo presentado a los alumnos en el primer problema es un ejemplo de «algo ya elaborado»: este ejemplo representa la particularidad de una generalidad preexistente que vincula finalidad y objetivo didáctico. La generalidad que el alumno debe reconocer está en principio contextualizada por el objetivo didáctico de producir una expresión algebraica. Un doble proceso de adaptación y de aculturación caracteriza los procesos de generalización de conocimientos matemáticos escolares. Efectivamente, por un lado, los alumnos adaptan o modifican sus conocimientos para encontrar una solución al problema presentado y, por otro, esta actividad específica debe insertarse en un proceso de institucionalización que la ubica al interior de un conjunto de saberes preestablecidos que el alumno debe apropiarse.

En el primer problema presentado, la relación entre el número de veces que se adiciona 3 y el paso no es identificada explícitamente por el profesor y, sin embargo, este implícito es un elemento esencial para el reconocimiento de la relación de generalidad buscada.

Vemos bien que el rol de los ejemplos (lo singular) en la producción de la generalidad depende de las decisiones específicas tomadas por el profesor (implícitas y explícitas) y de la actividad realizada con los mismos.

Dos niveles de abstracción (Orit Hazzan et Rina Zazkis, 2005) están presentes en los ejemplos presentados. En primer lugar, un nivel que pone en juego relaciones entre objetos (los que hacen parte del «medio» de la situación) y sujetos (conocimientos del sujeto), relaciones que se ponen en evidencia mediante la identificación de regularidades que no eran esperadas por el profesor (regularidades que no son inherentes a los objetos sino que emergen de la interacción sujeto-objeto, es decir, a partir de la interpretación que hace el alumno de la situación en la cual se encuentra, a partir de un conjunto de conocimientos y de experiencias disponibles) y que implican también la construcción de esquematizaciones (en el sentido de Gonseth). En segundo lugar, un nivel (dirigido por la acción del profesor) que exige una reflexión sobre la relación proceso-objeto (centrado sobre las acciones), vinculando la producción de una formula y su representación simbólica mediante la producción de una expresión algebraica.

El acceso a niveles de abstracción más elaborados, centrados sobre «las acciones» o sobre «acciones hechas sobre acciones», etc. , está íntimamente ligado con la variedad y con la riqueza de las situaciones didácticas presentadas, puesto que éstas favorecen la elaboración de relaciones de naturaleza diversa.

La tradición empirista de la enseñanza presupone que los procesos de abstracción emergen a partir de la identificación de ciertos «rasgos comunes» al análisis de experiencias particulares y que estos rasgos son posteriormente aplicables a una variedad de experiencias nuevas, asociando de esta manera la generalización y la descontextualización. Estos rasgos identificados serían independientes de la intencionalidad didáctica y del contexto de producción (según esta tradición, estos rasgos están «contenidos» en las experiencias y el sujeto no tiene más que «descubrirlos»).

Nuestro trabajo muestra que si bien la abstracción implica un cierto proceso de descontextualización, este proceso está más bien ligado, en el ámbito del aprendizaje, a la variabilidad de los contextos de producción y a la intencionalidad didáctica inherente a la construcción de dichos contextos. Esta intencionalidad no está organizada en función de particularidades de los alumnos sino que se desarrolla al interior de prácticas específicas de una comunidad (de manera colectiva), en nuestro caso, las prácticas de enseñanza de las matemáticas. La naturaleza de las situaciones propuestas y la acción del profesor, en tanto que representante de una comunidad encargada de transmitir saberes matemáticos preexistentes, son elementos esenciales de dicha organización.

Nuestras observaciones muestran que las intervenciones de los profesores, relativas a alumnos con dificultad de aprendizaje, se centran en la reducción del nivel de complejidad de las tareas, a tal punto que se desnaturaliza el objeto matemático en cuestión y se obstaculiza el acceso a diferentes niveles de abstracción y generalización propios a la constitución del pensamiento algebraico. La atribución de las dificultades de abstracción a las características cognitivas de los alumnos debe analizarse a la luz de estos resultados.

Orit Hazzan y Rina Zazkis (2005) afirman que los alumnos priorizan estrategias de reducción de niveles de abstracción durante la resolución de actividades matemáticas («Reducing abstraction»). Nuestras investigaciones sugieren que esta afirmación debe interpretarse en el seno de una cultura escolar que favorece dicha reducción y que considera que el acceso a lo abstracto se realiza mediante la manipulación de «lo concreto», independientemente de la naturaleza de los saberes en cuestión.

El ejemplo que hemos analizado muestra que el sistema de referencia sobre el cual se construye el pensamiento algebraico en el ámbito escolar puede contener objetos matemáticos (y no necesariamente objetos materiales) y que la posibilidad de funcionar como medio de acción sobre el cual operar para construir nuevos objetos está vinculada con la familiaridad que el alumno adquiere con este sistema (es decir con los conocimientos implicados y no con el hecho de ser un medio formado por objetos materiales). Sin embargo, los alumnos interactúan con situaciones organizadas en función de diferentes niveles de abstracción y generalización, pero «lo abstracto» se torna «concreto», no mediante una reducción de los objetos de pensamiento a objetos materiales, sino en función de la frecuentación de los alumnos con situaciones didácticas variadas que permitan mostrar la utilidad de dichos objetos.

6. Conclusión

Hemos intentado poner en evidencia que ciertas proposiciones pedagógicas sugieren la manipulación de objetos concretos como medio para construir objetos algebraicos sin considerar el impacto que estas proposiciones puedan tener sobre la naturaleza de la conceptualización elaborada. No se trata de ninguna manera de descartar las manipulaciones materiales como parte de una experiencia didáctica sino de considerarlas en función de las condiciones didácticas que hacen posible el desarrollo del objetivo de enseñanza y de los niveles de conceptualizar a alcanzar.

El análisis de ciertas propuestas pedagógicas nos ha permitido ilustrar ciertas formas particulares de "concretización" de los objetos matemáticos, en particular aquellos que asocian los objetos matemáticos a objetos materiales, y que presuponen que las características de los primeros se construyen mediante la manipulación de los segundos. Se han también identificado ciertos obstáculos didácticos con el objetivo de contextualizar las interpretaciones estrictamente cognitivistas de las dificultades de abstracción en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo que es importante en la construcción del pensamiento matemático es la naturaleza de las interacciones entre los alumnos y un medio didáctico organizado por el profesor (medio que puede contener o no objetos materiales) y no la manipulación en sí misma de objetos materiales (Brousseau, 1990). El contexto juega un rol fundamental; en el contexto incluimos la finalidad de la situación, las interpretaciones producidas por los alumnos de la situación en la cual se encuentran y la acción del profesor que refleja ciertos modos culturales de la actividad matemática (Brousseau, 1990; Radford, 2016, 2015; Radford & al. 2009).

Los procesos de generalización y abstracción implicados en el aprendizaje de las matemáticas no son independientes de la naturaleza de las situaciones propuestas y de la acción del profesor en tanto que representante de la cultura matemática escolar (Radfird & al. 2009) y requieren actividades de reorganización de conocimientos, el establecimiento de nuevas relaciones, la integración de conocimientos vinculados a una objeto y el desarrollo de una práctica matemática sostenida formando parte de una práctica social preestablecida (Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T.,2001).

Una tensión caracteriza los procesos de enseñanza y aprendizaje, en lo que respecta a la abstracción en matemáticas: por un lado, los alumnos priorizan estrategias de reducción de los niveles de abstracción («Reducing abstraction», Orit Hazzan & Rina Zazkis) (posiblemente la cultura escolar favorece esta priorización) y, por otro lado, la especificidad de los objetos de saber provoca un movimiento inverso.

La interpretación de la producción de los alumnos y el análisis de las dificultades de aprendizaje deben realizarse en el contexto de esta tensión. Ciertas interpretaciones, en particular las realizadas por la psicología cognitiva (Autor, 2016), minimizan el rol que juegan las condiciones didácticas en la producción de saberes y atribuyen las dificultades de abstracción a deficiencias en los mecanismos cognitivos del sujeto.

Bibliografía

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. Petit x. Num. 80. p. 55-76.

Barallobres, G. (2016). Difficultés en mathématiques, difficultés d'abstraction: des liens nécessaires entre enseignement et apprentissage. *Bulletins AMQ*, Vol 56, No.4 35-51.

Barallobres. G. (2016). De légendes pédagogiques à légendes psychologiques : analyse des critiques de N. Baillargeon et didactique des mathématiques. McGill Journal of Education. Volume 51, No.2, Sping, 917-933.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Approaches to algebra : Perspectives for Research and Teaching. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bergeron, L. (2017). Difficultés d'abstaction en mathématiques: certains fondements théoriques et idéologiques du discours noospérien de l'adaptation scolaire. Mémoire de maîtrise. Université de Québec à Montréal.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations, in: C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F., Vandebrouck, F. Wozniak (éds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage. 33-43.

Brousseau, G. (1998). Théorie de situations didactiques. La Pensée sauvage, Grenoble, France.

Brun, J. et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, *90*(3), 261-285.

Cai, J., Knuth, E. (2011). Early Algebraization. Springer. Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des mathématiques, 66-79.

Coulange L., Drouhard J-P. (Eds) (2012), Enseignement de l'algèbre, Bilan et perspectives, Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble, France.

DeBlois, L. (2014). Les tensions et les questions soulevées dans les rapports enseignement/apprentissage des mathématiques liées aux élèves dits en difficulté. In Recherche sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, regard didactique. Presses de l'Université de Québec. 35-56.

Delaunay, A. «Abstraction», Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 19 avril 2016. URL : http://www.universalis.fr/encyclopedie/abstraction/

Fondation Jean Piaget (2000), Abstraction réfléchissante et généralisation constructrice (en linea). http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_

page.php?IDPAGE=124&IDMODULE=22

Giroux, J. (2000). Le plaisir de faire des mathématiques, de les enseigner et de les apprendre. http://www.adaptationscolaire.net/themes/JacintheGiroux.pdf.

Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire**.** Revue des sciences de l'éducation (302-325).

Gonseth, F. (1936) Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique. Felix Alcan, Paris.

Hazzan, O., Zazkis, R. (2005) Reducing Abstraction: The case of school mathematics. Educational Studies in Mathematics 58: 101–119.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. (2001) Abstraction in context : Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education. 34-49.

Houle, V. (2007) La calculette comme outil pour enseigner et apprendre la numération de position dans une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Laporte, J. (1940). Le problème de l'abstraction. Presse Universitaires de France. Legendre, M-F, Piaget et l'épistémologie. Fondation Jean Piaget (en ligne), http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=309&IDMODULE=72

L'Écuyer, R. (1987). L'analyse de contenu : notion et étapes. Dans Deslauriers, J.-P. (Éd.), Les Méthodes de la recherche qualitative (pp. 49-65). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Lemoyne, G; Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. Éducation et francophonie. Volume XXXI, (2), 67-79.

Mary, C., Squalli, H. (2014). L'activité de generalization et justification chez les élèves en difficulté. In Recherche sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, regard didactique. Presses de l'Université de Québe. 123-145.

Mucchielli, R. (1988). L'analyse de contenu des documents et des communications. (6e éd.). (Coll. « Formation permanente en sciences humaines »). Paris : les éditions ESF.

Otte, M. (1992). Constructivism and Objects of Mathematical Theory. In Javier Echeverria, Andoni Ibarra & Thomas Mormann (eds.), The Space of Mathematics. De Gruyter 296—313.

Paillè, P. et Muchielli, A. (2012). L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales. Collection U, Armand Collin.

Radford, L. (2016). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. International Journal for Research in Mathematics Education (RIPEM), 6(2), 187-206.

Radford L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 334-345. Alger: 10-14.

Radford, L., Miranda, I., & Demers, S. (2009). Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Sadovsky, et al. (2001). Actualizacion curricular 7mo grado. Direccion de curricula. Gobierno de la ciudad de Buenos Aires.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. Petit x,12. Irem de Grenoble.

Serfati, M. (2005) La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Paris: Éditions Pétra.

Sierpinska, A. (2012). L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations, recherches. (pp. 91-98). Montréal, QC : Presses de l'Université du Québec.

Autor: **Gustavo Barallobres.** Profesor en la facultad de ciencias de la educación de la Universidad de Quebec en Montreal, miembro del grupo de estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en adaptación escolar (GEMAS), investigador asociado al laboratorio «Cultulra y difusión de saberes», de la Universidad Victor Segain, Bordeaux 2, Francia.

Dirección electrónica: barallobres.gustavo@uqam.ca

Dirección postal : 4313 Messier apt 3, Montréal, Québec, H2H2H6

Tel : 1-514 527-1503

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 48-68

Introduciendo la escritura de un diario en matemáticas: enfoques de la tarea e impacto en el alumnado

Eduardo Fernández Delgado, Matías Arce Sánchez

Fecha de recepción: 08/04/2017
Fecha de aceptación: 19/08/2017

Resumen	En este artículo se presenta un análisis de los diarios producidos por los alumnos en una experiencia en la que se introdujo su escritura a partir de unas pautas generales. La experiencia se desarrolló durante el tema de derivadas en una clase de 1º de Bachillerato (16 años). Los objetivos son detectar las características predominantes en los diarios y estudiar su posible impacto en el alumnado. Se proponen tres categorías de análisis de un diario: modelo, sentido y carácter. Se ha detectado una mayoría de diarios de modelo recuento, y una mayor presencia de cuestiones en alumnas, que tienden a utilizar el diario como un instrumento que les permite tener una comunicación personalizada con el docente. **Palabras clave**: Escritura de un diario, categorización de un diario, análisis de contenido, derivada de una función, Bachillerato.
Abstract	This article presents an analysis of the journals produced by the students in an experience in which the writing of a journal is introduced using general guidelines. The experience was developed during the teaching implementation of the topic of derivatives in a Grade 11 class. The objectives are to detect the predominant characteristics of the journals and to analyze their potential impact in students. We propose three categories of analysis of a journal: model, sense and character. It has been detected a majority of journals of a recount model, and a greater presence of questions in female students, who tend to use the journal as an instrument to have a personalized communication with the teacher. **Keywords**: Journal writing, categorization of a journal, content analysis, derivative of a function, High school.
Resumo	Este artigo apresenta uma análise dos diários produzidos pelos alunos em uma experiência na qual sua escrita foi introduzida a partir de diretrizes gerais. A experiência foi desenvolvida durante o tema de derivada de uma função em uma classe de ensino secundário (16 anos). Os objetivos são detectar as características predominantes em diários e examinar seu eventual impacto nos estudantes. São propostas três categorias de análise dos diários: modelo, sentido e caráter. Foi detectada uma maioria de diários de modelo de reconto e uma maior presença de questões em alunas, que têm tendência a usar o diário como instrumento de comunicação personalizada com o professor. **Palavras-chave:** Escrita de um diário, categorização de um diário, análise de conteúdo, derivada de uma função, ensino secundário.

1. La escritura en matemáticas: El caso particular de la escritura de un diario

Actualmente, vivimos en la llamada *Sociedad de la Información*, en la que el desarrollo y la popularización de las TIC generan y posibilitan múltiples formas de acceso a información y de comunicación entre personas. Este hecho provoca una mayor necesidad en la ciudadanía de ser hábil en la comunicación oral o escrita de ideas en entornos académicos, laborales y sociales (NCTM, 2003).

Esta necesidad no es ajena a las matemáticas. Varios documentos curriculares de referencia recogen la importancia de la comunicación en la matemática escolar. La comunicación es uno de los cinco estándares asociados a procesos que considera el NCTM (2003). Esta organización destaca la necesidad de capacitar a los estudiantes para organizar, consolidar y expresar de forma clara y coherente su pensamiento matemático, utilizando un lenguaje matemático adecuado; así como para analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático comunicado por otras personas. Los marcos de PISA también recogen el papel fundamental y transversal atribuido a la comunicación en el desarrollo de la competencia matemática. En el marco de 2003 (OCDE, 2004), inspirado en el proyecto KOM de Niss (2003), la comunicación aparece explícitamente como una de las ocho dimensiones o constituyentes de la competencia matemática o alfabetización matemática (*mathematical literacy*). Además, también está ligada a dimensiones como la formulación y la resolución de problemas, la argumentación o el uso de lenguaje matemático. En la actualización del marco, la comunicación es una de las siete habilidades matemáticas fundamentales consideradas (OCDE, 2015).

La apelación a la comunicación en matemáticas como un contribuyente fundamental en el desarrollo de su aprendizaje tiene como referente a Vygotsky (Nesher, 2000). Vygotsky (1995) defiende que el desarrollo individual no puede entenderse sino como producto de la interacción social, a través de fenómenos de internalización y de transformación interna, y en los que el lenguaje juega un papel fundamental como instrumento de mediación. Este autor establece una interrelación o conexión entre el pensamiento (desarrollo cognitivo) y el lenguaje, al servir éste como medio para internalizar y articular las ideas. Así, la reflexión y la comunicación en matemáticas pueden verse como procesos entrelazados. El desarrollo regular de actividades basadas en la comunicación matemática apoya la interacción, la reflexión y el desarrollo de ideas, así como el desarrollo de un aprendizaje más significativo y profundo de los conceptos matemáticos (NCTM, 2003).

La comunicación puede producirse a través de diferentes medios: oralmente (escuchar, hablar), por escrito (leer, escribir), por medio de gestos… En particular, el artículo se centra en la comunicación escrita, que se caracteriza por necesitar una mayor planificación para su desarrollo, por ofrecer una retroalimentación tanto inmediata como posterior (carácter permanente) y por ser un medio de expresión más cómodo, especialmente para los más tímidos (Countryman, 1992; Pimm, 1999).

Este trabajo se centra en el nivel de Bachillerato en España (16-17 años). Los currículos de matemáticas para este nivel de las dos últimas leyes educativas

(Ministerio de Educación y Ciencia, 2007; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015) hacen referencia a la comunicación de un modo más o menos explícito. No obstante, se detecta un mayor énfasis en la comunicación de productos (por ejemplo, un informe explicando los resultados al resolver un problema) que en el propio proceso de comunicación y en su papel para apoyar la reflexión y la comprensión. Esto lleva asociado una preponderancia de lo que Nesher (2000) denomina *hablar matemáticamente* (comunicarse utilizando un lenguaje matemático formal) o la utilización de un *discurso mixto* (combinando el lenguaje matemático con una verbalización asociada al lenguaje y terminología matemática), sin mencionarse aspectos propios del *hablar de matemáticas*, en los que se usa el lenguaje natural como medio para expresar pensamientos sobre las matemáticas.

Sin embargo, nuestra experiencia como docentes de matemáticas (en formación reglada y en clases particulares) nos ha permitido observar cómo los alumnos suelen mejorar su aprendizaje cuando son incitados a expresarse y a compartir sus reflexiones y sus pensamientos matemáticos, oralmente o por escrito. Esta visión coincide con la de la corriente “Escribir para Aprender” (*Writing to Learn*), basada en un enfoque cognitivo de la escritura como medio y herramienta para construir y desarrollar el aprendizaje del alumno, así como para clarificar y modificar sus estructuras de pensamiento (Countryman, 1992; Morgan, 1998).

En una clase particular es posible desarrollar este tipo de comunicación a través de diálogos con el alumno. Sin embargo, el alto número de estudiantes y la limitación temporal en las aulas de matemáticas plantea la necesidad de considerar algún tipo de tarea que nos permita mantener una comunicación con todos los alumnos sobre su proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, uno de los grandes grupos de tareas planteados habitualmente con este propósito son las actividades de “escritura de un diario” (*journal writing*). En ellas, a través de la escritura regular de entradas o episodios por parte del alumno, se pretende que éste reflexione sobre su aprendizaje y exprese sus pensamientos y sentimientos hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Shield & Galbraith, 1998). Este tipo de actividades son poco frecuentes en las aulas de matemáticas, y tienden a despertar cierto escepticismo, ya que los alumnos suelen estar poco acostumbrados a tareas matemáticas en las que tengan que realizar una producción escrita (Countryman, 1992; Pimm, 1999).

Sin embargo, existen investigaciones en diversos contextos y niveles que han evidenciado los efectos positivos ligados a la introducción de la escritura de un diario en matemáticas durante un periodo de implementación amplio. Ejemplos de ello son Borasi y Rose (1989), Waywood (1992), Clarke, Waywood y Stephens (1993), Salinas (2004) o Rogers (2014). Borasi y Rose (1989) clasifican esos efectos positivos en tres grandes grupos, que se refrendan y completan en el resto de estudios, y que se resumen a continuación:

Efectos positivos para el propio alumno: El valor terapéutico para que los estudiantes puedan reconocer y superar posibles ansiedades y miedos hacia las matemáticas y cambiar su concepción de esta disciplina, la mejora de su capacidad para explicar y articular conceptos matemáticos y habilidades de resolución de problemas, y la ayuda que supone para que los estudiantes sean más responsables y conscientes del desarrollo y la evolución de su propio proceso de aprendizaje, incluyendo aquello que no conocen o que no comprenden satisfactoriamente.

Efectos positivos para la labor docente y su desarrollo profesional: Los diarios permiten al docente observar la evolución del alumno y ofrecerle una retroalimentación o monitorización personalizada, así como obtener información sobre el desarrollo e impacto del propio curso y su metodología.

Efectos positivos para la comunicación profesor-alumno: El diario permite un diálogo, intercambio y discusión de ideas, dar sugerencias o resolver dudas concretas. Además, el diario también genera una atmósfera de apoyo, compenetración y respeto mutuo entre los alumnos y de éstos con el docente, que mejora la motivación, seguridad, confianza y desempeño de los estudiantes.

De todos los estudios reseñados, la investigación de Waywood y colegas (Clarke et al., 1993; Waywood, 1992, 1994) puede calificarse de paradigmática, por su carácter longitudinal durante varios cursos de Educación Secundaria (12-17 años) en un colegio australiano. No obstante, en dicho estudio se fijó qué cuatro tareas tenían que desarrollar los alumnos en sus diarios: realización de resúmenes, recolección de ejemplos, planteamiento de preguntas y discusión de temas o ideas.

Dada la diversidad y diferentes necesidades del alumnado, se considera que los alumnos pueden enfocar la tarea de escritura de un diario de diferentes modos que les resulten útiles, al igual que sucede con instrumentos como su cuaderno de matemáticas (Arce, 2016). Además, estos diferentes modos pueden tener un mayor o menor impacto en su estudio y aprendizaje de la asignatura. Así, en este artículo se presentan los resultados derivados del análisis de la experiencia de introducción de la escritura de un diario durante un tema del curso en una clase de 1º de Bachillerato (16 años). La introducción se realizó a través de una tarea en la que se dio libertad a los estudiantes para desarrollar el diario como consideraran, salvo algunas pautas generales. En este sentido, el propósito de este trabajo es más cercano al de Rogers (2014), aunque en un contexto de alumnado de Secundaria.

2. Objetivos de la investigación aquí presentada

Las hipótesis principales que subyacen al planteamiento y al análisis, desde un punto de vista investigador, de esta experiencia son que la actividad de “escritura de un diario” puede ser enfocada y entendida de diferentes formas entre el alumnado, y que estas diferencias pueden hacer que la valoración y el impacto del desarrollo de un diario en el estudio y el aprendizaje de las matemáticas sean muy diversas. Bajo estas premisas, y considerando el bajo número de investigaciones en Educación Matemática cuyo foco es analizar material escrito producido por los alumnos (Shield & Galbraith, 1998), esta investigación tiene tres objetivos interrelacionados:

- Detectar diferentes modos en los que los estudiantes se enfrentan y desarrollan la tarea de "escritura de un diario", así como qué tipo de aspectos recogen en ellos.
- Desarrollar categorías de interés docente-investigador para analizar el trabajo plasmado por los estudiantes en un diario de matemáticas.
- Estudiar el impacto del desarrollo de esta experiencia entre el alumnado, tanto desde el punto de vista del rendimiento académico como de los hábitos de trabajo en matemáticas y de su estudio de la asignatura.

Así, en esta investigación se pretende analizar pormenorizadamente los diarios producidos por los alumnos, pero sin aspirar a evaluarlos. Una evaluación de los diarios puede estar ligada a una presuposición de qué es lo que "debe contener". Este hecho coartaría su libertad para poder reflexionar, explorar y expresar lo que consideren a través de esta tarea. Este aspecto es clave para el enfoque de esta investigación. No obstante, al plantear la tarea ha sido necesario poner en valor esta actividad de escritura como parte de las actividades del tema, para que fuera realizada por el alumnado con mayor interés.

3. Contexto, planteamiento de la experiencia y metodología de análisis

La experiencia se llevó a cabo en un instituto público de un municipio de la provincia de Valladolid (España), durante el curso 2014/2015. En concreto, en un aula de 1º de Bachillerato (16 años), de la modalidad Ciencias Sociales. En este nivel educativo, consideramos que los estudiantes tienen una autonomía y una madurez suficiente para poder desarrollar la tarea de escribir un diario con una mayor diversidad y riqueza. En particular, la experiencia se circunscribió al tema sobre la introducción a la derivada de una función. Este tema comprendió tres semanas del comienzo del tercer trimestre. En este grupo había 14 estudiantes, que identificaremos con el siguiente código: una "E" seguida de un número, E1 a E14. Entre los catorce hay seis chicos (E1, E3, E5, E8, E12 y E13) y ocho chicas (E2, E4, E6, E7, E9, E10, E11 y E14). Durante el curso, las clases han seguido un patrón de exposición de contenidos por parte del docente (y primer autor de este artículo), con el apoyo ocasional de un libro de texto, junto con el planteamiento, resolución y corrección de actividades. En el tema de derivadas, este patrón se complementó con la tarea de escritura de un diario por cada estudiante, que se explica en este apartado. La experiencia constó de tres fases: fase previa, fase de implementación en el aula y fase de análisis y reflexión.

3.1. Fase previa

Con anterioridad al inicio del tema sobre la derivada, se diseñó la tarea de escritura del diario y su integración en la planificación y el desarrollo del tema. Siendo conscientes del cambio que suponía introducir una actividad periódica de escritura reflexiva, a la que los alumnos no estaban acostumbrados, se propusieron durante el tema previo algunas tareas similares a la escritura de una entrada de un diario. La Figura 1 muestra el enunciado de una de ellas. Los alumnos hicieron estas actividades en los últimos minutos de las clases, entregando sus respuestas al docente. El profesor comentó las respuestas haciendo algunas sugerencias, pero dando libertad a los alumnos en su modo de enfocar la tarea, para que se desterrara la posible asunción de la existencia de una “respuesta correcta” o “pretendida”.

Tarea 1

1.- Hay una cosa importante en matemáticas que he aprendido hoy:

2.- Hoy ha sido fácil para mí:

3.- Hoy ha sido difícil para mí:

4.- Me gustaría que se resolvieran el próximo día las siguientes dudas:

5.- Resume lo que has aprendido hoy. ¿Qué cosa te sigue pareciendo un rompecabezas?

Figura 1. Ejemplo de tarea propuesta en las clases durante la fase previa

3.2. Fase de implementación en el aula

El tema de derivadas abarcó doce sesiones. Las diez primeras se dedicaron a la exposición y práctica de los distintos contenidos del tema (tasa de variación media e instantánea, derivada como cociente del límite incremental, cálculo de la derivada en un punto, función derivada, relación con la recta tangente, aplicaciones de la derivada en situaciones contextualizadas y no contextualizadas) y la resolución de dudas planteadas por los estudiantes. En la sesión once los alumnos realizaron una prueba de evaluación del tema. La sesión doce se dedicó a resolver en el aula la prueba de evaluación, y a que cada alumno rellenara un breve cuestionario evaluando la tarea de escritura de un diario (utilidad, valoración de su trabajo en él, de la retroalimentación recibida por el docente, aspectos positivos y negativos…), y su posible impacto en los hábitos de trabajo y estudio en matemáticas del alumno.

En la primera sesión se entregaron y explicaron a los estudiantes las instrucciones básicas para el desarrollo de la tarea de escritura de un diario a lo largo del tema, que se muestran en la Figura 2. Se proponía a cada alumno la escritura de cuatro entradas semanales, sin que tuviera que ligarse obligatoriamente cada entrada con una de las cuatro sesiones de clase semanales. La tarea fue acogida gratamente por los estudiantes, que mostraron una buena disposición para su realización más allá del pequeño desconcierto inicial derivado del planteamiento de una actividad novedosa para ellos.

Durante las sesiones se controló visualmente el trabajo de los alumnos en sus diarios, fijándose entregas en las sesiones 4, 8 y 11. El objetivo de esas entregas fue que el profesor pudiera leer con detenimiento las entradas escritas por cada alumno, y aportar una retroalimentación a los contenidos o aspectos manifestados. Los diarios también fueron fotocopiados, como parte de los datos recogidos durante la experiencia. En la sesión posterior a cada recogida, los diarios eran devueltos a los alumnos, añadiéndose la retroalimentación docente: posible resolución de dudas o cuestiones planteadas, recomendación de actividades, alerta sobre posibles malentendidos en la comprensión de los conceptos… También se sugerían algunos cambios generales invitando al alumno a generar entradas con un mayor carácter reflexivo, instando a evitar el uso de frases vacías o demasiado genéricas.

EL DIARIO DE MATEMÁTICAS

Durante este tema sobre la derivada de una función, vais a realizar un diario en una libreta o cuaderno a vuestra elección. Planead escribir al menos cuatro entradas por semana. No es necesario que invirtáis mucho tiempo en su redacción, entre cinco y diez minutos serían suficientes para cada entrada. Cada semana recogeré vuestros diarios (los lunes) y os los devolveré comentados al día siguiente.

El tema de las entradas de vuestro diario deberá estar relacionado con vuestro aprendizaje en matemáticas. Qué es lo que hacéis, descubrís, intentáis, sentís, pensáis... Dentro de este contexto, podéis escribir sobre cualquier tema o problema que os apetezca, siempre y cuando estéis dispuestos a que yo lo lea.

Para guiar vuestros pensamientos y reflexiones podéis tomar como ejemplo algunas de estas preguntas para redactar vuestras entradas.

1.- ¿Qué aprendiste en clase, en tus actividades, en las dudas de otros compañeros, en las tareas que se mandaron para casa?

2.- ¿Qué preguntas o dudas tienes? ¿Hasta dónde has entendido y/o cuándo te has perdido?

3.- ¿Has intentado las tareas? ¿Has hecho alguna más a mayores? ¿Conseguiste resolverlas? ¿Cómo?

4.- Describe algún descubrimiento que hayas tenido al hacer matemáticas o durante las clases de matemáticas.

5.- Describe el proceso que has seguido para resolver un problema.

6.- ¿Hay algo que te confunde? ¿Qué te parece un reto? ¿Qué te gusta? ¿Qué no te gusta?

Escribir un diario puede ser una herramienta muy poderosa para aprender matemáticas. A vosotros os servirá para mejorar vuestros resultados y a mí para evaluaros de una mejor manera y para enseñaros de una forma más individual y personal.

Figura 2. Pauta escrita dada a los alumnos para la elaboración de un diario de matemáticas

3.3. Fase de análisis de la experiencia y obtención de resultados. Datos recogidos y metodología de análisis

La experiencia fue analizada con detalle en esta tercera fase, desde una perspectiva investigadora, y teniendo en cuenta los tres objetivos propuestos. El análisis fue desarrollado por los dos autores. Se recogieron diferentes tipos de datos, con la intención de que la triangulación de las diferentes fuentes condujera hacia la obtención de resultados y reflexiones más sólidas: las fotocopias del diario escrito por cada alumno (datos principales), las respuestas de cada alumno al cuestionario valorando la implementación, el diario de clase del docente (describiendo y analizando cada sesión) y las calificaciones de los estudiantes durante el curso y, en particular, en la prueba de evaluación del tema de derivadas.

La metodología base utilizada para analizar los diarios han sido las técnicas de *análisis de contenido* (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Estas técnicas de investigación utilizan procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción de un determinado contenido analizado. Su objetivo es la formulación de inferencias reproducibles y válidas en el contexto de producción del contenido, dicho de otro modo, una interpretación adecuada del contenido que nos permita conocer mejor diversos aspectos y fenómenos. En nuestro caso, la *unidad de registro* o unidad base ha sido cada una de las entradas escritas por cada alumno. El análisis constó de dos etapas: una primera en la que cada entrada fue analizada de forma independiente, y una segunda donde el diario de cada alumno fue analizado globalmente para estudiar las características predominantes en él. El marco teórico utilizado como referencia en este análisis se explica en el siguiente apartado.

4. Marco teórico para analizar los diarios de los alumnos

En este apartado se explican las ideas teóricas de referencia consideradas, y su adaptación concreta para el análisis de las características y del contenido de los diarios generados. En la primera parte, se explica el marco para analizar cada entrada del diario de forma independiente, distinguiendo tanto el tipo de entrada como los elementos que la componen. Posteriormente, se expone el marco para categorizar un diario de forma global, según las características predominantes en él.

4.1. Marco para analizar una entrada de un diario

El primer aspecto que hemos analizado es el **tipo de entrada** escrita. Se han tomado los tres tipos de entrada propuestos en los trabajos de Waywood (1992) y de Clarke et al. (1993) como punto de partida. No obstante, se han adaptado los mismos dado que en nuestra experiencia los alumnos tenían más libertad sobre qué escribir en sus diarios. Los tres tipos, y su significado en este artículo, son:

- Entrada de tipo **recuento**: Entrada que contiene una repetición de contenido perteneciente a alguna sesión, trascribiéndose total o parcialmente lo presentado en clase un día concreto.
- Entrada de tipo **sumario**: Entrada en la que se presenta el contenido de una sesión, pero reestructurándose y transformándose de algún modo. En estas entradas hay una implicación del estudiante con el contenido, enunciando y organizando la información para formarse una visión particular de la misma.
- Entrada de tipo **diálogo**: Entrada en la que se va más allá del contenido tratado en las sesiones. Son entradas muy diversas en las que se aporta una visión contextualizada de la clase. Por ejemplo, el estudiante puede hablar sobre la integración de los nuevos conceptos con sus conocimientos previos,

analizar los contenidos desde una perspectiva distinta a la de la clase, o desarrollar ejemplos o actividades diferentes de las propuestas.

Admitimos la posibilidad de que una entrada, en su desarrollo, contenga características correspondientes a diferentes tipos. En ese caso, se ha permitido asignar dos tipos a su codificación (por ejemplo, entrada de tipo sumario-diálogo).

El segundo aspecto considerado para analizar son los **elementos** que pueden escribirse en una entrada. Estos pueden referirse a la propia matemática escolar, a la relación del estudiante con las matemáticas o a su proceso de enseñanza-aprendizaje. Para analizar los elementos propios del contenido matemático escolar que los alumnos pueden escribir en los diarios utilizaremos como referencia el *análisis de contenido matemático* propuesto por Rico y colaboradores (Picado y Rico, 2011, Rico, 2013). En él, se adapta el triángulo semántico de signo, sentido y referencia de un concepto para establecer tres dimensiones de análisis: la *estructura conceptual* (referencia), la *fenomenología* (sentido) y los *sistemas de representación* (signo). Aquí nos centraremos en las dos primeras.

La *estructura conceptual* comprende un sistema organizado de conceptos y procedimientos, junto con sus relaciones, propiedades y criterios de veracidad que dan lugar a una estructura matemática que los organiza y justifica. En el contexto de los diarios, los alumnos pueden escribir hechos, definiciones de un concepto, procedimientos, conexiones, propiedades o teoremas y sus demostraciones. Cada uno de ellos, para nosotros, será un **aspecto teórico** contenido en el diario.

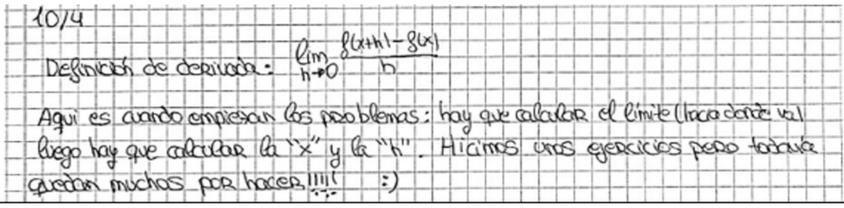
La *fenomenología* incluye aquellas situaciones, contextos o problemas que dan origen y dotan de sentido a la estructura conceptual de un contenido. En los diarios, los alumnos pueden escribir ejemplos de aplicación de algún procedimiento o teorema, de situaciones que involucren algún concepto, o, incluso, pueden resolver tareas asociadas a algún tópico, que también contribuyen a dotar de sentido su introducción. Cada uno de ellos será un **aspecto práctico** contenido en el diario.

Además del contenido matemático escolar, en el diario pueden aparecer otras anotaciones. Los alumnos están inmersos en un proceso de aprendizaje, por lo que pueden surgir y plantear dudas o incertidumbres sobre algún tópico o sobre el trabajo práctico desarrollado. Nos referiremos a estos elementos como **cuestiones**. Un ejemplo: “He llegado hasta aquí porque no sabía cómo resolver a partir de ahí con el logaritmo neperiano”, en el proceso de cálculo en el diario de la derivada de una función, y en la que un alumno manifiesta un bloqueo.

Por último, los estudiantes también pueden escribir sobre su relación con las matemáticas tratadas en las clases, sobre su proceso de aprendizaje o sobre sus preferencias personales en esos procesos. Las llamaremos **apreciaciones**. Dentro de ellas, y según su nivel de concreción, hemos distinguido entre *apreciaciones generales* (un ejemplo: “la clase de hoy me ha resultado sencilla”, sin concretar ni justificar por qué) o *específicas* (un ejemplo: “hoy me ha resultado difícil entender por qué, al calcular la derivada, hemos escrito el límite con h tendiendo hacia 0”).

4.1.1. Ejemplo de aplicación del marco

Se ilustra la aplicación del marco a una entrada concreta, escrita por el alumno E12 durante la experiencia. La Figura 3 muestra un escaneo de la entrada y la transcripción del texto escrito en ella. El alumno, en dicha entrada, resume algunos aspectos de la clase, e intenta describir uno de ellos: el proceso para calcular la derivada de una función a partir de la resolución del límite del cociente incremental. No hay ningún aspecto en el que intente ir más allá del contenido de la sesión que toma como referencia. Así, se ha catalogado la entrada como de tipo *sumario*.


10/4
Definición de derivada: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Aquí es cuando empiezan los problemas: hay que calcular el límite (hacia donde va) luego hay que calcular la "x" y la "h". Hicimos unos ejercicios pero todavía quedan muchos por hacer!!!!! :)

Definición de derivada: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Aquí es cuando empiezan los problemas: hay que calcular el límite (hacia donde va) luego hay que calcular la "x" y la "h". Hicimos unos ejercicios pero todavía quedan muchos por hacer!!!!! :)

Figura 3. Ejemplo de entrada (diario del alumno E12) y transcripción del texto escrito en ella

En relación a los elementos de esta entrada, en la primera línea se anticipa la escritura de la definición de derivada. Dicha definición se escribe analíticamente, pero sin igualarla a f'(x). Así, la primera línea contiene un aspecto teórico, que pretende completar escribiendo: "Hay que calcular el límite (hacia dónde va) luego hay que calcular la x y la h". Después escribe una apreciación general, "Aquí es cuando empiezan los problemas", sin detallar cuáles son para E12 esos problemas asociados al cálculo. En la última frase escribe "Hicimos unos ejercicios pero todavía quedan muchos por hacer!!!!!" (*sic*). La falta de concreción sobre esos ejercicios y posibles aspectos explícitos de su resolución hacen que no computemos esta frase como aspecto práctico. Se ha fijado la necesidad de hacer explícitos los elementos para computarse en el análisis. Por ejemplo, no se ha contado como aspecto teórico una frase como "Hoy hemos visto la tasa de variación media" sin intentar explicar el concepto, o como cuestión una frase como "Tengo dudas".

En resumen, la entrada de la Figura 3 se ha codificado como una *entrada de tipo sumario*, que contiene *un aspecto teórico* y *una apreciación general*.

4.2. Marco para categorizar globalmente un diario

Se han establecido tres variables globales de análisis para detectar las características y contenido predominante en un diario: modelo, sentido y carácter.

La variable **modelo** parte del tipo asignado a cada entrada, y del número de veces que aparece cada etiqueta (recuento, sumario, diálogo) en el total de entradas de que consta un diario. Se ha usado la siguiente regla: se consideran como característicos de un diario aquellos tipos presentes en al menos el cuarenta por ciento de las entradas. En ese caso, la variable modelo toma el nombre de ese tipo o tipos. Ilustramos la asignación con el ejemplo concreto de E4. De las diez entradas de esta alumna, seis se codificaron como entradas de tipo recuento, tres como diálogo y una como recuento-diálogo. Así, la etiqueta "recuento" (ver Tabla 1) se ha asignado a siete entradas (70% del total) y la etiqueta "diálogo" a cuatro (40%), por lo que la variable modelo asociada al diario de E4 es *recuento-diálogo*.

Dada la diferente naturaleza de los elementos presentes en las entradas de un diario, se han considerado dos variables distintas asociadas a los elementos. La variable **sentido** está ligada a tres de los tipos de elementos: aspectos teóricos, aspectos prácticos y cuestiones, y parte del número de elementos presentes de cada tipo. La asignación se ha hecho de acuerdo a esta regla: un tipo de elemento es característico de un diario si está presente en un porcentaje mayor o igual al 40% de la suma de aspectos teóricos, prácticos y cuestiones. En ese caso, diremos que el diario tiene un *sentido teórico* (en el caso de los aspectos teóricos), *práctico* (aspectos prácticos) o *interpelante* (cuestiones), yuxtaponiéndose los nombres si hay dos tipos de elementos que son característicos. Ilustramos esta asignación con el diario de E4. Este diario contiene cinco aspectos teóricos, un aspecto práctico y seis cuestiones (ver Tabla 2), por lo que hay doce elementos de estos tres tipos. Tanto el número de aspectos teóricos como el de cuestiones superan el 40% de ese total de doce, luego el diario de E4 tiene un sentido *teórico-interpelante*.

La variable **carácter** está ligada a las apreciaciones de los alumnos, que tienen un trasfondo más personal. Para asignar un valor a esta variable, se parte del número total de apreciaciones (generales o específicas) presentes. Como creemos que las apreciaciones específicas tienen más valor que las generales, por su mayor concreción y detalle, consideramos que el diario tiene un *carácter específico* si el porcentaje de apreciaciones específicas es mayor o igual al 40% del total. En caso contrario, el diario tiene un *carácter general*. El diario de E4 tiene 28 apreciaciones, ocho generales y veinte específicas (ver Tabla 2), por lo que tiene carácter *específico*.

5. Resultados derivados del análisis de los diarios

Comenzamos describiendo los resultados obtenidos al analizar cada variable en los diarios. La Tabla 1 recoge los resultados para la variable *modelo*.

Alumno/a	Nº de entradas del diario	Tipos de entradas			Modelo del diario
		Recuento	Sumario	Diálogo	
E1	9	9	3	0	Recuento
E2	10	8	3	0	Recuento
E3	4	4	0	0	Recuento
E4	10	7	0	4	Recuento-Diálogo
E5	6	6	0	1	Recuento
E6	10	8	2	1	Recuento
E7	2	0	2	0	Sumario

E8	11	10	0	1	Recuento
E9	5	4	1	0	Recuento
E10	8	7	1	0	Recuento
E11	11	11	0	0	Recuento
E12	7	4	6	0	Recuento-Sumario
E13	10	9	2	0	Recuento
E14	9	7	3	0	Recuento

Tabla 1. Categorización de los diarios para la variable *modelo*

Se observa que la mayoría de las entradas escritas durante la experiencia han sido codificadas como entradas de tipo recuento, mientras que las entradas de tipo diálogo han sido bastante minoritarias. Estos hechos se reflejan en la asignación global de la variable modelo. Once de los catorce alumnos (todos, salvo E4, E7 y E12) han escrito diarios de tipo *recuento*. El diario de E12 se ha categorizado como recuento-sumario, combinándose las características de ambos tipos en varias de sus entradas. El diario de E7 ha sido categorizado como sumario. Por último, la alumna E4 fue quien escribió un mayor número de entradas de tipo diálogo, combinándose con las entradas de tipo recuento (tipo resultante: recuento-diálogo).

En muchos alumnos, la escritura en los diarios se ha destinado a recoger algunos aspectos tratados en las sesiones, sin demasiado detalle y, en algunos casos, obviando las ideas más importantes. Son pocos los casos en los que se escribe sobre los contenidos de una forma contextualizada o desligada de la propia sesión, o en los que, al menos, se resume y reorganiza el contenido de algún modo. La mayoría de los alumnos han entendido la tarea del diario como un espacio en el que volver a contar, de forma escrita, algunos de los contenidos de las clases. Pensamos que este hecho hace que la escritura de un diario sea menos beneficiosa y útil para el aprendizaje matemático de lo que sería una escritura en la que sí hubiera cierta transformación o personalización del contenido tratado.

La Tabla 2 resume los resultados para las variables *sentido* y *carácter*.

Alumno/a	Elementos de las entradas			Sentido del diario	Apreciaciones		Carácter del diario
	A. Teór.	A. Prác.	Cuest.		Gener.	Espec.	
E1	1	0	1	Teórico-Interpelante	12	2	General
E2	3	8	3	Práctico	12	6	General
E3	0	0	0	Indefinido	5	0	General
E4	5	1	6	Teórico-Interpelante	8	20	Específico
E5	3	1	2	Teórico	7	0	General
E6	0	0	1	Interpelante	12	5	General
E7	1	0	1	Teórico-Interpelante	6	6	Específico
E8	1	1	0	Teórico-Práctico	2	6	Específico
E9	1	1	5	Interpelante	4	6	Específico
E10	1	0	0	Teórico	8	0	General
E11	0	0	2	Interpelante	8	3	General

E12	6	2	0	Teórico	2	1	General
E13	1	0	1	Teórico-Interpelante	10	3	General
E14	3	0	2	Teórico-Interpelante	12	5	General

Tabla 2. Categorización de los diarios para las variables *sentido* y *carácter*

Las columnas segunda, tercera y cuarta de la Tabla 2 evidencian que el número de aspectos teóricos, prácticos y cuestiones escritas en los diarios, en general, ha sido reducido. En ocho alumnos, la suma de los elementos de estos tres tipos fue menor o igual que dos. E3 es un caso extremo, asignándose a su diario un sentido *indefinido*. La mayor presencia de aspectos teóricos y de cuestiones se refleja en la asignación de esta variable. Tres etiquetas se repiten: sentido *teórico-interpelante* (en cinco alumnos, E1, E4, E7, E13 y E14), sentido *teórico* (en tres, E5, E10 y E12) y sentido *interpelante* (en tres, E6, E9 y E11). No obstante, el número de aspectos teóricos y de cuestiones difiere mucho entre alumnos con la misma asignación. Por ejemplo, para el sentido teórico-interpelante, la alumna E4 escribe 5 aspectos teóricos y 6 cuestiones, mientras que E1, E7 y E13 únicamente escriben un aspecto teórico y una cuestión en todo su diario. El diario de E2 es el único al que se ha asignado un sentido *práctico*, recogiendo abundantes aspectos prácticos.

El análisis de la presencia de estos elementos puede mostrar el modo en que los alumnos enfocan la tarea de escribir un diario. Los aspectos prácticos son muy escasos (salvo en E2), por lo que los alumnos no han considerado el desarrollo de ejemplos o la resolución de tareas como algo a incluir en sus diarios. La mayoría de estudiantes sí que consideraron la escritura de conceptos o propiedades, así como posibles dudas. La frecuente presencia de cuestiones evidencia que varios estudiantes parecen considerar la tarea como una oportunidad para compartir con el docente algunos aspectos más dificultosos o confusos, y generar una comunicación docente-estudiante (uno de los beneficios indicados por Borasi y Rose, 1989). En ese sentido, se ha detectado una diferencia reseñable entre chicos y chicas: los tres diarios con un sentido interpelante corresponden a chicas (E6, E9 y E11), y la media de cuestiones es mucho mayor en los diarios de las chicas (20 cuestiones en 8 diarios, media: 2’5) que en los de los chicos (4 cuestiones en 6 diarios, media: 0’67).

El número de apreciaciones escritas en los diarios ha sido abundante en algunos casos. Las apreciaciones de tipo general han sido más numerosas que las de tipo específico. Únicamente en cuatro alumnos (E4, E7, E8 y E9) se ha asignado al diario un carácter *específico* (al menos el 40% de apreciaciones son específicas). Estos cuatro estudiantes hacen un mayor esfuerzo por concretar y detallar sus apreciaciones personales, expresando una mayor introspección. La concreción también resulta de ayuda para que el docente pueda proporcionar retroalimentación adecuada o más ajustada a las impresiones verbalizadas. De todos ellos, destaca la estudiante E4, que escribe 20 apreciaciones específicas (una media de 2 por entrada). Diez estudiantes han escrito un diario con un carácter *general*, donde no hay apreciaciones específicas o son muy minoritarias en relación con las generales.

Una vez analizadas las tres variables por separado, se han cruzado sus asignaciones con el objetivo de detectar posibles relaciones entre ellas. La Tabla 3 muestra la información sobre el cruzamiento de las diferentes asignaciones y el número de diarios en cada caso. Se han detectado diez combinaciones diferentes. Tres de ellas aparecen en más de un alumno, correspondiendo todos ellos a diarios con un modelo recuento y un carácter general, variando en el sentido entre teórico (E5 y E10), interpelante (E6 y E11) o teórico-interpelante (E1, E13 y E14).

En nueve alumnos se combina un diario de modelo *recuento* con un carácter *general*, combinación que deja entrever un desarrollo de la tarea con un bajo nivel de involucramiento y reflexión por su parte, al limitarse a transcribir aspectos de las clases y a hacer apreciaciones sin concreción. Por el contrario, los dos diarios con un modelo más alejado del modelo recuento (*sumario* –E7- y *recuento-diálogo* -E4-) han tenido un carácter *específico*, además de un sentido *teórico-interpelante*. El enfoque subyacente a estos dos diarios contrasta con el anterior. La mayor concreción en las apreciaciones y la alta presencia de cuestiones puede promover que la tarea de escritura del diario tenga un mayor impacto en el aprendizaje.

Modelo del diario	Carácter del diario	Sentido del diario	Nº diarios (alumnos)
Recuento	General	Teórico-Interpelante	3 (E1, E13, E14)
		Teórico	2 (E5, E10)
		Interpelante	2 (E6, E11)
		Práctico	1 (E2)
		Indefinido	1 (E3)
	Específico	Teórico-Práctico	1 (E8)
		Interpelante	1 (E9)
Recuento-Sumario	General	Teórico	1 (E12)
Sumario	Específico	Teórico-Interpelante	1 (E7)
Recuento-Diálogo	Específico	Teórico-Interpelante	1 (E4)

Tabla 3. Información cruzada sobre los valores asignados para las tres variables globales

5.1. Caracterización del diario, rendimiento académico y valoración de la tarea

En este subapartado se compara la caracterización de los diarios con el rendimiento académico en el tema en el que se realizó la experiencia (derivada de una función) y con el cuestionario valorativo de la implementación de la tarea de escritura de un diario que cumplimentó cada alumno. La Tabla 4 presenta las calificaciones de la prueba de evaluación del tema de derivadas (tema inicial del tercer trimestre) en relación con su calificación en el segundo trimestre. El rango de las calificaciones es 0-10. Las calificaciones mostradas en la Tabla 4 son un indicativo del rendimiento previo y posterior a la introducción de la tarea de escritura del diario. Hemos analizado con mayor profundidad aquellos alumnos en los que la variación ha sido mayor (de al menos un punto), bien positiva (E3, E4 y E11) o bien negativa (E1, E5, E9 y E14). En la Tabla 5 se detallan las características de los diarios de estos siete alumnos.

Alumno/a	Evaluac. 2º trim.	Prueba derivadas	Variación	Alumno/a	Evaluac. 2º trim.	Prueba derivadas	Variación
E1	3	1’2	-1’8	**E8**	4	4’3	+0’3
E2	7	7’5	+0’5	**E9**	6	2’1	-3’9
E3	4	5’6	+1’6	**E10**	3	3	0
E4	6	7	+1	**E11**	6	7’1	+1’1
E5	6	5	-1	**E12**	6	6’1	+0’1
E6	4	4’1	+0’1	**E13**	3	3’9	+0’9
E7	3	3	0	**E14**	2	0’7	-1’3

Tabla 4. Comparación entre las calificaciones previas y posteriores a la experiencia

Mayor variación	Alumno/a	Modelo del diario	Sentido del diario	Carácter del diario
Mejora	E3	Recuento	Indefinido	General
	E4	Recuento-Diálogo	Teórico-Interpelante	Específico
	E11	Recuento	Interpelante	General
Empeoramiento	E1	Recuento	Teórico-Interpelante	General
	E5	Recuento	Teórico	General
	E9	Recuento	Interpelante	Específico
	E14	Recuento	Teórico-Interpelante	General

Tabla 5. Características de los diarios de los alumnos con una mayor variación en su rendimiento

No se detectan relaciones claras entre las características de los diarios desarrollados durante el tema de derivadas y la presencia de una variación significativa, positiva o negativa, en el rendimiento en este tema con respecto a la anterior evaluación. Es claro que existen muchos factores que pueden influir en el rendimiento, más allá de la introducción de la tarea. Buscando una mejor explicación a la variación en el rendimiento producida, se han analizado las respuestas que los alumnos dieron al cuestionario final, en relación a la valoración de la experiencia del desarrollo de un diario y su posible impacto en los hábitos de estudio de este tema.

Los tres alumnos con una mejora significativa (E3, E4 y E11) hicieron una valoración muy dispar de la tarea de escritura de un diario. La alumna E4 la valoró muy positivamente, resaltando su escritura como un medio para recoger lo realizado en clase, plantear al docente posibles dudas emergentes y recibir retroalimentación y explicaciones sobre ellas. Además, E4 integró la lectura del diario, sus dudas y la retroalimentación recibida, en su preparación de la prueba de evaluación. Sin embargo, no sucedió lo mismo con E3 y E11. E11 indicó que el diario le ayudaba a “ver” su aprendizaje, pero afirmó que su desarrollo era una tarea pesada. E3 valoró negativamente la introducción de esta tarea, a la que no asignó ningún propósito, y a la que dedicó un tiempo mínimo. Las respuestas de E3 nos hacen atribuir su mejora en la calificación a la realización de un gran número de actividades sobre la derivada en un contexto de docencia no reglada (academia).

En relación a los cuatro alumnos con una bajada significativa en la calificación (E1, E5, E9 y E14), sus respuestas en el cuestionario final evidenciaron la existencia de un hecho común: los cuatro dedicaron menos tiempo del habitual (o incluso nada) a preparar la prueba de evaluación. El estudiante con un descenso mayor, E9, indicó que no se acordó de dicha prueba, como atestigua el siguiente extracto: “Para ser sincera ni me acordé de la prueba que teníamos, así que con la única preparación que iba era lo que me acordaba de clase y lo hecho en la academia”. Los alumnos E1 y E14 tampoco dedicaron tiempo a preparar la prueba, por distintos motivos (E1: “No dediqué nada, el mismo día teníamos un examen de inglés muy complicado”; E14: “Mal. No me lo preparé, porque matemáticas la doy por perdida”). El alumno E5, cuya calificación bajó de 6 a 5, dedicó un tiempo menor del habitual a preparar la prueba: “Repasando la teoría y los ejercicios que dimos. Le dediqué 2 horas, porque tenía 3 exámenes más, si no suelo dedicar 2:30 o 3:30 horas”.

Estas evidencias nos hacen atribuir principalmente el descenso en las calificaciones a la menor preparación de la prueba de evaluación, y no a la implementación del diario o a sus características. La valoración de la tarea de escritura del diario entre estos cuatro estudiantes también ha sido dispar. Mientras que E9 la calificó como “una pérdida de tiempo”, la alumna E14 estimó y valoró muy positivamente la tarea, sobre todo su papel como canal para comunicar dudas al docente y recibir una explicación y retroalimentación personalizada. El bajo autoconcepto matemático que mostró esta alumna en sus respuestas y la alta valoración que hizo de la tarea nos hacen pensar que con una implementación temporal más extensa de la escritura del diario hubiera podido avanzar en su autoconcepto hacia las matemáticas, como también sugiere Countryman (1992).

Al ser preguntados por ello en el cuestionario, muchos alumnos reconocieron aspectos tanto positivos como negativos asociados a la introducción de la tarea de escritura de un diario. Ocho estudiantes hicieron una valoración global positiva (E1, E2, E4 a E7, E12 y E14), mientras que en seis fue negativa (E3, E8 a E11 y E13). La Tabla 6 recoge los aspectos positivos más repetidos en los cuestionarios.

Aspecto destacado positivamente	**Estudiantes**
Ayuda para recordar y/o repasar lo hecho en clase	E1, E2, E4, E6, E8, E10, E12
Posibilidad de plantear dudas y recibir *feedback* personalizado	E2, E4, E5, E6, E7, E14
Escritura como momento para “autoevaluar” o clarificar la comprensión sobre contenidos del tema	E7, E11, E14

Tabla 6. Aspectos positivos sobre los diarios que han sido más destacados por los estudiantes

Siete estudiantes resaltaron que la elaboración del diario es una ayuda para recordar y repasar lo realizado en el aula. La importante presencia de este aspecto puede estar ligada con la presencia mayoritaria de diarios con un modelo *recuento*. Seis estudiantes, cinco de ellas alumnas, han destacado la posibilidad de plantear al docente algunas dudas o aspectos no comprendidos sobre el contenido, y de poder recibir explicaciones y retroalimentación personalizada. Así, las alumnas parecen valorar más el papel del diario como instrumento que posibilita una comunicación docente-estudiante, lo que concuerda con la mayor presencia media de cuestiones en sus diarios. Por último, tres estudiantes destacaron positivamente el propio momento de escritura de la entrada, que les ayuda a clarificar su propia comprensión sobre los contenidos tratados o sobre los cuales van a escribir en su entrada. Es decir, han surgido beneficios ligados tanto al proceso de elaboración del diario como a la utilidad posterior del producto escrito resultante.

La Tabla 7 recoge los aspectos negativos más frecuentes. El más repetido fue la necesidad de dedicar varios periodos durante la semana a la escritura del diario, aumentando la carga de trabajo de la asignatura. No obstante, cinco de esos diez alumnos hicieron una valoración global positiva de la tarea, por lo que los beneficios generados parecen compensar ese mayor volumen. Otros dos aspectos fueron explicitados por más de un alumno: considerar que la tarea se hace pesada y no detectar ninguna finalidad o propósito a su escritura, valorando negativamente ésta.

Aspecto destacado negativamente	Estudiantes
Importante aumento de la carga de trabajo de la asignatura	E1 a E4, E5, E7 a E10, E13
La tarea de escribir un diario es muy pesada	E1, E11, E12
No se detecta un propósito / Es una pérdida de tiempo	E3, E9, E10

Tabla 7. Aspectos negativos sobre los diarios que han sido más destacados por los estudiantes

Si cruzamos la valoración global de la tarea con las características de los diarios desarrollados por los alumnos (Tablas 1, 2 y 3), la amplia variabilidad en las características no permite encontrar resultados concluyentes. Por ejemplo, dos de los cuatro alumnos con un diario de carácter *específico* valoraron positivamente la tarea (E4, E7), y dos no (E8, E9). Sin embargo, sí que puede destacarse que los tres alumnos con un diario que no respondía al modelo *recuento* (E4, E7, E12) han hecho una valoración global positiva de la tarea. En este hecho puede subyacer el mayor valor que tiene un diario donde el estudiante realice cierta organización, transformación o compleción del contenido de las clases. Asimismo, cuatro de los cinco alumnos con un diario con sentido *teórico-interpelante* valoraron positivamente la tarea, por lo que este sentido parece generar una mejor valoración del diario, posiblemente asociado a su papel como canal de comunicación docente-alumno.

El caso de E2 y E4 es especialmente remarcable. Estas dos alumnas dijeron haber realizado una planificación y un trabajo previo a la escritura de cada entrada de su diario, como destaca la siguiente respuesta transcrita del cuestionario de E4: "Antes de hacer la entrada, hacía ejercicios de matemáticas para ver si tenía alguna duda más […]". Además, E2 y E4 exteriorizaron una integración del diario, y de la retroalimentación docente recibida en él, en su estudio y preparación de la prueba de evaluación. Estas dos alumnas mejoraron su calificación en este tema con respecto a la evaluación anterior (Tabla 4). Esto puede mostrar el mayor beneficio que tiene el diario para los estudiantes cuando existe una mayor implicación en su desarrollo, y una mejor integración en su trabajo y estudio de la asignatura.

6. Discusión de los resultados: reflexiones y conclusiones

En este apartado presentamos una discusión de los resultados obtenidos, en relación a los objetivos del artículo; junto con varias reflexiones y conclusiones de interés tanto para investigadores como para docentes. Por una parte, y en relación al segundo objetivo, en este artículo se presenta una propuesta de marco para analizar la escritura de tipo diario desarrollada por estudiantes de matemáticas, partiendo de la tipología de entradas de Waywood (1992) y de Clarke et al. (1993), y del *análisis de contenido matemático* de Rico y colaboradores (Picado y Rico, 2011, Rico, 2013). La aplicación del marco ha permitido detectar qué aspectos y qué contenido han predominado en el diario de cada alumno, en un contexto de cierta libertad para su desarrollo. Esto también nos puede ayudar a detectar qué aspectos son más valorados o, quizá, son considerados como más útiles. Así, sostenemos que este marco es una aportación de este artículo, por su interés docente-investigador y por la posibilidad de ser transferido a otras experiencias.

Precisamente, la aplicación de este marco y la categorización de los diarios utilizando las tres variables (modelo, sentido y carácter) nos han permitido analizar cuáles han sido las características y el enfoque prevalentes en cada estudiante al entender la tarea de escritura de un diario, lo que constituía el primer objetivo de este artículo. La Tabla 3 ha mostrado la existencia de cierta diversidad en el modo de entender el diario y en su contenido, aunque también algunos comportamientos más generalizados. Por ejemplo, muchos alumnos han escrito un diario de *modelo recuento*, es decir, mayoritariamente han entendido que las entradas de su diario debían recoger algunos de los aspectos tratados en las sesiones de clase, de una forma pasiva, limitándose a describir las sesiones, utilizando frases a modo de titular, y/o a reproducir algún contenido. En este sentido, su concepción de lo que supone desarrollar un diario es próxima, en muchos casos, al significado más general de la palabra, como “lugar donde relatar lo que ha sucedido día por día”.

Nueve de los catorce alumnos han combinado un *modelo recuento* con un *carácter general*, por lo que, en muchas de sus entradas, tampoco han añadido valoraciones concretas sobre su relación con las matemáticas tratadas o sobre su proceso de enseñanza-aprendizaje. Bajo nuestro criterio, esta combinación muestra una concepción de la tarea con un enfoque superficial, muy alejado de la posible explotación de los procesos cognitivos asociados a la escritura, como medio para reorganizar o transformar la información y promover el aprendizaje. Es posible que, debido a la introducción de esta tarea ya en el tercer trimestre del curso, y a la brevedad de la intervención (únicamente en el tema de derivadas), muchos alumnos hayan optado por “cumplir el expediente” y completar la tarea dedicando un tiempo reducido, de un modo poco reflexivo. No obstante, un número importante de estudiantes expresaron que el diario les ayudaba a recordar y repasar lo realizado en clase. Es decir, el diario resultante puede tener el rol de evocar, recordar o reconstruir pasajes de las clases y provocar reflexiones ligadas a su lectura que, aunque no reflejadas en el propio documento, pueden ayudar posteriormente al alumno en su aprendizaje.

En general, en los diarios ha existido un número relativamente reducido de aspectos ligados al contenido matemático. Los aspectos teóricos y las cuestiones han tenido más presencia, lo que ha hecho que los diarios con sentido *teórico*, *interpelante* o *teórico-interpelante* hayan sido más frecuentes. Un grupo importante de estudiantes, casi todas ellas alumnas, han destacado la importancia del diario como instrumento de comunicación con su docente y para poder obtener una retroalimentación personalizada. En particular, es reseñable la mayor presencia de cuestiones en los diarios de las alumnas participantes. Muchas alumnas parecen ver la escritura del diario como una oportunidad para compartir con el docente dificultades en su aprendizaje o dudas sobre los contenidos, y valoran positivamente esa oportunidad. En este sentido, estudios como los recogidos en Maroto (2015) evidencian el frecuente menor autoconcepto hacia las matemáticas que tienen las alumnas con respecto a los alumnos. Esto se traduce en una menor confianza y seguridad en sus posibilidades, y puede explicar la mayor necesidad o la preferencia por utilizar el diario como un canal "privado" de comunicación con el docente, en lugar del carácter "público" de las interacciones en el aula.

Este artículo está basado en la experiencia de introducción de la escritura de un diario. La experiencia se ha extendido durante un tema (tres semanas), por lo que ha sido relativamente breve. Waywood (1992, 1994) o Countryman (1992) revelan cómo los beneficios de la realización de esta tarea son más evidentes durante un periodo de implementación largo (uno o varios cursos). En nuestro caso, no se han detectado relaciones claras entre las características de los diarios escritos y la presencia de variaciones significativas en el rendimiento; y la valoración de la tarea también ha sido muy diferente entre unos alumnos y otros. En las alumnas E2 y E4 sí atribuimos su mejora en el rendimiento, en parte, a la integración de la tarea del diario tanto en sus hábitos de trabajo como de estudio de la asignatura, de un modo en el que intentan maximizar las potencialidades que han asignado al diario.

La breve implementación tampoco ha permitido comprobar la posible evolución de las características de los diarios escritos. Como en la parte inicial del estudio longitudinal de Waywood (Clarke et al., 1993; Waywood, 1992, 1994), en esta experiencia han abundado los diarios con un modelo *recuento*; siendo deseable un progreso hacia modelos más elaborados, con una mayor transformación de la información y una mayor implicación del alumno, que permitan desarrollar una visión del diario como un instrumento con mayor potencial para generar aprendizaje.

No obstante, en este apartado sí que se han expuesto algunas conclusiones que merecen ser consideradas en una posible futura implementación. Destacamos la diversidad de modos de enfocar la tarea que han existido entre el alumnado participante, y las diferentes necesidades que pueden tener unos alumnos y otros, lo que hace que el diario pueda convertirse en un instrumento para conocer mejor al alumnado, gestionar su diversidad y poder ofrecerles una mejor retroalimentación. Además, en este caso se ha realizado la escritura utilizando un soporte físico, pero la actividad es trasladable a un entorno digital. El entorno digital permitiría una mayor simultaneidad y un mayor seguimiento por el docente (aquí los diarios han sido recogidos una vez a la semana), aunque también es necesario ser conscientes de los posibles cambios que pueden ir asociados al cambio de entorno.

Bibliografía

Arce, M. (2016). *Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos de Bachillerato: percepciones, perfiles de elaboración y utilización y rendimiento académico* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, España. Disponible en: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/20829

Borasi, B. & Rose, B. J. (1989). Journal writing and mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 347-365.

Clarke, D. J., Waywood, A. & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 235-250.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Countryman, J. (1992). *Writing to learn mathematics: strategies that work.* Portsmouth, EEUU: Heinemann.

Maroto, A. I. (2015). *Perfil afectivo-emocional matemático de los maestros de primaria en formación* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, España. Disponible en: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/16201

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial del Estado 266, del 6 de noviembre de 2007*, 45381-45477. Madrid, España.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado 3, del 3 de enero de 2015*, 169-546. Madrid, España.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of investigation*. Londres, Reino Unido: Routledge Falmer.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”. (Traducción de la edición original en inglés, de 2000).

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-123). Barcelona, España: Graó.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athens, Hellas, 3-5 January 2003* (pp. 116-124). Atenas, Grecia: Hellenic Mathematical Society.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas.* Madrid: INECSE.

OCDE (2015). *PISA 2015. Draft Mathematics Framework* [en línea]. Recuperado el 24 de octubre de 2015, de

http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf
Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.
Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.
Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.
Rogers, K. C. (2014). Journal writing in a mathematics capstone course for prospective secondary teachers: Future teachers making connections. *PRIMUS, 24*(6), 465-479.
Salinas, T. M. (2004). Effects of reflective notebooks on perceptions of learning and mathematics anxiety. *PRIMUS, 14*(4), 315-327.
Shield, M. & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 29-52.
Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona, España: Paidós.
Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12*(2), 34-43.
Waywood, A. (1994). Informal writing-to-learn as a dimension of a student profile. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 321-340.

Autores:

Eduardo Fernández Delgado. Profesor interino de matemáticas en Secundaria. Licenciado en Matemáticas y Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad: Matemáticas) por la Universidad de Valladolid. **Email: fernandez.delgado.eduardo@outlook.com**

Matías Arce Sánchez. Doctor en Didáctica de la Matemática y profesor del Área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Valladolid. Líneas de investigación: instrumentos usuales de enseñanza-aprendizaje (cuaderno del alumno, libro de texto), escritura matemática, didáctica del Análisis Matemático. **Email: arcesan@am.uva.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 69-82

El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas

María Florencia Cruz, Ana María Mantica

Fecha de recepción: 06/04/2017
Fecha de aceptación: 26/09/2017

Resumen	Se presenta el análisis de una tarea realizada por dos alumnos del profesorado en matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Se pretende analizar el lugar que ocupa el software de geometría dinámica (SGD), Cabri 3D, como una herramienta en la resolución de un problema geométrico, en particular, en la formulación y validación de conjeturas. El estudio que se realiza es cualitativo, en particular, un estudio de caso. El registro de la información se obtiene a través de audios, artefactos escritos y los archivos de trabajo del SGD. La tarea se implementa en la asignatura geometría euclídea espacial en el marco de un taller obligatorio. **Palabras clave**: Conjeturar, Validar ,Software de Geometría Dinámica, Futuros Profesores.
Abstract	In this work we show the analysis of a task realized by two students of the mathematic’s professor career from the Universidad Nacional del Litoral. Our main objective was to analyze the role that the dynamic geometry software Cabri 3D takes place in the resolution of a geometric problem, particularly in conjecture formulation and validation. We performed was qualitative study, particularly, a case study. The information was obtained from audios, written artifacts and program files from the SGD. This assignment was implemented in the euclidean space geometry class as a compulsory workshop. **Key words:** Conjecture, Validation, Dynamic Geometry Software (SGD), Future professor
Resumo	Se apresenta a análise de uma tarefa feita por alunos do bacharelado de Matemática da Universidade Nacional do Litoral. Se procura em analisar o espaço que ocupa o software de geometria dinâmica, Cabri 3D, como ferramenta para a resolução de um problema geométrico, em particular, na formulação e na validação das conjecturas. O estudo é qualitativo, em particular, um estudo de caso. O registro da informação se obtém mediante áudios, artefatos escritos e os arquivos de trabalho do SGD. A tarefa foi implementada na aula de geometria euclidiana espacial no espaço de uma oficina obrigatória. **Palavras-chave:** Conjecturar, Validar, Software de Geometria Dinâmica (SGD), Futuros professores

1- Introducción

Considerando la importancia del trabajo con tecnologías digitales en la formación de futuros profesores, se realiza una propuesta en la asignatura geometría euclídea espacial (GEE) del tercer año del plan de estudio del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Los actores objeto de estudio son dos alumnos que cursan la asignatura mencionada. Se pretende analizar el lugar que ocupa el software de geometría dinámica como una herramienta en la resolución de un problema geométrico, en particular, en la formulación y validación de conjeturas.

La preocupación por el uso de tecnologías en situaciones de enseñanza y aprendizaje en la formación de profesores en matemática se manifiesta en los diseños curriculares vigentes. En particular, el diseño curricular de la provincia de Santa Fe para Profesorado de Educación Secundaria de Matemática (Resolución ministerial 2090/15-anexo VII) expresa que las instituciones educativas manifiestan la necesidad de un nuevo diseño curricular que contemple contenidos transversales que apunten a la adquisición de “saberes que colaboren en la apropiación de las nuevas tecnologías orientados a la alfabetización digital, alfabetización académica….” (p.16). En el plan de estudio del Profesorado en Matemática vigente, aprobado por el Consejo Superior de la Universidad Nacional del Litoral en el año 2000 se establece que el egresado debe lograr la “capacidad para producir material educativo mediante la utilización de diferentes tecnologías”.

Se destaca que la importancia de que futuros profesores conjeturen y validen propiedades y afirmaciones también se plasma en los diseños curriculares mencionados:

> “habilitar un ambiente de trabajo en el que los/las estudiantes puedan crear y recrear estrategias y modelos, elaborar conjeturas a partir de la exploración y la simulación de la situación utilizando software, generalizar relaciones a partir del análisis de invariancias, validarlas produciendo argumentos razonados, producir pruebas deductivas y avanzar en la elaboración de demostraciones formales” (p.19)

Atendiendo a la necesidad de una formación sólida para los futuros profesores, en relación con actividades propias del quehacer matemático, como son, conjeturar y validar utilizando las potencialidades de nuevas tecnologías, se diseña una tarea en la que se solicita que su resolución se realice utilizando el software de geometría dinámica (SGD) Cabri 3D. Dicho SGD se encuentra disponible en las netbook con las que cuenta el departamento de matemática y que se utilizan en la asignatura GEE. Los estudiantes durante el cursado de la materia trabajan con dicho software, por lo cual, lo conocen y están habituados a su uso. La propuesta se lleva a cabo con los dos estudiantes reunidos en un grupo. Se implementa en una clase de la asignatura, en particular, como parte de un taller obligatorio para obtener la regularidad, se desarrolla durante la última semana de cursado. Se destaca que, al ser una etapa de evaluación, la labor del docente en el momento de implementación de la propuesta se reduce a pequeñas intervenciones solicitadas por los estudiantes.

A partir de la resolución de la tarea se espera que los estudiantes pongan en juego conocimientos geométricos disponibles utilizando las ventajas que brinda este software de geometría dinámica. Se pretende que utilicen diferentes truncamientos de poliedros regulares convexos, que logren conjeturar la posición de los planos que permite obtener el poliedro semirregular solicitado y que validen la conjetura establecida.

2-Marco de referencia

El trabajo con tecnologías digitales en el aula de matemática es tema de preocupación de diversos investigadores, entre otros, González López (2001) menciona diversos factores que condicionan su gestión por parte del profesor. Los factores que expone son debidos, al cambio en las condiciones de trabajo; al tipo de interacción con el sistema; a los modos de proceder en la resolución de las tareas propuestas y al tipo de actividades que se proponen.

Drijvers (2013) presenta el análisis de distintos casos en los que considera el tema matemático abordado, la herramienta digital utilizada, el uso que se hace de ella y una reflexión sobre los factores que pueden explicar el éxito o el fracaso del funcionamiento o no de la tecnología utilizada tanto para el estudiante como para el maestro. Encuentra que son tres los factores que influyen en el éxito o no de la tarea con el uso de alguna tecnología digital: el diseño de la propuesta teniendo en cuenta no sólo propiedades de la tecnología especifica utilizada, sino las consideraciones pedagógico didácticas del tema a tratar; el rol del profesor quien tiene un papel fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, mediante la síntesis de los resultados de las actividades realizadas, destacando las herramientas y técnicas fructíferas, además de relacionar las experiencias dentro del entorno tecnológico con las habilidades matemáticas empleadas en un entorno de papel y lápiz; y el contexto educativo de modo que el trabajo con la tecnología propuesta se integre de manera natural.

Novembre, Nicodemo y Coll (2015) plantean que no es necesario proponer problemas diferentes a los trabajados habitualmente en clases de matemática con lápiz y papel, lo interesante es analizar cómo se resuelven estas situaciones con la incorporación de las tecnologías digitales. Por lo mencionado destacan la importancia de la reflexión por parte de docentes acerca de las modificaciones que produce la incorporación de las tecnologías en el aula de matemática, cuales son los aportes de la misma en la producción de conocimientos y qué conocimientos matemáticos y tecnológicos son necesarios durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sostienen que con las herramientas tecnológicas se producen dos transformaciones positivas, en primera instancia se permite abordar problemas que serían imposibles sin las mismas y en segunda se puede adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje. Los autores plantean que las investigaciones muestran que el uso regular con software permite a los alumnos desarrollar conocimientos matemáticos e informáticos (vinculados al uso del software) y articularlos. Proponen que se tengan en cuenta en la planificación de las actividades ya que esto ayudará a la construcción conjunta de los dos tipos de conocimientos.

Arcavi (2008) plantea varias razones por las cuales el modelado de situaciones geométricas a partir de gráficas dinámicas es un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos. El autor remarca la necesidad de crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad es inesperado o en algunos casos contra intuitivo, de forma que, entre lo conjeturado por el estudiante y lo devuelto por el software se propicie la necesidad de demostrar o probar sus conjeturas utilizando argumentos matemáticos que van más allá del software.

Arcavi y Hadas (2000) presentan características del trabajo con ambientes dinámicos, tales como, la visualización, la experimentación, la sorpresa, la retroalimentación. Respecto a la *visualización*, sostienen que estos ambientes permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades, visualizarlas y transformar construcciones en tiempo real, lo que contribuye a establecer bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas. Con la *experimentación* pueden realizar observaciones, medir, comparar, cambiar o distorsionar las figuras y hacer construcciones auxiliares fácilmente; esta experimentación puede ser un paso previo a la enunciación de generalizaciones y conjeturas. La *sorpresa* es la diferencia entre las predicciones enunciadas y lo devuelto por el software y genera, en los estudiantes, un desconcierto que los estimula a analizar sus conocimientos y predicciones. Esta diferencia entre lo conjeturado y lo devuelto por el ambiente dinámico crea una *retroalimentación* que es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido.

Los autores mencionados anteriormente sostienen que la retroalimentación directa es más efectiva que la proporcionada por un profesor, no solamente porque es carente de juicio de valor, sino también motiva a los estudiantes a verificar, revisar la predicción y a realizar una demostración. A través de esas actividades que producen una sorpresa, los estudiantes pueden plantearse preguntas acerca de por qué sucede eso y hasta requerir una prueba podría provenir de las observaciones y las revisiones del proceso de experimentación en sí mismo. En otros términos, el ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión debe suministrar las semillas de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar una declaración. De esta manera el ambiente dinámico apoya realmente a “cerrar el ciclo”. Remarcan la importancia del diseño de tareas que provoquen estas “sorpresas” ya que la herramienta tecnológica en sí misma es de poco valor si no se acompaña de las tareas que le den un uso significativo (Arcavi y Hadas, 2000).

Gutiérrez y Jaime (2015) realizan un estudio con un alumno de segundo curso de educación secundaria obligatoria en España, considerado un estudiante avanzado dado que muestra talento superior a la media. Diseñan actividades que involucran contenidos de Geometría tridimensional, para ser resueltas con el software de geometría dinámica Cabrí 3D. Las tareas propuestas pretenden aportar información sobre los procesos de aprendizaje de conceptos de geometría espacial e información sobre la viabilidad de los entornos de enseñanza de geometría espacial basado únicamente en el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional. El estudio realizado pone de relieve que el uso de Cabri 3d de manera sistemática influye positivamente en el desarrollo de la imagen conceptual de los objetos espaciales estudiados (rectas y planos) y de los conceptos relativos al paralelismo. Las manipulaciones con el programa de geometría dinámica 3-dimensional pueden ayudar al estudiante a eliminar las falsas imágenes que tenía al principio, a mejorar sus dibujos en papel de las estructuras 3-dimensionales y a crear una imagen conceptual mucho más rica y completa que la que tenía inicialmente.

Gutiérrez (2005) sostiene que diversas investigaciones destacan la necesidad de explorar las posibilidades del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría y de experimentar las diferentes formas de enseñanza. Manifiesta que una línea importante es la que se ocupa de analizar los procesos de aprendizaje de la demostración matemática con el uso de un software de geometría dinámica. Con el SGD se hace explicita con mayor detalle la actividad empírica de los estudiantes no que no ocurre en contextos no informáticos, en estos últimos la actividad transcurre mayormente en su mente.

El análisis que presentamos refiere a la relación de los estudiantes con las características de estos ambientes de geometría dinámica al resolver la tarea propuesta por sobre las características de la misma. En este caso es una tarea que en otros momentos resolvían con lápiz y papel. Actualmente se apunta al trabajo con la misma situación involucrando nuevas herramientas, con el foco en la formulación y validación de conjeturas. No se pretende analizar en profundidad la intervención del docente en el desarrollo de la misma.

3-Metodología y diseño de tareas.

Se realiza una investigación cualitativa, en la misma se pretende un trabajo intensivo, teniendo en cuenta que si bien se pierde la posibilidad de generalizar, es posible mostrar algunas cuestiones sobre la sociedad a la que pertenecen los sujetos, por lo cual, posiblemente los resultados se pueden ampliar al contexto al que pertenecen los sujetos (Kornblit, 2007). El trabajo corresponde a un estudio de casos, dado que, se espera conocer en profundidad la particularidad y complejidad de un caso singular (Stake, 1998).

El trabajo se realiza con dos estudiantes que cursan la asignatura GEE, la resolución de la actividad es obligatoria para obtener la regularidad de la materia. Según Kazez (2009) la muestra seleccionada para el estudio de casos que se lleva a cabo es no probabilística e intencional, dado que los actores son productos de una selección de acuerdo con el criterio de los investigadores, quienes seleccionan algunos casos que resultan ser “típicos”.

Para el desarrollo del taller se diseña la siguiente tarea y se dan 3 horas reloj a los estudiantes para la resolución:

Tarea 1

a) Construye un poliedro *semirregular* con las siguientes condiciones:
- ✓ Se obtiene del hexaedro regular o cubo por truncamiento de sus ángulos poliedros.
- ✓ Sus caras son cuadriláteros y triángulos.

b) Explica como determinaron los planos con los cuales seccionaron al hexaedro regular para obtener al poliedro semirregular.

c) Justifica por qué el poliedro obtenido con los planos determinados en b) es semirregular.

Dado que en la asignatura GEE no se define el concepto “poliedro semirregular”, en el momento de presentar las tareas se incluye el mismo:

Se define poliedro regular al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones: • sus caras son polígonos regulares (1) • sus caras son polígonos iguales (2) • sus ángulos poliedros son iguales (3) *A los poliedros convexos que cumplen <u>sólo</u> las condiciones (1) y (3) de la definición de poliedro regular los denominaremos poliedros semirregulares.*

Tabla 1: Definición de poliedro semirregular

En el taller en el que se presenta la propuesta es obligatorio el uso del SGD, por tanto, se considera que no es necesario explicitarlo en la tarea. A los estudiantes se les brinda una netbook en la que se encuentra instalado el SGD Cabri 3D. La importancia del uso del SGD se debe, por un lado, a que en el transcurso de la asignatura GEE se utiliza el software como complemento para la formulación y validación de conjeturas y propiedades, y por el otro, a que se considera que, en la realización de construcciones, los estudiantes deben poner en juego conceptos y propiedades geométricas conocidas.

Durante la implementación de la propuesta el docente sólo realiza intervenciones cuando los estudiantes lo requieren explícitamente. Estas intervenciones tienen como finalidad devolver la responsabilidad matemática a los estudiantes, con el fin de que, se hagan cargo de su problemática. En la investigación realiza se tiene como fin analizar el lugar que ocupa el SGD en la formulación y validación de conjeturas. Se pone especial énfasis en las interacciones entre estudiantes en igualdad de condiciones respecto a su conocimiento.

Durante la implementación de la propuesta se registra la información a través de artefactos escritos, grabaciones en audio y los protocolos del software de geometría dinámica, con el fin de estimar la fiabilidad del estudio, a partir de los datos obtenidos se realiza el análisis detallado de las actuaciones de los estudiantes (Cohen y Manion, 1990). Se destaca que el software Cabri 3D cuenta con la herramienta *descripción* que permite la reconstrucción de la totalidad del procedimiento realizado para obtener la construcción presentada, por lo cual, se puede conocer “paso a paso” el proceso de resolución puesto en juego por los estudiantes.

4-Análisis del trabajo realizado por los estudiantes.

Se presenta el análisis detallado del grupo que denominamos Grupo **C-S**, constituido por los alumnos **C** y **S**. Se destaca que se presentan en letra cursiva las expresiones textuales de obtenidas a través de los registros en audio.

En el audio se aprecia que la primera conjetura que establece el binomio es: “*El poliedro buscado es una pirámide de base cuadrada*”. Afirman que la base de la misma necesariamente debe ser una de las caras del cubo y sus caras laterales triángulos que por definición de poliedro semirregular deben ser equiláteros. El vértice (V) que no pertenece a la base de la pirámide, lo determinan arbitrariamente (en el interior del cubo) verificando a través de la herramienta “longitud” que no es el punto buscado. En este caso utilizan la potencialidad de SGD, tal como plantea Restrepo (2008) para invalidar la conjetura.

S: La pirámide es de base cuadrada. Lo que hay que hacer es que te den los triángulos de la pirámide para que sean regulares.

C: Es que son regulares.

S: Bueno listo, ya está entonces.

C: ¿Y este cuánto mide?

S: Miden todos iguales C.

C: Ah, no… tiene que ser si o si equilátero, ese es el problema, ¿o no?

S: Miden re distinto: 4,1cm y 4,5cm.

Los estudiantes utilizan un arrastre errático para determinar el punto cúspide, es decir, desplazan sin un plan preciso los puntos básicos, tratando de encontrar la figura pretendida. Al verificar que no obtienen un triángulo equilátero intentan una búsqueda sistemática del posible lugar en el que se encuentra la cúspide de la pirámide.

S: Tiene que ser si o si equilátero, ese es el problema, podemos encontrar el centro del cubo con las diagonales.

En el diálogo se advierte que buscan un punto particular del cubo, el punto medio de una de las diagonales, consideran este punto como vértice V. Miden nuevamente y verifican que no determina que las caras laterales sean triángulos equiláteros. Los estudiantes utilizan el software de modo azaroso, no se apoyan en propiedades para predecir el quinto vértice de la pirámide.

S: A menos que no sea una pirámide de esas y estemos pensando mal. No queda otra, es con triángulos y cuadrados.

Se plantean si la pirámide de base cuadrada es solución a la tarea.

S: Para que el cuadrilátero sea regular tiene que ser si o si un cuadrado.

C: ¿Y si haces con los puntos medios de los lados de las caras? ¿Sabes qué me pasa?, no sé si esto es truncamiento del ángulo. Esto ya no es regular, ¿no?

S: Fijate si es regular.

C: Y ahora sí, capaz con el punto medio. Ponele, el punto medio del cubo. El punto medio es el centro del cubo.

S: ¿El centro del cubo?

C: ¡Sí!

Descartan que la base de la pirámide sea una de las caras del cubo. Consideran el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados de una cara del cubo, suponen que es un cuadrado. Toman como cúspide el punto intersección de dos diagonales del cubo, y afirman que las caras laterales son triángulos equiláteros, corroborándolo al medir sus lados utilizando el SGD.

Por el momento la característica utilizada es la visualización, dado que construyen la figura inicial en base a la definición, pero a partir de esto sientan sus fundamentaciones en bases intuitivas para establecer sus conjeturas sin utilizar herramientas formales. Se adjunta la construcción realizada en el SGD.

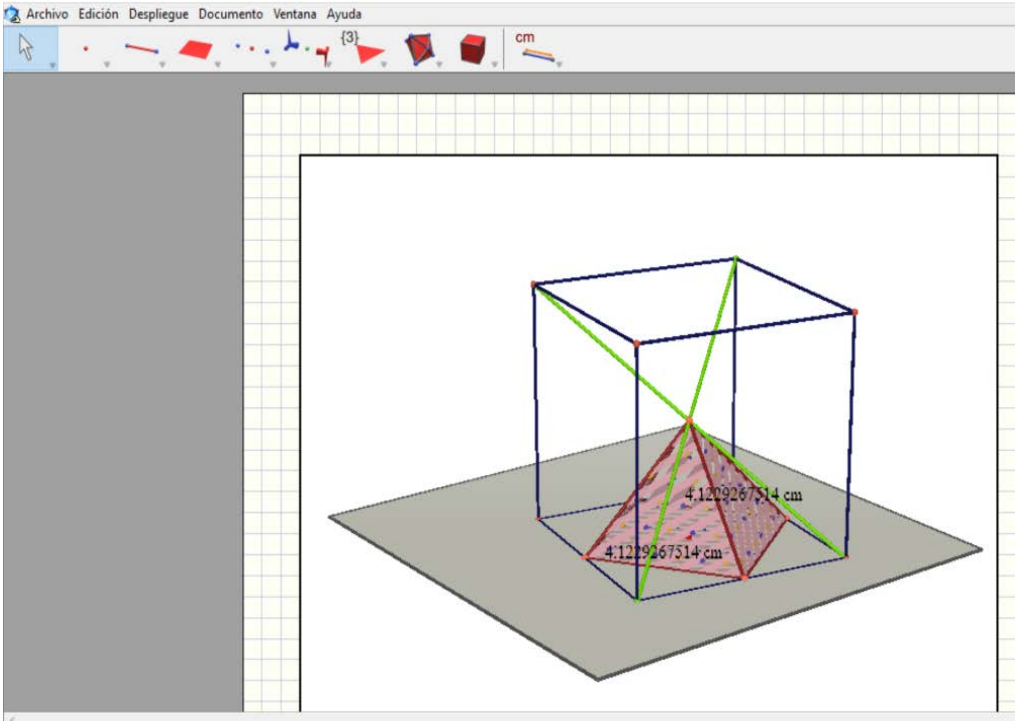


Imagen 1: Construcción de poliedro semirregular presentada por el grupo C-S.

C: Ahora cómo explicamos por qué lo hicimos así, sin adivinarlo. Pensemos.

Los estudiantes son conscientes y explicitan que no realizan la conjetura y la construcción apoyándose en propiedades y definiciones, dado que, expresan la necesidad de encontrar una explicación porque hasta el momento lo hacen “adivinando”. Consideran que la construcción y validación realizada con el software no es suficiente para justificar que el poliedro cumple con la condición pedida. En el audio se aprecia que manifiestan la necesidad de realizar una demostración formal para que sus conjeturas sean consideradas como válidas. Suponen que no es suficiente con que el software les devuelva que todas las aristas tienen la misma longitud, para aceptar esta afirmación. No expresan la necesidad de probar la igualdad de ángulos poliedros y ángulos planos.

Recurren al “docente” para que les “de una pista” que les permita probar que los triángulos y el cuadrilátero son polígonos regulares. Consideran que los lados de dichos polígonos deben ser iguales, omitiendo la igualdad de sus ángulos.

C: Este si es un cuadrado porque tiene lados iguales, son las paralelas medias de las diagonales y las diagonales del cuadrado son todas iguales. Entonces los lados de las caras son iguales.

D[1]: Si los lados del cuadrilátero son iguales es un rombo, para saber que es cuadrado tengo que probar que los lados son iguales y al menos un ángulo es recto.

S: Ah…

El docente toma la decisión de explicitar que los elementos que consideran no son suficientes para asegurar que el cuadrilátero es cuadrado. La posibilidad de que se asuman o no ciertas cuestiones como responsabilidad de los estudiantes, depende fundamentalmente del lugar que el docente les otorgue a dichas cuestiones. En este caso la decisión tomada por el docente es explicitar definiciones que los alumnos utilizan en geometría.

En el intento de probar que la base de la pirámide es un cuadrado utilizan propiedades conocidas, afirman que los cuatro lados son iguales y los opuestos están contenidos en rectas paralelas. Para esto, utilizan la herramienta "paralela" validando que los lados opuestos son paralelos (trazando por un vértice una recta paralela a la recta que contienen al lado opuesto y verifican que es coincidente con el lado del cuadrilátero). Desplazando los puntos libres de su construcción intentan validar la conjetura establecida a partir de la observación de invariantes de la misma.

Destacamos que en este caso utilizan una herramienta diferente a "medida" para validar su conjetura, que los lados del cuadrilátero están contenidos en rectas paralelas. La conjetura obtenida no aporta nada nuevo a lo conocido, dado que con lo planteado sólo pueden afirmar que el polígono es rombo.

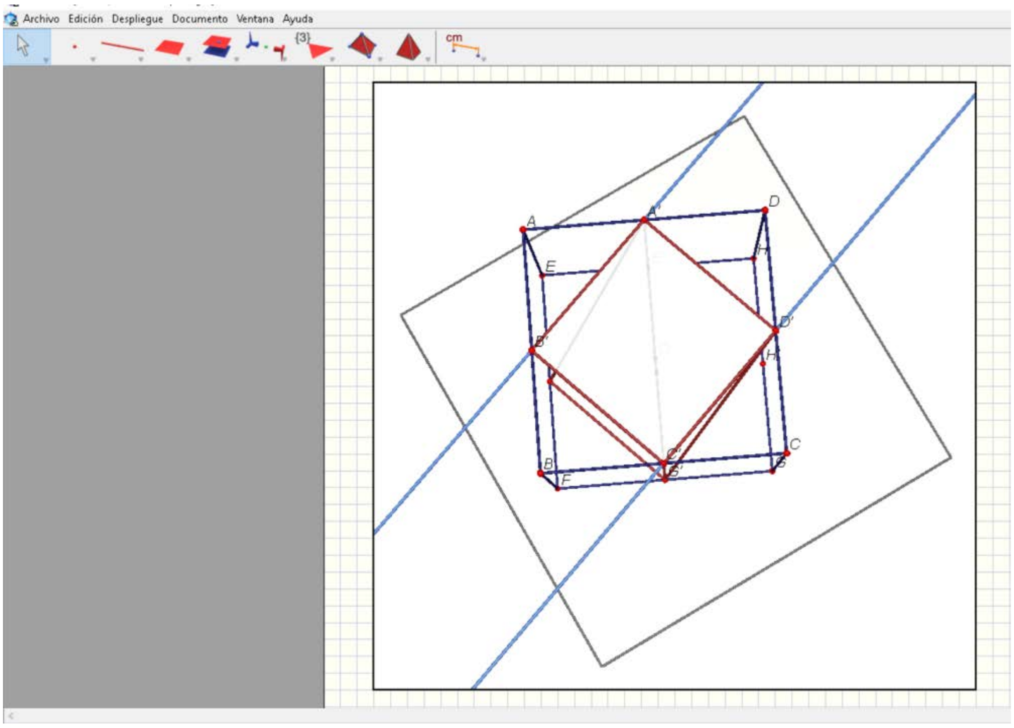


Imagen 2: Validación del paralelismo de los lados del cuadrilátero por C-S.

[1] D: Docente

Los estudiantes no logran probar que el cuadrilátero obtenido tiene un ángulo recto. Esta condición puede constatarse con el SGD fácilmente determinando la amplitud del ángulo plano o utilizando la herramienta recta perpendicular.

Cuando inician la respuesta de la tarea tienen en cuenta sólo que las caras que forman el poliedro sean regulares y no sus ángulos poliedros, por lo que se aprecia que no están considerando los ángulos poliedros y los ángulos planos. No utilizan las ventajas de la herramienta manipulación que ofrece el SGD, en particular la función "bola de cristal" que permite visualizar la Zona de Trabajo desde diferentes puntos de vista, ampliar o reducir la escena. Se puede considerar a esta función como un caso particular de arrastre que provoca el movimiento conjunto de todos los objetos que hay en el interfaz. Con esta herramienta al visualizar los ángulos poliedros se puede conjeturar que los mismos no son iguales, pues en cuatro de los vértices concurren 3 aristas y en la cúspide concurren 4. En este caso se puede utilizar el software para invalidar la conjetura.

Llegado a este momento de la resolución de la tarea, se plantean si el poliedro encontrado responde a la consigna solicitada. En particular, lo que refiere a "truncamiento de ángulos poliedros". Determinan posibles posiciones de los planos de modo que al realizar los cortes se obtenga el poliedro obtenido anteriormente (pirámide base cuadrada). En este momento, por primera vez tienen en cuenta los ángulos poliédricos que forman al poliedro dado, no al obtenido luego de realizar los truncamientos.

Los estudiantes vuelven a leer la consigna con el fin de acordar cómo realizar los cortes de los ángulos poliedros (inciso 2 de la tarea dada). Determinan los planos que pasan por los vértices de las caras laterales de la pirámide de base cuadrada con la que trabajan para establecer la posición de estos planos respecto a la figura original (cubo). Destacan en el diálogo que lograron establecer las posiciones de los planos y que el poliedro es semirregular, dado que demostraron que las caras del mismo son polígonos regulares.

S: Por lo tanto el poliedro es semirregular, ¿será que cumple las dos condiciones?

C: Ah… los ángulos poliedros… nunca lo probamos, y… ¿si no son iguales?

S: Sorry!! Tienen que ser iguales

C: Bueno, ya fue, no importa, ya está…

S: ¿Será que cumple las dos condiciones?

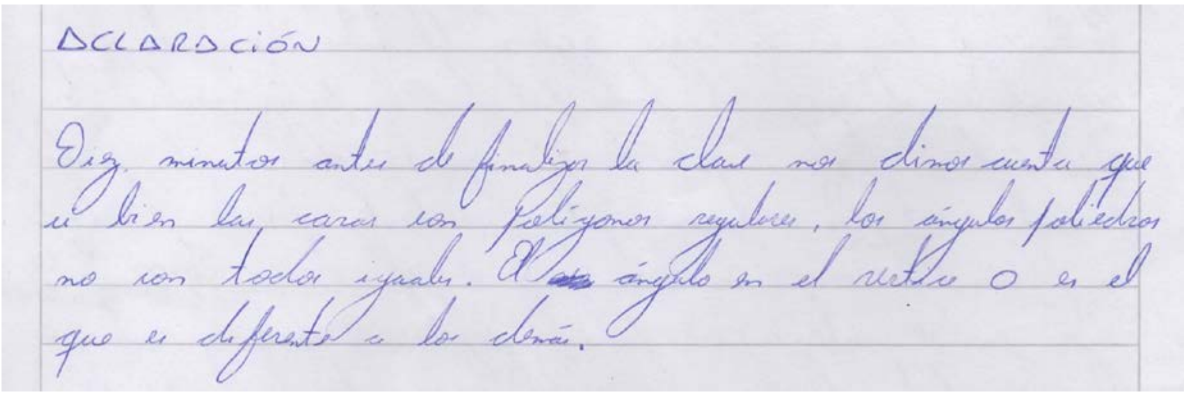
C: ¡Está re mal… Mirá!! Este ángulo poliedro no es igual a este (La afirmación la manifiestan observando la construcción realizada en el SGD, en particular, el ángulo poliédrico con vértice en la cúspide y otro de los ángulos poliédricos)

S: Nunca nos dimos cuenta.

La visualización en el SGD permite que puedan descartar la conjetura de que el poliedro encontrado (pirámide base cuadrada) es semirregular, pues en 4 vértices concurren 3 aristas y en la cúspide 4. Los estudiantes no asumen el papel de un matemático en la resolución de un problema, dado que como plantea Schoenfeld

(2001), se apresuraron a realizar exploraciones sin hacer un análisis cuidadoso de la situación. Además, no realizan una revisión en mitad del proceso que pueden mostrar dificultades del enfoque o alternativas que se podrían considerar en la solución. Cuando los estudiantes creían que la situación estaba resuelta, que la habían explorado por completo, el software les devuelve una imagen que derrumba la conjetura realizada sobre el modo de cortar el poliedro.

Finalizan la tarea presentado por escrito lo siguiente:


ACLARACIÓN

Diez minutos antes de finalizar la clase nos dimos cuenta que si bien las caras son polígonos regulares, los ángulos poliedros no son todos iguales. El ángulo en el vértice O es el que es diferente a los demás.

Imagen 3: Cierre de la tarea presentado por los estudiantes C-S.

5- Reflexiones:

La conclusión de los estudiantes muestra el desconcierto por el resultado obtenido, pues, inesperadamente se dan cuenta de que el poliedro considerado no responde a la tarea. Esta última afirmación genera una diferencia clara con respecto a las predicciones enunciadas explícitamente durante la mayor parte del desarrollo de la tarea. La concientización de que la conjetura establecida inicialmente es invalida surge a partir de la interpretación de la situación representada e identificar propiedades (ángulos poliédricos del poliedro obtenido) anteriormente no consideradas. El trabajo llevó durante todo el tiempo a discusiones de resultados que, en general, no coincidían con lo devuelto por el SGD. Se considera que “esto puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes, para reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo” (Arcavi y Hadas, 2000, p.26).

Los estudiantes en el desarrollo de la tarea en primera instancia tienden a realizar constataciones empíricas por sobre las deducciones basadas en propiedades. La utilización del SGD les permite realizar diversas constataciones empíricas con una única construcción, para validar o invalidar una conjetura, antes de intentar una justificación deductiva. Se destaca que en general utilizan el software para conjeturar y para invalidar conjeturas, no emplean las potencialidades que ofrece para validarlas. Posteriormente intentan realizar demostraciones formales, al responder la consigna en la que se solicita que justifiquen por qué el poliedro obtenido es semirregular. Se considera que se debe a que los estudiantes se encuentran avanzados en la carrera y están habituados a realizar demostraciones utilizando el método deductivo.

En general, se considera que experimentaron con el software, dado que, no realizan sólo observaciones, sino también, miden, comparan. Se destaca que una ventaja del software que no fue aprovechada por los estudiantes es la construcción de figuras no estereotipadas, por el contrario, cuando piensan en el poliedro que resulta al realizar el truncamiento considerando, inmediatamente consideran una figura prototípica, una pirámide de base cuadrada.

Se destaca que el uso de un SGD es importante, dado que, una de las características principales es que las construcciones conservan las propiedades geométricas durante el movimiento. Los estudiantes utilizan muy poco el desplazamiento para validar sus construcciones, pareciera que para ellos es suficiente imponer propiedades geométricas durante la construcción y por tanto no sienten necesidad de desplazarla para validarla. Una de las herramientas que emplean durante el trabajo con el software es la medida, pero afirman que esto no es suficiente para validar la conjetura.

Los resultados obtenidos coinciden con lo que plantean Arcavi y Hadas (2000), el SGD es un medio para estimular las actividades matemáticas de formular y validar conjeturas haciendo estas tareas más significativas. En el caso que se presenta, la indagación con el software favoreció una exploración dinámica de la situación, dado que en principio se buscó el vértice de la pirámide, poliedro conjeturado como solución del problema, por ensayo y error o de forma errática, pero luego se empleó el software para descartar el punto. Esto lo realizan a partir de la herramienta "medida" con lo que pueden cuantificar su conjetura.

Se considera de suma importancia, cuando se trabaja con SGD, presentar a los alumnos problemas que no aseguren la veracidad de las conjeturas, si no que, son ellos los que deben establecer la conjetura y luego validarla. Es decir, comprender que su conjetura es verdadera y esto pueden realizarlo utilizando la potencialidad del software, dado que su dinamismo permite observar varios ejemplos con una única construcción. En muchos casos esto los hace considerar que no es necesaria una validación formal por sobre una constatación empírica. Quizás por esto los estudiantes se sienten más cómodos utilizando el software para invalidar sus conjeturas.

6-Bibliografía

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* [en línea], 5, 25-45. Recuperado el 23 de Julio de 2012, de: https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, 28, 2-10.

Cohen y Manion, (1990). *Métodos de investigación educativa.* La muralla: Madrid. España.

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA* [en línea], 8(1), 1-20. Recuperado el 17 de Junio de 2015, de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Drijvers2013PNA8(1)Digital.pdf

González López, M. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Universidad de Granada, Granada. España.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* Recuperado el 17 de noviembre de 2011 de: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA* [en línea], 9(2), 53-83. Recuperado el 15 de Octubre de 2016 de: http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos* [en línea], 13(1), 71-89. Recuperado el 01 de Febrero de 2017 de: http://dspace.uces.edu.ar:8180/xmlui/handle/123456789/727

Kornblit, A. L. (2007). Historias y relatos de vida: una herramienta clave en metodologías cualitativas. En A. Kornblit (coord.), *Metodologías cualitativas en ciencias sociales. Modelos y procedimientos analíticos.* Biblos, Buenos Aires. Argentina.

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2015). *Diseño Curricular. Profesorado de Educación secundaria en Matemática* (Resolución ministerial 2090/15-anexo VII)

Novembre, A. Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza. *CABA* [en línea], ANSES. Recuperado el 03 de Marzo de 2016 de: http://escuelasdeinnovacion.conectarigualdad.gob.ar/mod/page/view.php?id=875

Restrepo, A. (2008). *Genese instrumentale du deplacement en geometrie dynamique chez des eleves de 6eme.* (Tesis doctoral). Universit´e Joseph-Fourier - Grenoble I, Français. Recuperada el 07 de Agosto de 2016 de: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00334253

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En Resnik,L. y Klopfer, L. (comp), *Currículo y cognición.* Aique, Buenos Aires. Argentina.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata, Madrid. España.

Universidad Nacional del Litoral. (2000). *Plan de estudio del Profesorado en Matemática*. Recuperado el 05 de marzo de 2002 de: http://www.fhuc.unl.edu.ar/pages/ensenanza/carreras-de-grado/matematica.php

Autores:

Cruz María Florencia**:** Profesora en Matemática. Docente en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Becaria doctoral por la UNL. Ha participado como expositora en congresos y jornadas nacionales e internacionales sobre enseñanza de la matemática. Dirección Electrónica: ma.florenciacruz@gmail.com

Mantica Ana María: Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo. Ha realizado publicaciones sobre la temática en revistas especializadas nacionales e internacionales. Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 83-106

Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori

Francisco Regis Vieira Alves

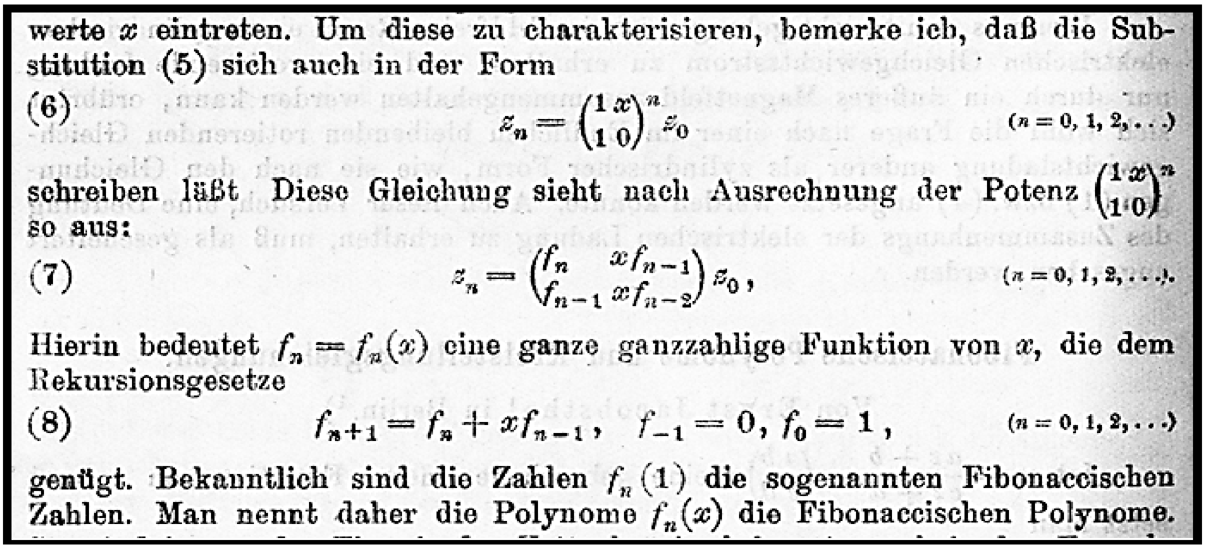
Fecha de recepción: 26/04/2017
Fecha de aceptación: 07/09/2017

Resumo	O presente trabalho descreve as duas primeiras etapas de uma Engenharia Didática clássica com o tema relacionado com propriedades da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Reconhecidamente, tais noções foram introduzidas, recentemente, na literatura científica por Anatassov (2011; 2012), entretanto, algumas propriedades combinatórias e identidades podem ser investigadas com um recurso computacional. Finalmente, duas situações problemas são descritas, de sorte que a Teoria das Situações Didáticas – TSD foi empregada a fim de indicar possíveis interações que devem ser exploradas envolvendo o trinomio – professor – conhecimento – estudantes. Finalmente, o trabalho apresenta uma tabela resumida das propriedades verificadas por indução matemática e que não foram discutidas na literatura científica até o momento, envolvendo processo de extensão numérica dos respectivos índices. **Palavras-chave**: Sequência de Jacobsthal, Engenharia Didática, Ensino, História da Matematica.
Abstract	The present work describes the initial two stages of a classical Didactical Engineering with the theme related to properties of the Generalized Sequence of Jacobsthal and the (s,t)-Generalized Sequence of Jacobsthal. Admittedly, such notions were, recently, introduced in the scientific literature by Anatassov (2011; 2012). However, some combinatorial properties can be identitied and investigated with a computational resource. Finally, two problem situations are described, so that the Theory of Educational Situations - TSD was used in order to indicate possible interactions that must be explored involving the trinomial - teacher - knowledge - students. Finally, the work presents a summary table of the properties verified by mathematical induction and that have not been discussed in the scientific literature until the moment, involving process of numerical extension of the respective indices. **Keywords**: Sequência de Jacobsthal, Didatical Engineering, History of Mathematics.
Resumée	Cet article décrit les deux premières étapes d'un d'Ingénierie Didactique classique avec le sujet lié aux propriétés de s-Generalized séquence Jacobsthal et (s, t) Généralisée Jacobsthal-séquence. Il est vrai que, ces notions ont été introduites, récemment, dans la littérature scientifique par Anatassov (2011, 2012), cependant, certaines identités combinatoires et

propriétés peuvent être étudiées avec une ressource de calcul. Enfin, deux problèmes sont des situations décrites, de sorte que la Théorie des Situations Didactiques - DST a été utilisé pour indiquer les interactions possibles qui devraient être explorées impliquant la triade - enseignant - connaissances - étudiants. Enfin, la travail présente un tabel qui résumé des propriétés observées par induction mathématique qui ne sont pas abordés dans la littérature scientifique à ce jour, impliquant l'extension numérique du processus d'indices respectifs.
Mots clées: Séquence de Jacobsthal, L´Ingenierie Didactiques, Histoire des Mathematiques.

1. Introducción

A sequência de Jacobsthal é determinada pela seguinte relação de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ e determinada pelas seguintes condições iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Tal recorrência é atribuída ao matemático alemão Ernst Erich Jaconsthal (1882 - 1965). A partir da relação de recorrência anterior, poderemos determinar o seguinte conjunto numérico: $\{J_n\}_{n \in IN} : \{0,1,1,3,5,11,21,43,85,171,\ldots\}$ (*). Na figura abaixo divisamos um trecho de uma obra de Jacobshthal que, apesar de ser em Alemão, podemos distinguir claramente a equação de recorrência $f_{n+1} = f_n + x \cdot f_{n-1}$ e que, para $x = 1$ podemos deteminar os valores da Sequência de Fibonacci e, para o caso $x = 2$ determinamos o conjunto em (*). Por outro lado, outros elementos podem ser observados na figura abaixo como, por exemplo, determinadas relações algébricas expressas por relações matriciais, sobretudo, matrizes de ordem indicada por 2x2.


werte x eintreten. Um diese zu charakterisieren, bemerke ich, daß die Substitution (5) sich auch in der Form

(6) $$z_n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n z_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben läßt. Diese Gleichung sieht nach Ausrechnung der Potenz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ so aus:

(7) $$z_n = \begin{pmatrix} f_n & xf_{n-1} \\ f_{n-1} & xf_{n-2} \end{pmatrix} z_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierin bedeutet $f_n = f_n(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von x, die dem Rekursionsgesetze

(8) $$f_{n+1} = f_n + xf_{n-1}, \quad f_{-1} = 0, \; f_0 = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt. Bekanntlich sind die Zahlen $f_n(1)$ die sogenannten Fibonaccischen Zahlen. Man nennt daher die Polynome $f_n(x)$ die Fibonaccischen Polynome.

Figura 1. Jacobsthal (1919 – 1920) estudou propriedades de sequências numéricas. Fuente: Jacobsthal (1919 - 1920).

Na figura 2, trazemos a imagem do matemático alemão, especialista em Teoria dos Números e ex aluno de Ferdinand G. Frobenius, *Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965).* Siegmund-Schultze (2009, p. 327) recorda que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943.

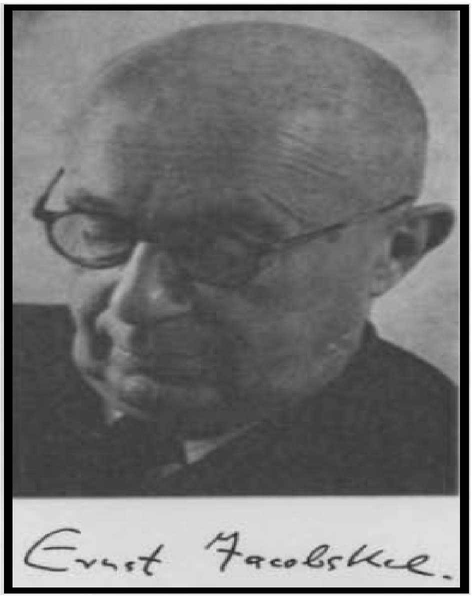


Figura 2. Erns Erich Jacobsthal (1882 – 1965).
Fuente: Siegmund-Schultze (2009).

Mais recentemente, deparamos a descrição da Sequência Generalizada de Jacobsthal (SGJ), por intermédio das seguintes definições formais.

Definição 1: Chamamos de s – Sequência Generalizada de Jacobsthal a relação de recorrência determinada pela seguinte relação $J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0$, $s \geq 2$. (Anatassov, 2011).

Definição 2: Chamamos de (s,t) – Sequência Generalizada de Jacobsthal a relação de recorrência determinada pela seguinte relação $J_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0$, $t, s \geq 2, s \neq -t$. (Anatassov, 2011).

A partir dos dados anteriores, três elementos merecem destaque: (i) A partir dos elementos observados nos trabalhos de Anatassov (2007; 2011; 2012) podemos compreender que um processo de generalização da sequência indicada em (*) prossegue e inspira a pesquisa atual em Matemática; (ii) A partir das sequências definidas há pouco, podemos observar um alto custo operacional a fim de determinar, por recorrência, seus elementos; (iii) As representações matriciais permitem a verificação de uma série de propriedades relacionadas com a Sequência Generalizada de Jacobsthal.

Um aspecto que temos buscado fortalecer em nossos trabalhos envolve a possibilidade de efetuar transposições didáticas (CHEVALLARD, 1991) eficientes, com o interesse de efetuar modificações necessárias sobre um conhecimento matemático especifico, muitas vezes discutido apenas num círculo restrito como, por exemplo, o movimento de divulgação da pesquisa em Matemática Pura e Aplicada atual, que ocorre por meio de *pappers* e revistas especializadas. Nossa perspectiva se diferencia na medida em que, ensejamos acentuar elementos e roteiros para a exploração de certos conteúdos matemáticos em sala de aula e que proporcionam um entendimento do processo epistemológico, histórico e matemático evolutivo ininterrupto (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2015).

Isso posto, trazemos o seguinte questionamento oriundo de uma problemática indicada nos parágrafos predecessores: Como descrever situações de ensino envolvendo as sequências s-SGJ e (s,t)-SGJ e suas propriedades matriciais?

Assim, a partir do questionamento anterior, indicaremos os seguintes objetivos:

(a) Descrever propriedades matriciais relacionadas com as sequências s-SGJ e (s,t)-SGJ que refletem um carater evolutivo epistemológico cuja herança pode ser identificada nos trabalhos de Anatassov (2011; 2012);

(b) Conceber situações problema envolvendo propriedades discutidas, de modo restritivo, apenas em periódicos de Matemática Pura ou Aplicada;

(c) Compreender o processo de generalização da Sequência de Jacobsthal.

Vamos exemplificar rápidamente o ítem (c), por exemplo, a partir de um trabalho recente de Anita (2016) e que descreve o processo de extensão (e generalização) correspondente aos índices, originalmente inteiros positivos (ver lista (*)). Abaixo (ver figura 3), na primeira linha, Anita (2016) apresenta alguns elementos do tipo $\left\{J_{-n}\right\}_{n\in IN}$. Com origem nesse processo de generalização (dos índices) e tomando como referência as definições formais 1 e 2, iremos introduzir duas propriedades (identidades) não abordadas e/ou introduzidas nos trabalhos (artigos) consultados.

Lema 1: Para todo inteiro positivo $n\geq 0$, vale as seguintes relações: (i) $J_{-n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}J_n$; (ii) $J_{-n}^{s}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^{s}$; (iii) $J_{-n}^{s,t}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(st)^n}\cdot J_n^{s,t}$.

Demonstração: Basta ver $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}J_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cdot\left(\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\right)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\dfrac{1-(-1)^n\cdot 2^{-n}}{3}=$

$=\dfrac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\dfrac{(-1)^n(-1)^{-n}-(-1)^n\cdot 2^{-n}}{3}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\dfrac{(-1)^n\cdot[(-1)^{-n}-2^{-n}]}{3}=\dfrac{(-1)^{2n+1}}{1}\cdot\dfrac{[(-1)^{-n}-2^{-n}]}{3}$

$=\dfrac{(-1)^{2n}}{1}\cdot\dfrac{[2^{-n}-(-1)^{-n}]}{3}=\left(\dfrac{2^{-n}-(-1)^{-n}}{3}\right)=J_{-n},n\geq 0$. No segundo ítem, observamos

$\dfrac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s=(-1)\dfrac{(-1)^n}{s^n}\cdot\dfrac{s^n-(-1)^n}{s+1}=(-1)\dfrac{(-1)^n}{1}\cdot\dfrac{1-(-1)^n s^{-n}}{s+1}=(-1)\left(\dfrac{(-1)^n}{1}\right)\cdot\dfrac{[(-1)^n(-1)^{-n}-(-1)^n s^{-n}]}{s+1}$

$=(-1)\cdot(-1)^{2n}\left(\dfrac{(-1)^{-n}-s^{-n}}{s+1}\right)=1\cdot\left(\dfrac{s^{-n}-(-1)^{-n}}{s+1}\right)=J_{-n}^s$. No último ítem, teremos também

que $\dfrac{(-1)^{n+1}}{s^nt^n}\cdot J_n^{s,t}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{s^nt^n}\cdot\dfrac{s^n-(-t)^n}{s+t}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\dfrac{\dfrac{s^n}{s^nt^n}-(-1)^n\dfrac{t^n}{s^nt^n}}{s+t}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\dfrac{t^{-n}-(-1)^n s^{-n}}{s+t}$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{(t^{-n}-(-1)^n s^{-n})}{(s+t)}=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{[(-1)^{-n}\cdot(-1)^n t^{-n}-(-1)^n s^{-n}]}{(s+t)}=\frac{(-1)^{2n+1}}{1}\cdot\frac{((-1)^{-n}t^{-n}-s^{-n})}{(s+t)}=$$

$$=\frac{(-1)^{2n}}{1}\cdot\left(\frac{(s^{-n}-(-t)^{-n})}{(s+t)}\right)=\frac{(s^{-n}-(-t)^{-n})}{(s+t)}=J_{-n}^{s,t}\ \square$$

Dessa forma, o lema 1, permite avaliar ou determinar um termo qualquer das sequências que indicamos por $\left\{J_{-n}^{s}\right\}_{n\in IN}$ ou $\left\{J_{-n}^{s,t}\right\}_{n\in IN}$, com índices inteiros o que exemplifica o processo de extensão que indicamos no ítem (c).

J_{-n}	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{11}{32}$	$-\frac{21}{64}$	$\frac{43}{128}$	$-\frac{85}{256}$	$\frac{171}{512}$	$-\frac{341}{1024}$
...											
j_{-n}	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{31}{32}$	$\frac{65}{64}$	$-\frac{127}{128}$	$\frac{257}{256}$	$-\frac{511}{512}$	$\frac{1025}{1024}$

Figura 3. Annita (2016) discute o processo de extensão para índices inteiros.
Fuente: Annita (2016).

De modo simplificado, a partir da tradição de trabalhos da vertente francesa que adotam, numa perspectiva de complementaridade, a Engenharia Didática – ED, como metodología de pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas – TDS, como metodología de ensino, asumiremos o emprego dessas teorías a fim de atingir nossos objetivos (a, b e c) declarados nos itens acima. Antes, porém, na seção subsequente, acentuaremos apenas alguns elementos elementos de ordem teórica e que podem apontar/antever eventuais entraves para uma efetiva e real inserção em sala de aula.

2. Engenharia Didática: alguns elementos

O *design* de investigação que permite, dentre outros aspectos, a obtenção de dados científicos visando o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem de determinado conteúdo ou objeto matemático, adquiriu destaque em meados dos anos de 1980 e com um distinguido período de efervescência entre as décadas de 80 e 90. A partir dos interesses do nosso estudo, declaramos que a vertente da Engenharia Didática – ED adotada aquí, se caracteriza como pertencente à primeira geração. No trecho abaixo observamos sua descrição, conforme Almouloud & Silva (2012).

> Lembramos que a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos de 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. (ALMOULOUD & SILVA, 2012).

Assim, de modo prosaico, todo o projeto ou a preparação para uma intervenção deve ser pensada nos momentos de planejamento que antecedem a aula, propriamente dita, nos momentos de experimentação da aula, em que todo o aparato teórico conceitual é colocado em movimento e, finalmente, uma depuração dos dados e informações coligidas após ter sido encerrado o fenômeno aula, de sorte que, o conjunto das ações planejadas, envolvendo o trinômio aluno – professor – conhecimento matemático, devem concorrer para o acúmulo de conhecimentos didáticos-metodológicos sobre assuntos específicos, conhecimentos precisos e particulares. De modo simplificado, Artigue (1996) esclarece o seguinte interesse:

> Trata-se de etiquetar, de certa forma, uma forma de trabalho didático, comparável ao do engenheiro, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre diversos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita a se submeter a um controle do tipo científico e, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos mais depurados da ciência [...] (ARTIGUE, 1996, p. 243)

A constatação da ED como metodologia de pesquisa (Almouloud, 2007) se caracteriza, então, como um esquema experimental baseado num conjunto de experimentações e realizações didáticas em sala de aula. Artigue (1996, p. 247) indica as seguintes etapas: concepção, realização, observação e a análise de sequências de ensino. Mas, do ponto de vista da ação experimental e do tempo (ou fases) investigativo, Artigue distingue ainda: (1) fase de análises preliminares; (2) fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas; (3) experimentação e, por fim, (4) análise *a posteriori* e a validação de todo aparato teórico construído tendo como fim e escopo a obtenção de conhecimentos científicos sobre o ensino.

De modo sistemático, conforme Artigue (1996, p. 249-250), nesta etapa consideramos: (i) uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino de determinado conteúdo; (ii) análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; (iii) exame das concepções e os conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados e livros adotados) e seus efeitos no que tange o ensino.

No que concerne ao primeiro ítem, como mencionado anteriormente, abordamos um conteúdo matemático que se mostra discutido, de modo restrito, num contexto de pesquisa em Matemática Pura e Aplicada e, dessa forma, se mostra desprovido de qualquer interesse ou intenção pedagógica, apesar de que, predominantemente as propriedades aquí discutidas podem ser verificadas por Indução Matemática. No que concerne ao campo do ensino que nossa transposição didática procura fazer correspodência, acentuamos o ambiente da formação inicial de professores que, no Brasil, no que concerne ao conhecimentos de sequências numéricas e recursivas, de modo standard, os autores de livros de História da Matemática – HM costumam recordar apenas a Sequência de Fibonacci e desconsideram a pesquisa atual sobre o assunto. Não realizaremos aquí ítem (iii), que se refere ao exame das concepções dos estudantes, posto que, nossa pesquisa se restringe aos dois primeiros momentos previstos por uma ED de 1ª geração (Almouloud & Silva, 2012).

Neste sentido, recordamos as ponderações de Robinet (1983), quando observou a ação investigativa desenvolvida por Guy Brousseau, nos anos de 1980, ao recordar que:

> Brousseau possui por objetivo por intermédio de que meios podemos fazer com que um grupo de alunos se apropriem de um conhecimento matemático. Para estudar uma situação de ensino, os parâmetros que devem ser considerados são reconhecidamente inúmeros que se mostra impossível de compreendermos de que modo eles intervêem na construção do conhecimento matemático. (Robinet, 1983, p. 6).

Diante do exposto no trecho acima, acentuamos ainda a preocupação de organizar um conjunto de situações propostas aos estudantes que proporcionem uma espécie de gênese artificial de um conceito científico. Assumindo tal perspectiva, iremos propor um conjunto de situação de ensino que envolvem tal intenção e preocupação didático-metodológica. No que concerne ao estudo da s-Sequências Generalizadas de Jacobsthal e da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal (discutida anteriormente), torna-se imprescindível o solucionador de problemas compreender o engendramento e a contribuiçao progressiva constante de matemáticos para a generalização da sequência numérica que indicamos na seção preliminar.

Doravante, nossa discussão restringir-se-á justamente ao momento de análises preliminares e de análise *a priori*, seguindo da concepção e descrição de situações. Assinalamos um motivo, relativamente ao qual, algumas das propriedades e identidades matriciais que devem ser apresentadas são, originalmente, abordadas somente em trabalhos científicos de Matemática Pura ou Aplicada, desprovidos de uma intenção didático-metodológica. Sendo assim, o grau ou o teor de pormenorização que apresentaremos deve evitar um estilo econômico e cifrado, relativamente comum no meio de divulgação da pesquisa em Matemática.

Observamos, ainda, tendo em vista os objetivos declarados anteriormente, sobretudo o que envolvem uma preocupação com o intuito de descrever um roteiro ou proposta de abordagem do conteúdo aquí discutido, adotaremos os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986, 1998), introduzidas na vertente da Didática da Matemática e, classicamente discutida na literatura em carater de complementaridade com a ED (ARTIGUE, 2009). Diante deste argumento, nas seções subsequentes, abordaremos uma descrição das fases dialéticas de ensino, nominadas por: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e institucionalização (previstas pela TSD.

Na próxima seção, as propriedades matriciais abordadas constituem um entendimento do objeto matemático envolvido e concorrem para a análise epistemológica dos conteúdos e registro de eventuais entraves para o seu ensino.

3. Propriedades matriciais da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal

A partir das definições 1 e no caso particular para $s = 2$ podemos determinar que $J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ como o termo geral da sequência numérica indicada em (*). Por outro lado, a partir da definição 1, poderemos determinar que: $J_0^s = 0$, $J_1^s = 1$, $J_2^s = s-1$, $J_3^s = \frac{s^3+1}{s+1} = \frac{(s+1)(s^2-s+1)}{s+1} = (s^2-s+1)$, $J_4^s = \frac{s^4-1}{s+1} = s^3 - s^2 + s - 1$, $J_5^s = \frac{s^5+1}{s+1} = s^4 - s^3 + s^2 - s + 1$. Um problema natural envolve a determinação de outros elementos da s-SHJ na medida em que o índice cresce J_n^s ou decresce indefinidamente J_{-n}^s, com $n \geq 0$.

Para tanto, vamos considerar (e definir) as seguintes matrizes $F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix}$. A partir disso, vamos avaliar as matrizes do tipo $F_s^{\,n}$:
$F_s^{\,2} = \begin{pmatrix} s^2-s-1 & s(s-1) \\ s-1 & s\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3^s & s\cdot J_2^s \\ J_2^s & s\cdot J_1^s \end{pmatrix}$, $F_s^{\,3} = \begin{pmatrix} s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^2-s+1) \\ s^2-s+1 & s\cdot(s-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_4^s & s\cdot J_3^s \\ J_3^s & s\cdot J_2^s \end{pmatrix}$, $F_s^{\,4} = \begin{pmatrix} s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \\ s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^2-s+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_5^s & s\cdot J_4^s \\ J_4^s & s\cdot J_3^s \end{pmatrix}$, $F_s^{\,5} = \begin{pmatrix} s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \\ s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_6^s & s\cdot J_5^s \\ J_5^s & s\cdot J_4^s \end{pmatrix}$, $F_s^{\,6} = \begin{pmatrix} J_7^s & s\cdot J_6^s \\ J_6^s & s\cdot J_5^s \end{pmatrix} = $
$= \begin{pmatrix} s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^5-s^4+s^3-s^2+s-1) \\ s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \end{pmatrix}$. $F_s^{\,7} = \begin{pmatrix} J_8^s & s\cdot J_7^s \\ J_7^s & s\cdot J_6^s \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} s^7-s^6+s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1) \\ s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^5-s^4+s^3-s^2+s-1) \end{pmatrix}$, etc. Assim, a partir desses casos iniciais, os estudantes podem ser estimulados na determinação e identificação de propriedades algébricas e invariantes para a determinação desse conjunto preliminar e seu comportamento respectivo ou termo geral.

De modo semelhante, vamos determinar que ocorrem os seguintes casos:
$F_s^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \\ \frac{1-s}{s^2} & \frac{s^2-s+1}{s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2}{s^{2-1}}\cdot J_1^s & s\frac{(-1)^{2+1}}{s^2}\cdot J_2^s \\ \frac{(-1)^{2+1}}{s^2}\cdot J_2^s & s\frac{(-1)^{2+2}}{s^{2+1}}\cdot J_3^s \end{pmatrix}$, $F_s^{-3} = \begin{pmatrix} \frac{1-s}{s^2} & \frac{s^2-s+1}{s^2} \\ \frac{s^2-s+1}{s^3} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^3} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^3}{s^{3-1}}\cdot J_2^s & s\frac{(-1)^{3+1}}{s^3}\cdot J_3^s \\ \frac{(-1)^{3+1}}{s^3}\cdot J_3^s & s\frac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}}\cdot J_4^s \end{pmatrix}, \; F_s^{-4} = \begin{pmatrix} \frac{s^2-s+1}{s^3} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^3} \\ \frac{s^3-s^2+s-1}{s^4} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^4}{s^{4-1}}\cdot J_3^s & s\frac{(-1)^{4+1}}{s^4}\cdot J_4^s \\ \frac{(-1)^{4+1}}{s^4}\cdot J_4^s & s\frac{(-1)^{4+2}}{s^{4+1}}\cdot J_5^s \end{pmatrix},$$

$$F_s^{-5} = \begin{pmatrix} \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^4} & \frac{s^4-s^3+s^2-s+1}{s^4} \\ \frac{s^4-s^3+s^2-s+1}{s^5} & \frac{-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1}{s^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^5}{s^{5-1}}\cdot J_4^s & s\frac{(-1)^{5+1}}{s^5}\cdot J_5^s \\ \frac{(-1)^{5+1}}{s^5}\cdot J_5^s & s\frac{(-1)^{5+2}}{s^{5+1}}\cdot J_6^s \end{pmatrix}.$$

Mais uma vez, uma apreciação minuciosa os casos particulares acima poderá instigar e estimular a conjectura de propriedades reveladas a partir de determinados invariantes algébricos indicados nas matrizes $F_s^{-2}, F_s^{-3}, F_s^{-4}, F_s^{-5}$, F_s^{-6}, F_s^{-7}, F_s^{-8} etc.

Na figura 4, logo abaixo, podemos verificar a determinação de potências F_s^n com os expoentes elevados. Com o auxílio do recurso computacional podemos antever/verificar e comprovar determinadas propriedades extraidas dos elementos do conjunto indicado por $\{J_{-n}^s\}_{n\in IN}$. Abaixo, determinamos ainda o comportamento das matrizes das potências $F_s^{10}, F_s^{11}, F_s^{12}, F_s^{13}, F_s^{14}, F_s^{15}, F_s^{16}, F_s^{17}$ com o recurso computacional. Assim, poderemos determinar uma fórmula fechada para $F_s^n, n \geq 0$. Tal propriedade será retomada na seção subsequente.

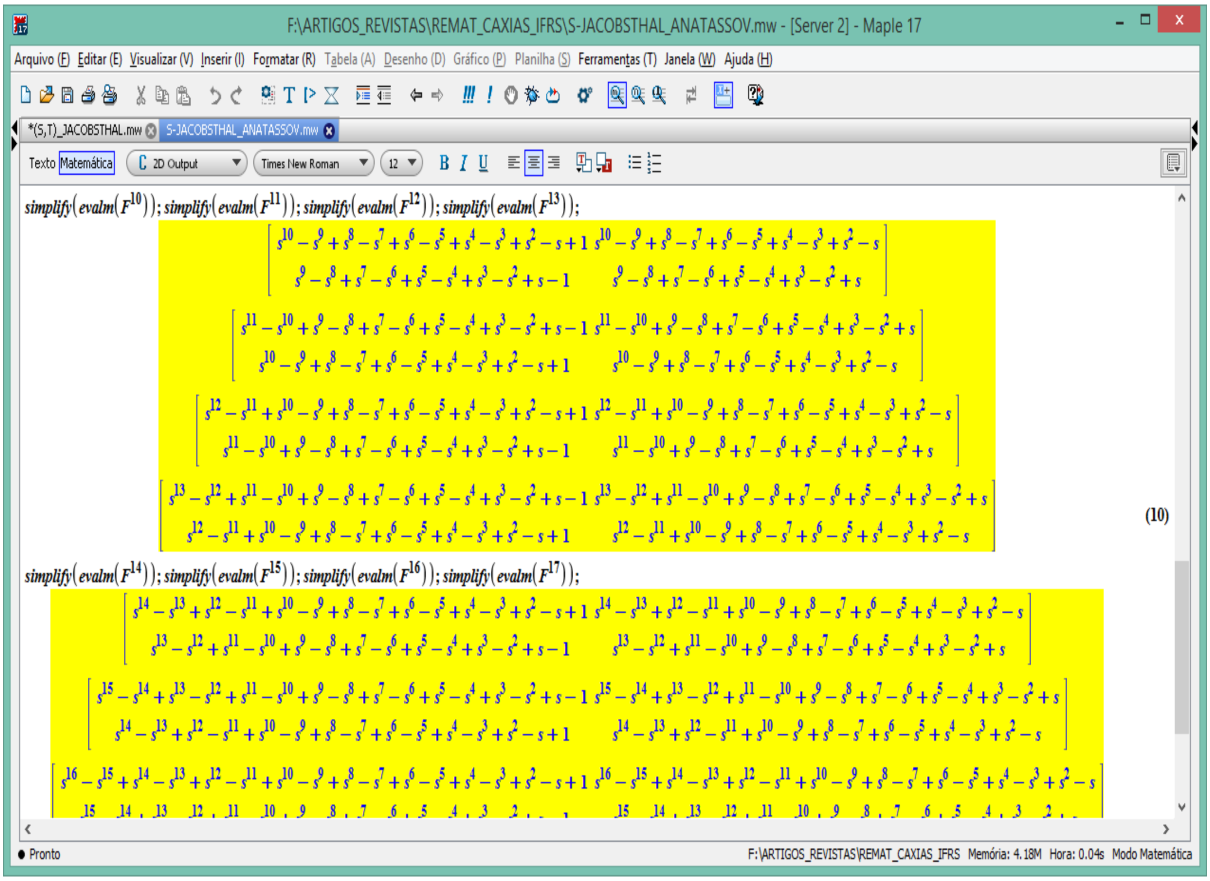


Figura 4. Investigação do comportamento das matrizes $F_s^{\,n}, n \geq 0$ com o uso do CAS Maple

Fonte: Elaboração do autor.

De modo natural, nosso processo investigativo progride no sentido de determinar o comportamento e a identificação de alguma regularidade e propriedade quando considerarmos matrizes do tipo F_s^{-10} F_s^{-11} F_s^{-12} F_s^{-13} F_s^{-14} F_s^{-15} F_s^{-16} F_s^{-17}. Na figura seguinte, trazemos os dados fornecidos pelos CAS Maple que podem auxiliar no processo de investigação de formulação de conjecturas no que concerne ao processo de identificação de padrões e invariantes algébricos para a descrição de uma fórmula fechada, deduzida indutivamente, para potências negativas da matriz $F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix}$. Agora, a partir do lema 1, poderemos observar ainda que

$$F_s^{-5} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^5}{s^{5-1}} \cdot J_4^s & s\frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s \\ \frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s & s\frac{(-1)^{5+2}}{s^{5+1}} \cdot J_6^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-4}^s & sJ_{-5}^s \\ J_{-5}^s & sJ_{-6}^s \end{pmatrix}, \quad F_s^{-7} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^7}{s^{7-1}} \cdot J_{7-1}^s & s\frac{(-1)^{7+1}}{s^7} \cdot J_7^s \\ \frac{(-1)^{7+1}}{s^7} \cdot J_7^s & s\frac{(-1)^{7+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{7+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-6}^s & sJ_{-7}^s \\ J_{-7}^s & sJ_{-8}^s \end{pmatrix}$$

$$, F_s^{-8} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^8}{s^{8-1}} \cdot J_{8-1}^s & s\frac{(-1)^{8+1}}{s^8} \cdot J_8^s \\ \frac{(-1)^{8+1}}{s^8} \cdot J_8^s & s\frac{(-1)^{7+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{8+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-7}^s & sJ_{-8}^s \\ J_{-8}^s & sJ_{-9}^s \end{pmatrix}, F_s^{-9} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^9}{s^{9-1}} \cdot J_{9-1}^s & s\frac{(-1)^{9+1}}{s^9} \cdot J_9^s \\ \frac{(-1)^{9+1}}{s^9} \cdot J_9^s & s\frac{(-1)^{9+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{9+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-8}^s & sJ_{-9}^s \\ J_{-9}^s & sJ_{-10}^s \end{pmatrix}.$$

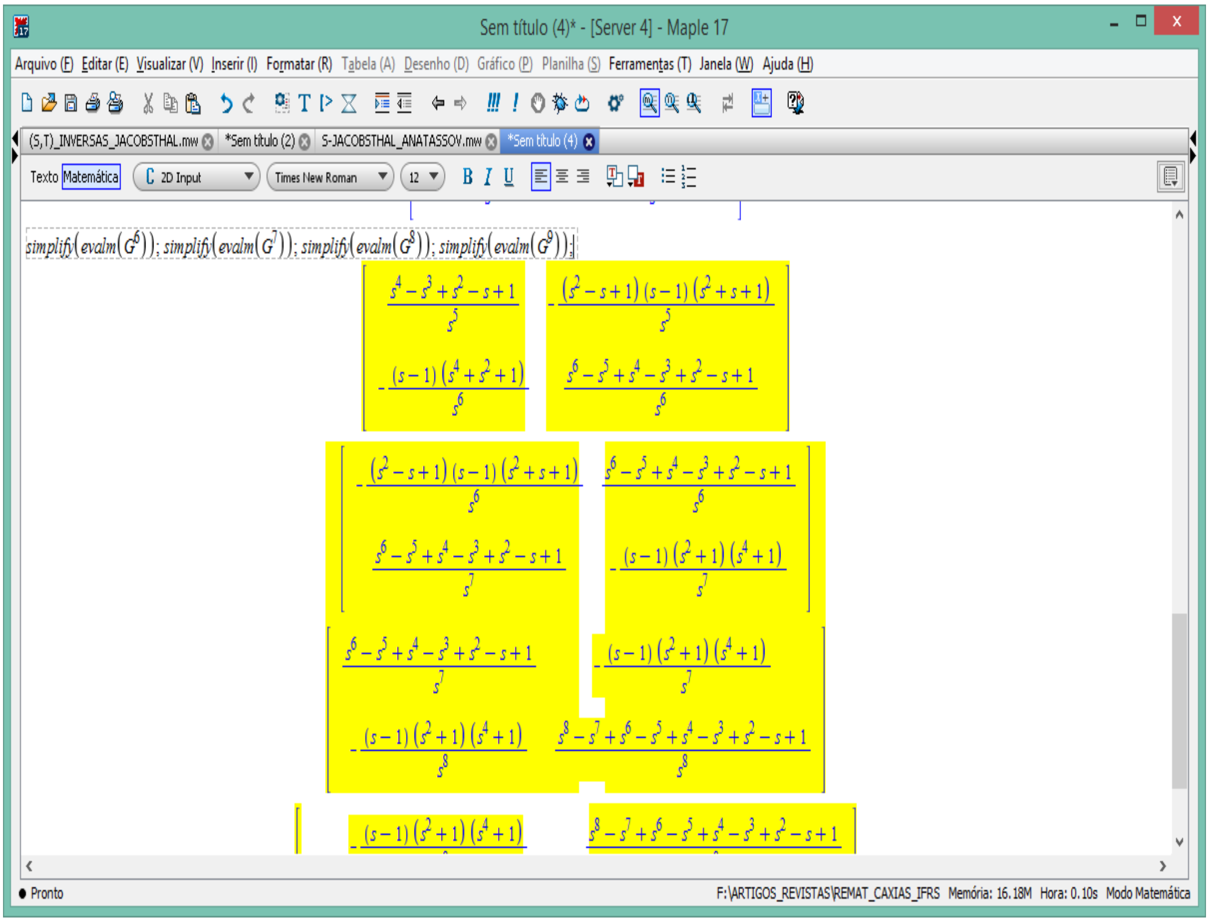


Figura 5. O software permite a determinação das potências negativas das matrizes relacionadas com a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal.
Fonte: Elaboração do autor.

Na seção subsequente, semelhantemente aos elementos discutidos para o caso da s-Sequência generalizada de Jacobsthal, retomaremos propriedades semelhantes relacionadas com a (s,t)-Sequência generalizada de Jacobsthal e a apreciação de suas propriedades com o arrimo do modelo computacional.

4. Propriedades matriciais da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal

A partir da definição 2, vamos lidar com o termo geral $J_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0$, $t, s \geq 2, s \neq -t$. (Anatassov, 2011). Alguns termos iniciais podem ser determinados diretamente por intermédio de $J_0^{s,t} = 0, J_1^{s,t} = \frac{s^1 + t}{s+t} = 1, J_2^{s,t} = \frac{s^2 - t^2}{s+t} = s - t$,

$$J_3^{s,t} = \frac{s^3 + t^3}{s+t} = \frac{(s+t)(s^2 - st + t^2)}{s+t} = s^2 - st + t^2, \quad J_4^{s,t} = \frac{s^4 - t^4}{s+t} = \frac{(s+t)(s^3 - s^2t + st^2 - t^3)}{s+t} = s^3 - s^2t + st^2 - t^3$$

$$, \quad J_5^{s,t} = \frac{s^5 + t^5}{s+t} = \frac{(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4)}{s+t} = s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4,$$

$$J_6^{s,t}=\frac{s^6-t^6}{s+t}=\frac{(s+t)\cdot(s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5)}{(s+t)}=s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5.$$

$$J_7^{s,t}=\frac{s^7+t^7}{s+t}=s^6-s^5t+s^4t^2-s^3t^3+s^2t^4-st^5+t^6,\quad J_8^{s,t}=\frac{s^8-t^8}{s+t}=s^7-s^6t+s^5t^2-s^4t^3$$

$$+s^3t^4-s^2t^5+st^6-t^7,\ J_9^{s,t}=\frac{s^9+t^9}{s+t}=s^8-s^7t+s^6t^2-s^5t^3+s^4t^4-s^3t^5+s^2t^6-st^7+t^8, \text{ etc.}$$

Mais uma vez, identificamos o elevado custo operacional que dificulta uma apreciação de demais propriedades dos números presentes no conjunto $\left\{J_n^{s,t}\right\}_{n\in IN}^{s,t\in IR}$. Com o recurso computacional, poderevemos antever algumas de suas propriedades.

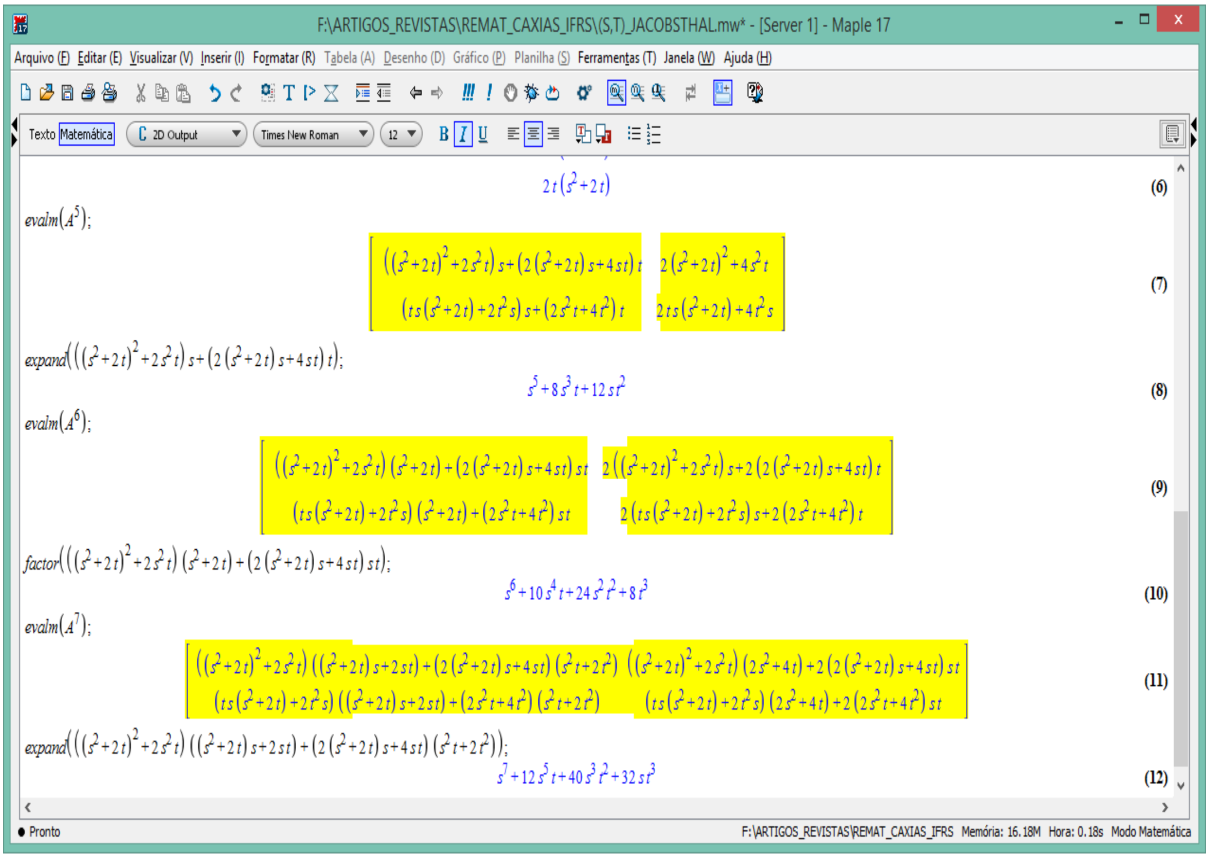


Figura 5. Annita (2016) discute o processo de extensão para índices inteiros.
Fonte: Elaboração do autor.

Repetimos nossa preocupação da seção passada e declaramos o interesse na determinação das propriedades das matrizes (2x2) inversas do tipo indicado:

$$F_{s,t}^{-2}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{st} & \dfrac{t-s}{t^2s}\\ \dfrac{t-s}{ts^2} & \dfrac{s^2-st+t^2}{s^2t^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^2}{st}\cdot J_1^{s,t} & s\dfrac{(-1)^3}{t^2s^2}\cdot J_2^{s,t}\\ t\dfrac{(-1)^3}{s^2t^2}\cdot J_2^{s,t} & (st)\dfrac{(-1)^{2+2}}{s^3t^3}\cdot J_3^{s,t}\end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-3}=\begin{pmatrix}\dfrac{t-s}{s^2t^2} & \dfrac{s^2-st+t^2}{t^3s^2}\\ \dfrac{s^2-st+t^2}{t^2s^3} & \dfrac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{s^3t^3}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^3}{s^2t^2}\cdot J_2^{s,t} & s\,\frac{(-1)^4}{t^3s^3}\cdot J_3^{s,t} \\ t\,\frac{(-1)^4}{t^3s^3}\cdot J_3^{s,t} & (st)\,\frac{(-1)^5}{s^4t^4}\cdot J_4^{s,t} \end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-4} = \begin{pmatrix} \frac{s^2-st+t^2}{s^3t^3} & \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^4s^3} \\ \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^3s^4} & \frac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{s^4t^4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^4}{s^{4-1}t^{4-1}}\cdot J_3^{s,t} & s\,\frac{(-1)^{4+1}}{t^4s^4}\cdot J_4^{s,t} \\ t\,\frac{(-1)^{4+1}}{t^4s^4}\cdot J_4^{s,t} & (st)\,\frac{(-1)^{4+2}}{s^5t^5}\cdot J_5^{s,t} \end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-5} = \begin{pmatrix} -\frac{s^3-s^2t+st^2-t^3}{s^4t^4} & \frac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{t^5s^4} \\ \frac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{t^4s^5} & -\frac{s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5}{s^5t^5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^5}{s^{5-1}t^{5-1}}\cdot J_4^{s,t} & s\,\frac{(-1)^{5+1}}{t^5s^5}\cdot J_5^{s,t} \\ t\,\frac{(-1)^{5+1}}{t^5s^5}\cdot J_5^{s,t} & (st)\,\frac{(-1)^{5+2}}{s^6t^6}\cdot J_6^{s,t} \end{pmatrix}$$

. Quando lidamos com matrizes com expoente elevado, poderemos explorar e avaliar os dados obtidos apenas com o recurso computacional. Os dados exibidos na figura 5 devem auxiliar na investigação.

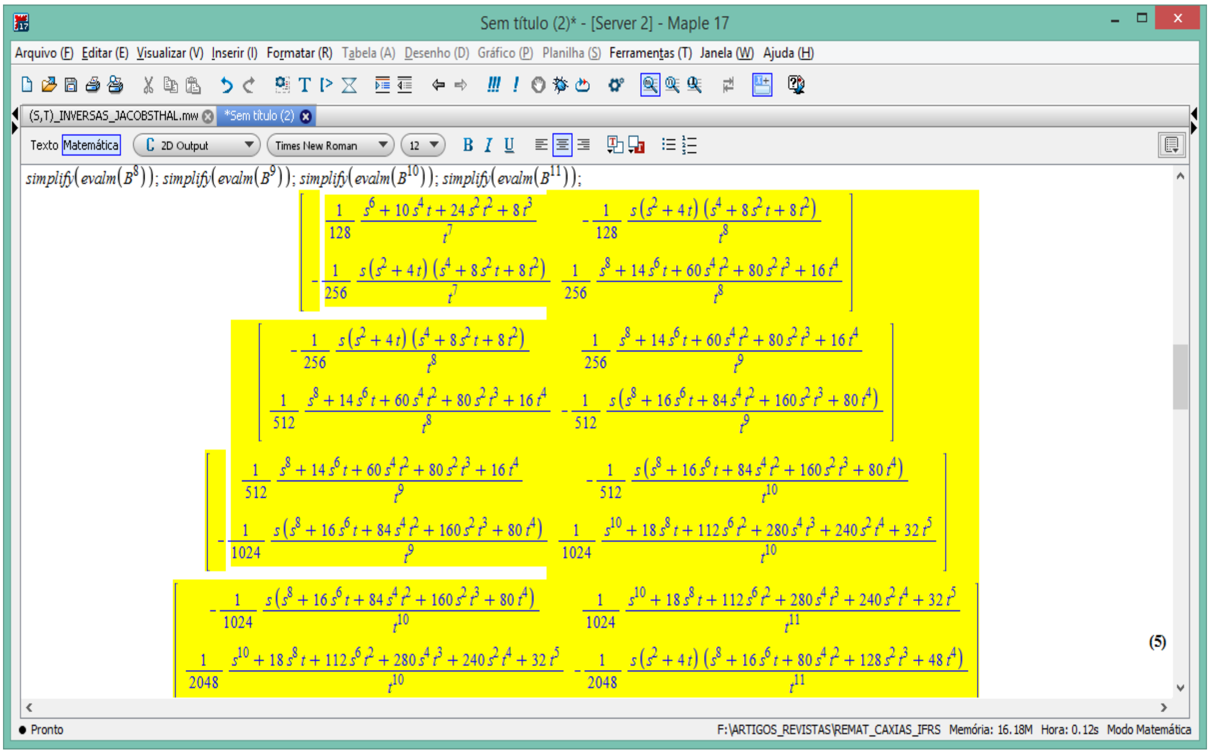


Figura 5. O software permite a determinação das potências negativas das matrizes relacionadas com a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal.
Fonte: Elaboração do autor.

5. Análise *a priori* e a concepção de situações envolvendo a s-SGJ e (s,t)-SGJ.

A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar a hipótese indicadas há pouco. Para indicar os elementos essenciais da fase atual debemos considerar que "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Por fim, na etapa da *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prevê Artigue (1995).

Outrossim, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (MARGOLINAS, 1995, p. 344). E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela Teoria das Situações Didáticas - TSD, registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (BROUSSEAU, 1986; 1998)

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2009, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância das variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Ademais, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (MARGOLINAS, 1995, p. 344). Notamos ainda que "a palavra variável designa, a priori, aquilo que pode variar nas situações de ensino e de aprendizagem. Nos problemas ou nas situações propostas aos alunos, várias variáveis podem ser escolhidas pelo professor [...]" (ALMOULOUD, 2016, p. 119).

A partir de agora, segundo nossos objetivos, passaremos a discutir, de modo pormenorizado e, em consonancia com as fases da TSD, as situações problemas elaboradas, tendo como objetivo final, sua possível abordagem e discussão em sala de aula. Recordamos que algumas propriedades, que discutiremos, se mostram restritas ao campo científico de circulação e publicação em artigos especializados.

Situação-didática I: A Sequência de Jacobsthal recebeu tal denominação tendo em vista a contribuição do matemático alemão Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965) que empregou a relação $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com os seguintes valores iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Muito tempo depois, o matemático búlgaro Krassimir Todorov Atanassov (1954 - ?) formulou a descrição da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal, cujo termo geral é definido por $J_n^s = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0, s \geq 2$. A partir dessa relação, recentemente introduzida na literatura especializada, verificar por indução matemática que: (i) $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$; (ii) $F_{s}^{\ n} = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s} & s \cdot J_{n}^{s} \\ J_{n}^{s} & s \cdot J_{n-1}^{s} \end{pmatrix}, n \geq 2$;

(iii) $F_{s}^{\ -n} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n}}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s} & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^{s} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^{s} & s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s} \end{pmatrix}$.

Situação de ação: As relações e significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser movilizada pelo grupo (ALMOULOUD, 2007, p. 38). Nesse caso, a ação de professor deverá ser decisiva para a apropriação e familiarização com o sistema notacional oriundo das definições 1 e 2. A manipulação de casos particulares deve ser estimulada (ver figuras 4 e 5). Preliminarmente a relação de recorrência da sequência de Jacobsthal $J_{n} = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ pode ser comparada com a relação $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$. No primeiro caso, os estudantes devem comprender o caráter de recorrência, todavía, no caso da identidade $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$, a recorrência é determinar por um elementos antecessor e uma potência de $(-1)^{n}$. No que concerne aos itens (ii) e (iii), os elementos particulares das potências de $F_{s}^{\ n}$ e $F_{s}^{\ -n}$, para $n \geq 2$. Ver figuras 4 e 5.

Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética “permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns”. Com explicamos na fase dialética anterior, os alunos precisam se apropriar de um sistema notacional que deve proporcionar a homogeneização da comunicação entre o grupo, oriundo das interações com o software proposto. Ademais, como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos que “o estudante poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige”. Alguns casos particulares podem ser estimulados em sua verificação, por exemplo, o caso de $J_{7}^{s} = \frac{s^{7} - (-1)^{7}}{s+1} = \frac{s \cdot s^{6} - s \cdot (-1)^{6} + s \cdot (-1)^{6} + (-1)^{6}}{s+1}$ $= \frac{s \cdot (s^{6} - (-1)^{6}) + s \cdot ((-1)^{6} + (-1)^{6})}{s+1} = \frac{s \cdot (s^{6} - (-1)^{6})}{s+1} + \frac{(s+1)(-1)^{6}}{s+1} = s \cdot \frac{(s^{6} - (-1)^{6})}{s+1} + (-1)^{6} = s \cdot J_{6}^{s} + (-1)^{6}$.
O professor deverá asumir posição importante no processo de discussão pelo grupo e na estimulação da discussão dos casos preliminares, como indicamos acima.

Assim, a partir do ítem (i), se espera que os alunos considerem a relação $J_{n+1}^{s} = \frac{s^{n+1} - (-1)^{n+1}}{s+1} = \frac{s \cdot s^{n} - s \cdot (-1)^{n} + s \cdot (-1)^{n} + (-1)^{n}}{s+1} = \frac{s \cdot (s^{n} - (-1)^{n}) + s \cdot ((-1)^{n} + (-1)^{n})}{s+1} =$ $\frac{s \cdot (s^{n} - (-1)^{n})}{s+1} + \frac{(s+1)(-1)^{n}}{s+1} = s \cdot \frac{(s^{n} - (-1)^{n})}{s+1} + (-1)^{n} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$ e que confere o resultado do ítem (i). Por outro lado, a despeito dos casos particulares que podem ser apreciados com o recurso computacional (CAS Maple), para determinar que $F_s{}^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \\ J_n^s & s\cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}$ o procedimento por indução será o indicado. Assim, vemos $F_s{}^{n+1} = F_s{}^n F_s = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \\ J_n^s & s\cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s-1)J_{n+1}^s + s\cdot J_n^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ (s-1)J_n^s + s\cdot J_{n-1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s - J_{n+1}^s + s\cdot J_n^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s - J_n^s + s\cdot J_{n-1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s - (-1)^n & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s - (-1)^{n-1} & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s + (-1)^{n+1} & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s + (-1)^n & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n+2}^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix}$ e empregamos a identidade $J_{n+1}^s = s\cdot J_n^s + (-1)^n$. Por fim, a partir dos casos particulares da matrizes inversas indicadas pelo software, deve ser indicado aos mesmos, mais uma vez, verificar por indução que $F_s{}^{-n-1} = F_s{}^{-n}\cdot F_s{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^s & s\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & s\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n}{s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^s + (1-s)\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s + (1-s)\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot sJ_{n-1}^s + (1-s)(-1)^{n+1}J_n^s}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot sJ_n^s + (1-s)(-1)^{n+2}J_{n+1}^s}{s^{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot\left(sJ_{n-1}^s + sJ_n^s - J_n^s\right)}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot\left(sJ_n^s + sJ_{n+1}^s - J_{n+1}^s\right)}{s^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot\left(sJ_{n-1}^s - J_n^s + sJ_n^s\right)}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot\left(sJ_n^s - J_{n+1}^s + sJ_{n+1}^s\right)}{s^{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n}{s^n}\left((-1)^n + sJ_n^s\right) \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^2(-1)^{n+1}}{s^{n+1}}\left((-1)^{n+1} + sJ_{n+1}^s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & s\frac{(-1)^n}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & s\frac{(-1)^{n+3}}{s^{n+2}}\cdot J_{n+2}^s \end{pmatrix},\ n \geq 1.$$

Situação de validação: Recordamos que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário “provar o que foi afirmado na fase anterior” (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8). Nessa fase, num contexto do “debate da certeza das asserções” (ALMOULOUD, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferencias lógicas empregadas com o intento de obter a certeza das relações estabelecidas e das propriedades coligidas após a implementação de um plano de estratégia. Na situação didática I, os estudantes devem ser estimulados na identificação dos modelos matemáticos formais que concorreram para a verificação/demonstração de todas as propriedades mobilizadas na fase predecessora. Nesse caso, uma série de propriedades matriciais e o modelo de Indução Matemática se mostram imprescindíveis, tendo em vista que, a necesidade da verificação formal e o emprego de métodos inferenciais lógico formais, tendo em vista confirmar as conjecturas elaboradas na fase anterior.

Situação de institucionalização: Brousseau (1986, p. 342) comenta que "a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]". Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos que determinaram sua aparição. Por outro lado, vale comentar que o conhecimento matemático abordado na situação presente é proveniente de um artigo científico recente. O professor poderá estimular a exploração dos documentos originais (ANATASSOV, 2011; 2012) disponíveis na *internet* e confrontar, comparar o estilo resumido e cifrado de um trabalho em Matemática. Por outro lado, os dados produzidos pelo software devem ser comparados com os dados extraidos pelo grupo, concernentemente ao modelo computacional. Desse modo, a investigação proposta não permanece restrita ao simples emprego de modelos matemáticos e, sim, pelo entendimento de seu procesos evolutivo e a contribuição do modelo computacional (ver figuras 4 e 5) na verificação/testagem de propriedades derivadas dos números oriundos dos conjuntos $\left\{J_n^s\right\}_{n\in IN}$ e $\left\{J_{-n}^s\right\}_{n\in IN}$.

Situação didática II: O termo geral da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal é definido por $J_n^s = \dfrac{s^n-(-1)^n}{s+1}, n\geq 0, s\geq 2$. Por outro lado, de modo natural, podemos pensar em substituir o termo indicado por $(-1)^n$ por $(-t)^n$ e, dessa forma, vamos determinar o seguinte termo geral $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n-(-t)^n}{s+t}, n\geq 0, t,s\geq 2, s\neq -t$. Tal definição foi recentemente introduzida na literatura científica por Anatassov (2011) e revela o processo evolutivo e de generalização da Sequência Generalizada de Jacobsthal. Sabendo isso, vamos determinar: (i) alguns dos seus termos iniciais avaliados; (ii) verificar a relação $J_{n+1}^{s,t} = s\cdot J_n^{s,t} + (-t)^n$; (iii) considerando a matriz $F_{s,t} = \begin{pmatrix} s-t & s\cdot 1 \\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix}$, verificar que os elementos da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal pode ser determinada por intermédio das potências de matrizes.

Situação de ação: No que concerne ao primeiro ítem (i), os estudantes são estimulados na substituição direta na fórmula $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n-(-t)^n}{s+t}$ e, observar que, quando substituem índices pares do tipo (n=2m), determinam que $J_{2m}^{s,t} = \dfrac{s^{2m}-t^{2m}}{s+t}$ e, quando ocorre a substituição com índices ímpares (n=2m+1), devem encontrar que $J_{2m+1}^{s,t} = \dfrac{s^{2m+1}+t^{2m+1}}{s+t}$. De sorte que, com a verificação da propriedade com o software, a divisão polinomial sempre resulta numa função não racional. Por exemplo, podem constatar que $J_{2m}^{s,t} = \dfrac{s^{2m}-t^{2m}}{s+t} = s^{2m-1} - s^{2m-2}t + s^{2m-3}t^2 - s^{2m-4}t^3 + \cdots - t^{2m-1}$

e $J_{2m+1}^{s,t}=\dfrac{s^{2m+1}+t^{2m+1}}{s+t}=s^{2m}-s^{2m-1}t+s^{2m-2}t^2-s^{2m-3}t^4\cdots+t^{2m}$. Outro elemento a considerado ainda diz respeito na comparação do caráter de recursivadade da sequência de Jacobsthal $J_n=J_{n-1}+2J_{n-2},n\geq 2$ e a fórmula deduzida por Anatassov (2011), que foi indicada por $J_{n+1}^{s,t}=s\cdot J_n^{s,t}+(-t)^n$.

Situação de formulação: Alguns casos particulares podem ser sugeridos aos estudantes. Desse modo, por exemplo, o número $J_8^{s,t}=\left(\dfrac{s^8-(-t)^8}{s+t}\right)=\left(\dfrac{s^{7+1}-(-t)^{7+1}}{s+t}\right)$

$$=\frac{s\cdot s^7+t\cdot(-t)^7}{s+t}=\frac{s\cdot s^7-s\cdot(-t)^7+s\cdot(-t)^7+t\cdot(-t)^7}{s+t}=\frac{\left[s\cdot(s^7-(-t)^7)+(s+t)\cdot(-t)^7\right]}{(s+t)}=$$

$=s\cdot\left[\dfrac{s^7-(-t)^7}{(s+t)}\right]+\left[\dfrac{(s+t)\cdot(-t)^7}{(s+t)}\right]=\left(s\cdot J_7^{s,t}+(-\mathrm{t})^7\right)=s\cdot J_7^{s,t}-t^7$. Para confirmar o comportamento invariante, podemos observar $J_{15}^{s,t}=\left(\dfrac{s^{15}-(-t)^{15}}{s+t}\right)=\left(\dfrac{s^{14+1}-(-t)^{14+1}}{s+t}\right)=$

$$=\frac{s\cdot s^{14}+t\cdot(-t)^{14}}{s+t}=\frac{s\cdot s^{14}-s\cdot(-t)^{14}+s\cdot(-t)^{14}+t\cdot(-t)^{14}}{s+t}=\frac{\left[s\cdot(s^{14}-(-t)^{14})+(s+t)\cdot(-t)^{14}\right]}{(s+t)}=$$

$s\cdot\left[\dfrac{s^{14}-(-t)^{14}}{(s+t)}\right]+\left[\dfrac{(s+t)\cdot(-t)^{14}}{(s+t)}\right]=s\cdot J_{13}^{s,t}+(-\mathrm{t})^{14}=s\cdot J_7^{s,t}+t^{14}$. Na fase subsequênte, devem empregar o modelo de indução matemática com o objetivo de deduzir a propriedade para qualquer inteiro 'n' natural.

Situação de validação: Como comentada na situação precedente, sinalizamos que o carater de verificação da certeza das ilações produzidas na fase de formulação se mostra imprescindivel. Desse modo, vemos que $J_{n+1}^{s,t}=\left(\dfrac{s^{n+1}-(-t)^{n+1}}{s+t}\right)=$

$$=\frac{s\cdot s^n+t\cdot(-t)^n}{s+t}=\frac{s\cdot s^n-s\cdot(-t)^n+s\cdot(-t)^n+t\cdot(-t)^n}{s+t}=\frac{\left[s\cdot(s^n-(-t)^n)+(s+t)\cdot(-t)^n\right]}{(s+t)}=$$

$s\cdot\left[\dfrac{s^n-(-t)^n}{(s+t)}\right]+\dfrac{(s+t)\cdot(-t)^n}{(s+t)}=s\cdot J_n^{s,t}+(-\mathrm{t})^n$. Por outro lado, no caso da verificação por indução matemática das potências das matrizes (2x2) do tipo $F_{\mathrm{s,t}}{}^n$, podem também verificar a seguinte relação: $F_{\mathrm{s,t}}{}^{n+1}=F_{\mathrm{s,t}}{}^n\cdot F_{\mathrm{s,t}}=\begin{pmatrix}J_{n+1}^{s,t} & s\cdot J_n^{s,t}\\ t\cdot J_n^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n-1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s-t & s\cdot 1\\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}J_{n+1}^{s,t} & s\cdot J_n^{s,t}\\ t\cdot J_n^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n-1}^{s,t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s-t & s\cdot 1\\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(s-t)\cdot J_{n+1}^{s,t}+st\cdot J_n^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t}\\ (s-t)\cdot t\cdot J_n^{s,t}+(s\cdot t^2)\cdot J_{n-1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-tJ_{n+1}^{s,t}+st\cdot J_{n}^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_{n}^{s,t}-t^{2}J_{n}^{s,t}+s\cdot t^{2}\cdot J_{n-1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n}^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-t(J_{n+1}^{s,t}-sJ_{n}^{s,t}) & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_{n}^{s,t}-t^{2}(J_{n}^{s,t}-sJ_{n-1}^{s,t}) & (s\cdot t)\cdot J_{n}^{s,t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-t((-t)^{n}) & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_{n}^{s,t}-t^{2}((-t)^{n-1}) & (s\cdot t)\cdot J_{n}^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}+(-t)^{n+1} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t(s\cdot J_{n}^{s,t}+(-t)^{n+1}) & (s\cdot t)\cdot J_{n}^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{n+2}^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t\cdot J_{n+1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n}^{s,t}\end{pmatrix}.$$

Com origem dos argumentos anteriores, os estudantes devem comprovar a fórmula fechada para a determinação da potências da matriz $F_s=\begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. A referida fórmula permite a determinação de qualquer elemento presente na s-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Por outro lado, desde que vimos o lema 1, indica um processo de extensão natural para um conjunto maior de índices inteiros.

Dessa forma, vem que $F_{s,t}^{-n-1}=F_{s,t}^{-n}\cdot F_{s,t}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n}}{s^{n-1}t^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t} & (\mathrm{st})\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n}}{s^{n-1}t^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t} & \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n-1}}\cdot J_{n}^{s,t} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n-1}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t} & \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n}t^{n}}\cdot J_{n+1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t} & \frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t}+\frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n-1}}\cdot J_{n}^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n}}\cdot J_{n+1}^{s,t} & \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t}+\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n}t^{n}}\cdot J_{n+1}^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st}\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n}}\cdot J_{n}^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+2}s^{n+2}}\cdot J_{n+2}^{s,t}\end{pmatrix}$ o que confirma/produz a fórmula por Indução Matemática. De fato, podemos considerar na posição (1x2) a seguinte expressão

$$\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t}+\frac{(-1)^{n+1}}{t^{n}s^{n-1}}\cdot J_{n}^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st}=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(J_{n-1}^{s,t}-J_{n}^{s,t}\cdot\frac{(t-s)}{st}\right)=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(\frac{st\cdot J_{n-1}^{s,t}-tJ_{n}^{s,t}+sJ_{n}^{s,t}}{st}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(\frac{t\cdot(s\cdot J_{n-1}^{s,t}-J_{n}^{s,t})+sJ_{n}^{s,t}}{st}\right)=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(\frac{t(-(-t)^{n+1})+sJ_{n}^{s,t}}{st}\right)=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(\frac{(-t)^{n+2}+sJ_{n}^{s,t}}{st}\right)=$$

$=\frac{(-1)^{n}}{t^{n}s^{n-1}}\left(\frac{sJ_{n}^{s,t}+(-t)^{n}}{st}\right)=\frac{(-1)^{n}}{t^{n+1}s^{n}}\cdot J_{n+1}^{s,t}=s\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t}$, recordando que empregamos a seguinte relação de recorrência $J_{n+1}^{s,t}=s\cdot J_{n}^{s,t}+(-t)^{n}$.

Situação de institucionalização: Temos acentuado em nossos trabalhos o carater de imprescindibilidade de proporcionar, num contexto de investigação histórica, elementos que proporcionam ao estudantes constatar que a atividade produtora e do estabelecimento de definições matemáticas funciona como uma “maquina” produtora e novos teoremas e que concorrem para o processo evolutivo matemático epistemológico que, nem sempre, se mostra visível. Ademais, tendo em vista que os documentos (artigos científicos) se constituirem relativamente recentes (ANATASSOV, 2011; 2012), a identificação de elementos desconsiderados pelo autor e a contribuição do grupo de estudantes nas atividades proporciona uma ação que simula a real atividade do matemático profissional, respeitando-se suas especificidades.

Ademais, o papel dos momentos previstos pela TSD, no sentido de distinguir/descrever momentos particulares envolvendo a interação do trinomio estudantes – conhecimento matemático – professor, que concorrem para a construção de um conhecimento por parte do grupo, oriundo do debate em sala de aula e ainda pela constação de elementos que concorrem para o processo matemático, epistemológico evolutivo da SJ, por meio de derivações abordadas no corrente trabalho, que indicamos por s-SGJ e (s,t)-SGJ. Por fim, outros elementos teóricos, a partir das próprias ponderaçõess de Anatossov (2012), os números da forma $Y_n^{s,t} = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1}$ e $JP_n^s = \dfrac{p_n^s - (-1)^n}{p_{s+1}}$, aonde $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5\ldots$ são números primos, envolvem algumas questões e propriedades ainda em aberto. Assim, poderemos instigar os estudantes rumo a uma nova incursão matemática investigativa, envolvendo a generalização da SJ.

6. Considerações finais.

No trabalho atual, abordamos uma proposta de descrição teórico-conceitual, correspondentemente às duas primeiras etapas de uma ED (análises preliminares e análise *a priori*) que se enquadra num contexto de preocupação de proporcionar um dispositivo técnico e um conjunto de situações didáticas comunicáveis e reprodutíveis, em sala de aula, envolvendo as noções de s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Para tanto, do ponto de vista matemático, apresentamos algumas propriedades e identidades que, a despeito de constituir uma herança de uma sequência numérica, originalmente estudada por E. E. Jacobsthal, possui um interesse de estudo atual e os números do tipo J_n^s e $J_n^{s,t}$, com n um inteiro qualquer, confirmam seu processo matemático epistemológico evolutivo (ver lema 1).

Vale observar que, seguindo a tradição dos trabalhos da vertente da Didática da Matemática, o uso, em carater de complementaridade, da ED com a TSD, visando a obtenção, acúmulo, constação e determinação de conhecimentos técnicos, didáticos e metodológicos sobre uma prática controlada de transmissão e transposição didática, relativamente a determinado conteúdo matemático. Assim, diante do carater atual dos conceitos científicos e definições matemáticas (ver definição 1 e 2), recentemente discutidas na literatura especializada, se evidencia o carater de relevância de sua abordagem no âmbito da formação inicial de professores, com enfase em seus aspectos históricos e epistemológicos. Tais elementos devem concorrer para um entendimento de um progresso ininterrupto na Matemática que pode ser revelado, de modo particular, a partir das derivações da relação $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$.

Por outro lado, podemos constatar o alto custo operacional no sentido da determinação efetiva das potências das matrizes que indicamos na tabela 1, 3ª e 4ª linhas. Dessa forma, com o recurso computacional (aquí empregamos o CAS Maple), podemos fornecer aos estudantes dados e exemplos particulares das mesmas a fim de estimular e instigar a produção de conjecturas relativamente ao intento da determinação de determinadas fórmulas fechadas paras as matrizes (que indicamos na tabela 1) do tipo $F_s^{\ n}$, $F_s^{\ -n}, F_{s,t}^{\ \ n}$ e $F_{s,t}^{\ \ -n}$, sobretudo nas fases dialéticas de ação e formulação, previstas pela TSD.

Por conseguinte, as fases de validação e institucionalização devem concorrer para a possibilidade de incorporação/elaboração aos conhecimentos dos estudantes determinados saberes que se encontram restritos aos meios de informação do tipo artigos científicos e livros especializados de Matemática Pura e Aplicada, isentos de preocupações históricas, epistemológicas e de transmissão. Desse modo, assinalamos o alcance do objetivo (a) e (b) de nosso trabalho que delimita um conjunto de informações que permitem sua eventual exploração e aplicação em sala de aula. As simples imformações que exibimos na tabela abaixo podem funcionar como um "fio condutor" para tal entendimento evolutivo na Matemática.

TABELA 1. Quadro resumido de formulas derivadas da SGJ.

Fórmulas e identidades	s-Sequência Generalizada de Jacobsthal	(s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal
Relação de recorrência	$J_{n+1}^{s} = s \cdot J_n^s + (-1)^n$ (ANATASSOV, 2011)	$J_{n+1}^{s,t} = s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n, ,n \geq 0$. (ANATASSOV, 2011)
Extensão ao campo de índices inteiros	$J_{-n}^{s} = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \ ,n \geq 0$	$J_{-n}^{s,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(st)^n} \cdot J_n^{s,t} \ ,n \geq 0$
Matrizes de representaçã o	$F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s \geq 2$.	$F_{s,t} = \begin{pmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & st \cdot 0 \end{pmatrix}, s,t \geq 2$.
Potências com expoentes positivos	$F_s^{\ n} = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}, n \geq 2$.	$F_{s,t}^{\ \ n} = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{n-1}^{s,t} \end{pmatrix}, n \geq 2$.

Potências com expoentes negativos	$F_s^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}$ para $n \geq 1$.	$F_{s,t}^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{pmatrix}$ para $n \geq 1$.
Propriedade em aberto e ainda desconhecida	$Y_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1}$, $JP_n^s = \frac{p_n^s - (-1)^n}{p_{s+1}}$	$Y_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s^2 - 1}$ (ANATASSOV, 2012)

Tabela 1. Elaboração do autor

Ademais, não podemos desconsiderar a importancia do entendimento do processo de extensão dos índices que, originalmente, na sequência de Jacobsthal, se indicam apenas índices (naturais) inteiros positivos mas, todavía, podem ser extendidos, para um conjunto amplo e, ainda, de formas de representação variadas (HORADAM, 1996), como podemos apreciar na figura abaixo. Do ponto de vista histórico, iniciamos uma discussão da propriedade correlata no caso da Sequência de Fibonacci (ALVES, 2016) e que comprova uma trajetória natural dos modelos de sequências homogéneas recorrentes de orden n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	$\cdots$
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	$\cdots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$\mathcal{J}_n$	0	1	4	9	20	41	84	169	340	681	1364	$\cdots$
$\hat{j}_n$	0	1	6	13	30	61	126	253	510	1021	2046	$\cdots$

Figura 6. Horadam (1996) discutiu o processo de extensão e representação da SJ por intermedio de argumentos matemáticos variados.

Para comprovar, ainda, um processo de generalização e interesse especial neste tipo de propriedade, sugerimos a consulta do trabalho de Arslan & Koken (2016) que desenvolvem um estudo da determinação de elementos presentes na sequência de Jacobsthal com índices racionais, ainda com o emprego de propriedades matriciais.

$$\{\ldots,\ldots,J_{-n},J_{-n+1},J_{-n+2},\ldots,J_{-4},J_{-3},J_{-2},J_{-1},J_0,J_1,J_2,J_3,J_4,\ldots,J_n,J_{n+1}\ldots\}$$
$$\{\ldots,\ldots,J_{-n}^s,J_{-n+1}^s,J_{-n+2}^s,\ldots,J_{-3}^s,J_{-2}^s,J_{-1}^s,J_0^s,J_1^s,J_2^s,J_3^s,J_4^s,\ldots,J_n^s,J_{n+1}^s\ldots\}$$
$$\{\ldots,\ldots,J_{-n}^{s,t},J_{-n+1}^{s,t},J_{-n+2}^{s,t},\ldots,J_{-3}^{s,t},J_{-2}^{s,t},J_{-1}^{s,t},J_0^{s,t},J_1^{s,t},J_2^{s,t},J_3^{s,t},J_4^{s,t},\ldots,J_n^{s,t},J_{n+1}^{s,t}\ldots\}$$

Finalmente, os próximos passos da engenheria didática devem concorrer para a aplicação e experimentação efetiva das questões (situações didáticas) abordadas ao decurso do trabalho. De modo geral, os dados produzidos em sua aplicação, seguindo ainda a última fase (de validação da engenharia e de todo o aparato produzido para o ensino), deve concorrer para o acúmulo de conhecimentos didáticos e metodológicos sonre o assunto matemático abordado aquí.

Bibliografía

Almouloud, Ag Saddo. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

Almouloud, Ag Saddo & Silva, Maria. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, nº 2, 2012.

Almouloud, Ag Saddo. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações problemas: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 11, nº 2, 109 – 141, 2016.

Alves, Francisco, R. V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci na disciplina de História da Matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 18, nº 1, 61 – 93, 2016a. Recuperado el 10 de abril de 2017, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive

Alves, Francisco, R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da Sequência Generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, nº 68, 1 – 5, 2016b. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=archive

Alves, Francisco, R. V. Sequência Generalizada de Pell – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista THEMA*. v. 13, nº 2, 27 – 41, 2016c. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo13.pdf

Alves, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação*. v. 7, nº 21, 131 – 150, 2016d. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/issue/view/109/showToc

Alves, Francisco. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. *VYDIA Educação*. v. 35, nº 1, 133 – 146, 2015. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/issue/archive

Anita, A.Gnanam, B. (2016). Negative Jacobsthal Numbers. International Journal of Science, *Engineering and Technology Research* (IJSETR). v. 5, nº 3, 663 – 665.

Artigue, M. (1996). Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). *Didactiques de Mathématiques*, 243 – 264. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France.

Artigue, M. (2009). Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (eds). *NORMA08*, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark, 7 – 16.

Arlsan. S. & Koken, F. (2016). The Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers via Square Roots of Matrices. *International Mathematical Forum*, 11(11), 513 – 520.

Recuperado el 15 de mayo de 2017, de http://www.m-hikari.com/imf/imf-2016/9-12-2016/p/kokenIMF9-12-2016.pdf

Brousseau, G. (1986). Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33 – 115.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.) (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160.

Chevallard. Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition.

Jacobsthal, E. (1919 – 1920). Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen. *Berlinger Mathematische Gesellschaft*. Sitzungsberichte. v. 13, 43 – 57.

Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 34, nº 1, 40 – 55.

Koken, F. & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. *Int. Journal Contemp. Math. Sciences*, 3(13), 605 – 614. http://m-hikari.com/ijcms-password2008/33-36-2008/kokenIJCMS33-36-2008.pdf

Margolinas, C. (1995). Dévolution et intitutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. Comiti, C.; Bessot, M. P. *Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, 342 – 347.

Robinet, J. (1983). De L´ingenierie Didactiques. *Les Cahiers Blancs*. 1(1), 1 – 11.

Siegmund-Schultze*, Reinhard.* (2009). *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact.* Princenton: Princenton University.

Autor:
Francisco Regis Vieira Alves
Doutor em Educação com enfase no ensino de Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Programa de Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM. Fortaleza/Brasil. Email: fregis@ifce.edu.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 107-125

Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em um ambiente não digital

Armênio Lannes Xavier Neto, Maria José Ferreira da Silva

Fecha de recepción: 02/05/2017
Fecha de aceptación: 05/08/2017

Resumen	Este artículo es un extracto de una actividad cuyo objeto fue o de estudiar el fenómeno de la génesis instrumental del artefacto simbólico función de una variable real definida por tramos que se desarrolló a través de una secuencia didáctica, junto a estudiantes de la enseñanza secundaria. El referencial teórico fue la Teoría de la Instrumentación desde la perspectiva de Pierre Rabardel y la metodología, los supuestos de la ingeniería didáctica Artigue. La transformación del artefacto una variable real definida por tramos en instrumento puede ser visto a través de la movilización de los esquemas de uso, de acción instrumentada y de acción colectiva instrumentada, que caracterizaron el fenómeno de la génesis instrumental. **Palabras clave:** Génesis Instrumental. Función de una Variable Real Definida por Tramos. Artefacto Simbólico.
Abstract	The present study is a clipping of an activity that was developed through a didactic sequence with Brazilian high school students whose objective was to study the phenomenon of the Instrumental Genesis of the symbolic artifact function of Piecewise Defined Functions. The theoretical reference used was the Theory of Instrumentation from the point of view of Pierre Rabardel and the methodology, the assumptions of Artigue didactic engineering. The transformation of the artifact function of a real variable with several sentences into an instrument can be verified through the mobilization of use schemes, instrumental action and instrumented collective action, characterizing thus the phenomenon of Instrumental Genesis. **Keywords** Instrumental Genesis. Piecewise Defined Functions. Symbolic artifact.
Resumo	O presente artigo é o recorte de uma atividade cujo objetivo foi estudar o fenômeno da Gênese Instrumental do artefato simbólico função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas. Ela foi desenvolvida por meio de uma sequência didática com alunos do ensino médio. O referencial teórico utilizado foi a Teoria da Instrumentação sob a ótica de Pierre Rabardel, e a metodologia foi embasada nos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue. A transformação do artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em instrumento pode ser constatada por meio da mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da Gênese Instrumental. **Palavras-chave**: Gênese Instrumental. Função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas. Artefato simbólico.

1. Introdução

Poucos estudos no âmbito da Educação Matemática que utilizam a Teoria da Instrumentação como referencial teórico ocupam-se do estudo da Gênese Instrumental de um artefato "fora" de ambientes tecnológicos, sobretudo o digital. Em consequência, é comum encontrarmos pesquisas que tratam, por exemplo, do ensino e/ou da aprendizagem de objetos matemáticos de Geometria utilizando os *softwares Cabri-3D*, ou *Geogebra*, ou ainda a calculadora no ambiente da Álgebra. No caso do Brasil, segundo Xavier Neto (2015, p.7), a "maioria das pesquisas utiliza como artefato *softwares* que envolvem o ensino e/ou aprendizagem de geometria".

Assim, neste artigo, propomos apresentar um estudo a respeito da Gênese Instrumental que utiliza o artefato simbólico, função definida por várias sentenças matemáticas, em ambiente não digital, com alunos do ensino médio. Entendemos que tal estudo é relevante em razão de termos encontrado apenas um trabalho que trata desse tipo de artefato. Segundo Xavier Neto (2015, p.7), no Brasil, "apenas uma pesquisa dedicou-se ao estudo da Gênese Instrumental de um artefato de caráter simbólico (não material) ". Trata-se do trabalho de Jesus (2012), que se ocupou do estudo do fenômeno da Gênese Instrumental da mediatriz de um segmento com professores envolvidos em um grupo de formação continuada.

De acordo com Rabardel (1995a; 1995b), um artefato é um dispositivo que tanto pode ser material (um lápis, um computador, ou um martelo), como simbólico (um gráfico, um método, ou até uma propriedade). Para o autor, a Gênese Instrumental é um processo complexo que está aliado às restrições e às potencialidades do artefato, bem como às atividades do sujeito. É a análise do processo da Gênese Instrumental o objetivo central do presente estudo, ou seja, com base nas ações dos sujeitos, espera-se compreender como o artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas transforma-se em instrumento na resolução de problemas.

Com relação aos aspectos metodológicos, o estudo se valeu de alguns pressupostos da Engenharia Didática de Artigue, com o intuito de validar a sequência preparada para a revisão do estudo sobre função de uma variável definida por várias sentenças matemáticas, trabalhadas no primeiro ano do Ensino Médio, porém com alunos do segundo e terceiro anos, visando verificar a ocorrência ou não da Gênese Instrumental nesse grupo de alunos. Dessa forma, o estudo buscou responder à seguinte questão: De que maneira ocorre a Gênese Instrumental da função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em alunos do 2º e 3º anos do ensino médio durante uma sequência de atividades?

A seguir, serão apresentados conjuntamente os aspectos teóricos e metodológicos do estudo.

2. Aspectos teóricos e metodológicos

O estudo teve como referência teórica a Teoria da Instrumentação proposta por Rabardel (1995a), e, como mencionado anteriormente, deteve-se em particular, no fenômeno da Gênese Instrumental.

2.1 Teoria da Instrumentação

De acordo com Gueudet &Trouche (2009, p.3, tradução nossa) "a abordagem instrumental foi proposta por Rabardel e teve como mote principal atender as necessidades da Educação Matemática com relação ao uso das tecnologias, especialmente as digitais".

Segundo Artigue (2002, p.246, tradução nossa), "buscaram-se então, pesquisas que fizessem abordagens em processos de aprendizagem dentro de ambientes tecnológicos, a fim de compreender melhor esse fenômeno". Assim, foram localizados trabalhos no âmbito da Ergonomia Cognitiva[1], realizados por Rabardel e Verillon, por meio da Teoria da Instrumentação e de processos tecnológicos complexos dedicados à formação de pilotos de aviões.

No centro da abordagem instrumental, destaca-se o fenômeno da Gênese Instrumental, processo em que um artefato utilizado como meio de ação por parte do sujeito transforma-se progressivamente em instrumento. Para Rabardel (2011), dois conceitos são fundamentais para a compreensão da Gênese Instrumental: o artefato e o instrumento. Um artefato está ligado ao que se pensava definir como ferramenta e possui um caráter neutro. O artefato está

> conectado ao uso que o sujeito faz como meio para sua ação e que pode ser considerado como uma máquina, um objeto técnico, objetos e sistemas simbólicos, ou seja, que pode ser definido como material ou simbólico. (Rabardel, 2011, pp. 49-52, tradução nossa).

Uma calculadora, por exemplo, pode ser concebida como um artefato material. Mas o artefato também pode ser simbólico, e é exatamente esse entendimento que nos interessa, pois, no âmbito da Teoria da Instrumentação e de acordo com a definição proposta por Rabardel, a função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas pode ser entendida como um artefato simbólico: "os artefatos serão considerados instrumentos materiais ou simbólicos" (Rabardel 2002, p. 18, tradução nossa). Para tanto, apoia-se no conceito antropológico em que o mesmo designa qualquer coisa que tenha sofrido uma transformação, ainda que mínima, de origem humana. Segundo o autor citado, "o artefato não restringe seu significado às coisas materiais (do mundo físico), podendo também ser aplicado a sistemas simbólicos" (Rabardel 2002, p.39, tradução nossa). Por sua vez "um instrumento consiste de uma entidade mista formada por um artefato e um esquema, e também é uma construção produzida pelo sujeito" (Rabardel 2011, pp. 49-52, tradução nossa).

A Teoria da Instrumentação se apoia na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, da qual utiliza a noção de esquema. Segundo Vergnaud, um esquema é

> a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas. É nos esquemas que se devem investigar os conhecimentos em ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que essa ação seja operatória. (Vergnaud, 1990, p.134, tradução nossa).

A Teoría dos Campos Conceituais considera o invariante operatório o que permite ao sujeito realizar uma conexão entre teoria e prática, pois nele repousa a operacionalidade dos esquemas. São dois os elementos constituintes dos invariantes operatórios,

---

[1] Ergonomia cognitiva, é a disciplina científica que visa a compreensão fundamental das interações entre os seres humanos e os outros componentes de um sistema, e a profissão que aplica princípios teóricos, dados e métodos com o objetivo de otimizar o bem-estar das pessoas e o desempenho global dos sistemas. (FALSON 2007, p.7 *apud* JESUS 2012, p.27).

> os teoremas em ação (invariantes do tipo “fazer propostas”), que são as proposições elaboradas pelo sujeito e consideradas como verdadeiras sobre o real, e os conceitos em ação (invariantes do tipo “função proposicional” e do tipo “argumento”), que são uma categoria do pensamento considerada como válida pelo mesmo sujeito. (Vergnaud, 1990, pp.136-139, tradução nossa).

Os esquemas relacionados com a utilização de um artefato são chamados esquemas de utilização e fazem referência a duas dimensões da atividade:

> As atividades relacionadas com as tarefas secundárias, ou seja, a gestão das características e propriedades particulares do artefato, e as atividades primárias (principais), as que estão orientadas ao objeto da atividade em que o artefato é um meio de realização. (Rabardel, 2011, p.171, tradução nossa).

Os esquemas de utilização são relativos às tarefas secundárias. No caso de um artefato simbólico, caso deste estudo, o esquema de uso teria a função de orientar o sujeito no sentido de encontrar solução de tarefas específicas inerentes ao artefato.

Os esquemas de ação instrumentada estão relacionados com a meta de operar transformações sobre o objeto em atividade e incorporam como componentes os esquemas de uso:

> O que os caracteriza é o fato de que são relativas às tarefas primárias. Constituem o que Vygostsky chamava de “atos instrumentais”, para os quais há uma recomposição da atividade dirigida até a tarefa principal do sujeito. Os esquemas primários (esquemas de uso) constituem, segundo a terminologia de Cellerier, módulos especializados que se coordenam uns com os outros e também com outros esquemas, se assimilam e se acomodam reciprocamente, para constituir os esquemas de ação instrumentada. (Rabardel, 2011, p.172, tradução nossa).

Portanto, a Gênese Instrumental é o processo em que o sujeito está envolvido em uma determinada ação, utiliza uma ferramenta chamada artefato e acrescenta a ele seus conhecimentos, transformando-o em instrumento.

Tal processo possibilita uma observação nos dois polos da entidade instrumental: o artefato e os esquemas de utilização. Esses dois polos são denominados dimensões do fenômeno da Gênese Instrumental e, de acordo com Rabardel (2011, p. 204, tradução nossa), são chamados de “instrumentalização, quando orientado ao artefato, e de instrumentação quando relativo ao sujeito”

Os processos de instrumentalização se referem ao surgimento e à evolução dos componentes artefato do instrumento e fator de enriquecimento das propriedades do artefato por parte do sujeito. Sendo relativo ao polo artefato, baseia-se em suas características e propriedades intrínsecas, o que lhe dá um *status* em função da ação que está em curso. Essas propriedades podem, ainda segundo Rabardel (2011, p.217, tradução nossa), “conservar o *status* de função que adquiriram, constituindo-se para o sujeito uma característica, uma propriedade permanente do artefato”

Dois níveis são considerados no processo de instrumentalização. O primeiro tem uma característica local, ou seja, o artefato é instrumentalizado momentaneamente. No segundo nível, a função adquirida se conserva de maneira durável como propriedade do artefato, portanto a instrumentalização é durável ou permanente.

Os processos de instrumentação são relativos ao sujeito e, segundo Rabardel,

> o descobrimento progressivo que os sujeitos realizam das propriedades (intrínsecas) do artefato é acompanhado da acomodação de seus esquemas, mas também de mudanças de significado do instrumento, que resultam da associação do artefato com novos esquemas. (Rabardel, 2011, p.211, tradução nossa).

Esses dois processos, portanto, contribuem solidariamente para o surgimento e a evolução dos instrumentos, embora "a situação de algum deles possa desenvolver-se mais, ser dominante, e inclusive ser o único que se apresente"[2] Rabardel (1995a, p. 112, tradução nossa).

2.2 Aspectos metodológicos

A metodologia utilizada no estudo apoiou-se nos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue, que como uma metodologia de investigação caracteriza-se, fundamentalmente, como um esquema experimental que está baseado em relações didáticas realizadas em classe e, mais especificamente, sobre a concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino.

De acordo com Artigue (1995, p.37, tradução nossa), "a Engenharia Didática está voltada ao registro dos estudos de caso e sua validação é, em essência, interna, baseada na confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*". A confrontação dessas duas análises com o referencial teórico possibilitou a discussão dos dados produzidos e permitiu responder à questão da pesquisa. Dessa forma, nesse artigo analisaremos uma atividade da sequência em que o artefato foi a função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas, como, especificamente, se segue.

Os dados foram coletados por meio de gravação de áudio e vídeo. A escolha dos sujeitos recaiu sobre discentes cursando o segundo e o terceiro anos do ensino médio, pois desejou-se que a escolha incidisse sobre os que já tivessem tido contato com o conceito em anos anteriores, já que objetivo institucional era revisar temas matemáticos tratados especialmente no primeiro ano do ensino médio. No total, quinze alunos fizeram inscrição para participar das oficinas propostas. A atividade foi organizada para dois encontros, um realizado em maio e outro em junho de 2015, com duração de 100 minutos cada um, sem interrupções. No primeiro encontro, os alunos organizaram-se, sem interferências externas, formando seis duplas e um trio. Desses grupos escolhemos para o estudo da Gênese Instrumental apenas o trio, por considerar que havia maior possibilidade de interação entre os sujeitos. No que segue, apresentamos, resumidamente, algumas considerações e a definição do artefato que utilizaremos neste artigo.

---

[2] *Dans le processus d'instrumentation elle est tournée vers le sujet lui-même, alors que dans le processus corrélatif d'instrumentalisation, elle est orientée vers la composante artefact de l'instrument. Les deux processus contribuent solidairement à l'émergence et l'évolution des instruments, même si, selon les situations, l'un d'eux peut être plus développé, dominant, voire seul mis en oeuvre*. (Rabardel, 1995a, p.112).

3. A função de uma variável real definida com várias sentenças matemáticas

O conceito de função é, segundo Ponte (1992, p.3, tradução nossa), “considerado como um dos mais importantes em toda a Matemática”, tornando-se central em seu desenvolvimento e, de acordo com Rossini (2006, p.58), “as funções definidas por mais de uma sentença tiveram um papel importante na história do conceito de função”.

Chumpitaz (2013, p.44, tradução nossa) afirma que Euller, discípulo de J. Bernoulli (1667-1748), sugeriu uma forma analítica para o conceito de função com várias sentenças matemáticas, sem “deixar clara, entretanto, a maneira como se devem constituir essas funções a partir da variável independente”.

As definições atualmente aceitas, entretanto, estão baseadas nas contribuições de Dirichlet, especificamente em relação a uma definição formal para função de várias sentenças matemáticas. De acordo com Chumpitaz, inicialmente

> fixamos uma família de funções $F \subset \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, que denominaremos funções básicas e uma família Y de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}, Y \subset P(\mathbb{R})$. Definição: Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma função definida por sentenças se existe uma família de funções $\{f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ na forma $f_i = |_{A_i}$, onde $f \in F\ e\ A_i \in Y, i \in I$, onde *I* é um conjunto de índices enumeráveis, de modo que:
>
> I. $f(x) = f_i\ se\ x\ \in A_i, i \in I$ (propriedade da regra por sentenças);
> II. $A = U_{i \in I} A_i$ (propriedade do domínio);
> III. $A_i \cap a_j = \emptyset$ para $i, j \in I, i \neq j$ (propriedade da não sobreposição) e
> IV. Dados $i, j \in I, i \neq j, f_i = f|A_i, f_i = g|A_j com\ f, g \in F, tem\ que\ f \neq g$ (propriedade da não redundância). (Chumpitaz, 2013, p.45, tradução nossa).

A evolução dos teoremas e conceitos-em-ato, elaborados pelos sujeitos durante a resolução das atividades propostas envolvendo o artefato, permite operacionalidade aos esquemas de utilização e possibilita compreender de que maneira ocorre a Gênese Instrumental.

4. Discussão da sequência

Neste tópico descrevemos a aplicação da sequência, os sujeitos da pesquisa e, na sequência, as análises dos dados coletados.

4.1 Descrição da aplicação das atividades

A atividade escolhida para ser objeto da sequência didática foi idealizada por Almouloud e adaptada do exercício número 5 da *Colletion Mathématiques* IPN, 9[e] *année,* (1991), Rep. De Mali, pp. 157, *HATIER Librairie*, que trata do conceito de função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas. Como o presente artigo trata de um recorte do estudo original, evidenciaremos aqui apenas algumas de suas partes. Os objetivos da atividade serão detalhados na análise a *priori.*

A atividade foi subdividida em sete partes: as quatro primeiras foram realizadas no primeiro encontro, e as três outras, no seguinte. Na atividade foi possível observar a construção de funções de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas, por meio da utilização de alguns conteúdos matemáticos, cujo contexto foi a Geometria Plana, como apresentado no Quadro 1.

	Conteúdo matemático existente na atividade	**Possíveis esquemas de utilização mobilizados**
Atividade (Partes 1, 2 e 3)	Figura geométrica plana do quadrado, triângulo, trapézio e losango: características e propriedades. Área de figuras planas do quadrado, triângulo, trapézio e losango. Conceitos básicos de geometria analítica e de trigonometria. Funções, Domínio, Imagem, Intervalo e Estruturas Aditivas e Multiplicativas. Construção de gráfico.	As noções de função, segmento, do quadrado, triângulo e trapézio e as medidas de suas áreas. Domínio, Imagem e Intervalo. Noção de seno de um ângulo. Construção de gráfico de uma função.

Quadro 1. Detalhamento da atividade.

A seguir, serão descritas as análises das atividades feitas *a priori* e *a posteriori*.

Inicialmente trataremos conjuntamente as partes 1 (a) e 2 (a) que têm como foco o deslocamento do ponto M apenas em AB e BC [3], lados de um quadrado e de um retângulo. Isso corresponde, portanto, ao primeiro e ao segundo deslocamento do ponto M nas referidas figuras planas. Em seguida, faremos uma análise das sentenças matemáticas formadas, correspondentes a todo o deslocamento do ponto M nas duas figuras. De maneira similar, abordaremos a parte 3 (a) da atividade, quando o ponto M percorre apenas AB e BC na figura de um losango, e as sentenças matemáticas que foram construídas pelos sujeitos.

As análises *a priori* e *a posteriori* serão apresentadas respeitando o recorte da atividade original mencionado anteriormente e serão apresentadas na sequência, precedidas da apresentação dos sujeitos da pesquisa e da descrição das atividades.

4.2 Os sujeitos da pesquisa

Os nomes empregados nesta pesquisa são fictícios e servem apenas para o propósito de identificação, enquanto que a série cursada pelos sujeitos corresponde à realidade. Dessa forma, o trio de alunos mencionado no capítulo dos Aspectos Metodológicos foi formado conforme segue.

João, aluno do 2o ano, estudou em Portugal até o final do ensino fundamental segundo ciclo. Ingressou na instituição no primeiro ano do ensino médio. Maria, aluna do 3o ano, estuda na instituição desde o 6o ano do ensino fundamental segundo ciclo, e José, aluno do 3o ano, ingressou na instituição no 1o ano do ensino médio, tendo cursado o ensino fundamental em outra escola privada de porte médio da cidade de São Paulo.

4.3 Análise *a priori* da Atividade

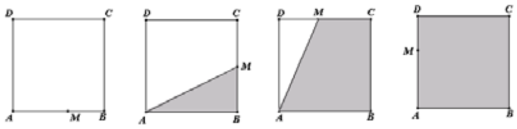
[3] Um segmento de reta cujos extremos são A e B é indicado por $\overline{AB}$. A medida de um segmento $\overline{AB}$ é indicada por AB.

Durante as análises *a priori,* foram apresentadas as atividades, acompanhadas de sua discussão prévia, baseadas nos referenciais teóricos relacionados à função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas.

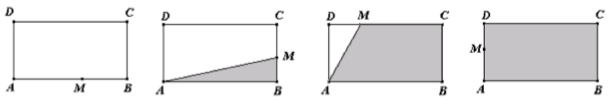
ATIVIDADE

Parte 1. Um ponto M se desloca sobre o lado de um quadrado ABCDA onde cada lado meça 4 u.m. (figura abaixo). Designamos como x (em cm) a medida referente ao comprimento do trajeto de A até M.

a) Expresse a área a(x) da parte colorida, segundo a posição do ponto M;
b) Represente graficamente a aplicação correspondente.



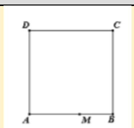
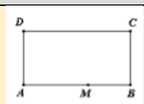
Parte 2. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão e considere ABCD como sendo um retângulo de comprimento 4 e largura 2, conforme a figura abaixo.



Parte 3. Retome as mesmas tarefas dadas na primeira questão e considere ABCD como sendo um losango cujos lados medem 4 u.m e o ângulo $\hat{C}$ = 60º.

Figura 1. Função definida por várias sentenças matemáticas formada pela parte 3 (a).
Fonte: Xavier Neto (2016).

Nas partes 1 (a) e 2 (a) da atividade, o ponto M irá percorrer inicialmente AB, do quadrado em 1 (a), ou do retângulo em 2 (a), não havendo assim área formada. As partes 1 (a) e 2 (a) ocorreram no encontro 1. Espera-se que os sujeitos mobilizem as propriedades da função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas e construam uma dinâmica de solução similar à do quadro 2:

Parte 1 (a)		Parte 2 (a)	
Deslocamento do ponto M	Ação esperada	Deslocamento do ponto M	Ação esperada
	Enquanto M pertencer a AB, a(x) = 0, pois não há área e isso ocorre quando $0 \leq x \leq 4$.		Enquanto M pertencer a AB, a(x) = 0, pois não há área e isso ocorre quando $0 \leq x \leq 4$.

Quadro 2. Parte 1(a) e 2(a) – Primeiro deslocamento do ponto M.

Inicialmente, um esquema a respeito da noção de função deveria ser mobilizado pelos sujeitos. Provavelmente, não surgirão dificuldades em identificar a lei da função, em razão do enunciado corroborar nessa direção. A partir de então, será possível compreender o contexto da atividade no âmbito da lei da função. Isso por certo auxiliará na percepção de que o deslocamento de posição do ponto M em AB não formará área.

A mobilização em torno de um esquema de utilização referente à noção de segmento poderá contribuir positivamente para alcançar esse objetivo.

Posteriormente, em face da construção mencionada a respeito do esquema de utilização para o esquema da noção de função, parece plausível afirmar que a sentença a ser formada está associada a não formação de área. Essa mobilização levará os participantes a fazer uso das propriedades de domínio que definem matematicamente a função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas. Esse objetivo deve ser alcançado mediante a utilização do esquema referente ao conceito matemático de intervalo e de domínio. É esperado, então, que seja construída a seguinte sentença: 0, se $0 \leq x \leq 4$.

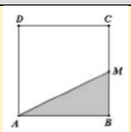
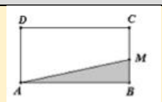
As noções de domínio e intervalo podem representar dificuldades para os sujeitos nessa etapa. No quadro 3, são resumidos os possíveis esquemas de utilização que poderão ser mobilizados, empregados nessa situação.

Parte 1 (a)	Parte 2 (a)
Esquemas de utilização mobilizados	Esquemas de utilização mobilizados
Noções de função, segmento, quadrado e medida de sua área, intervalo, domínio.	Noções de função, segmento, quadrado e medida de sua área, intervalo, domínio.

Quadro 3. Esquemas de utilização usados na Parte 1 (a) e 2 (a) – Primeiro deslocamento do ponto M.

A seguir, o ponto M irá percorrer BM, do quadrado em 1 (a), ou do retângulo em 2 (a), havendo a formação da área de um triângulo em ambos os casos.

Se os sujeitos estiverem instrumentalizados em relação ao artefato, é esperada a construção de uma solução similar à apresentada no Quadro 4:

Parte 1 (a)		Parte 2 (a)	
Deslocamento do ponto M / Ação esperada		Deslocamento do ponto M / Ação esperada	
 Quando M estiver em BC , é possível que os sujeitos observem que a área varrida por AM pode ser expressa pela área do triângulo retângulo	formado por AB e BM, ou seja, $\frac{AB\ BM}{2}$. Portanto, $a\ (x) = \ 2x - 8$ no intervalo 4 < x ≤ 8.	 Quando M estiver em BC , é esperado que observem que $x = AB + BM$ e que a área varrida por AM pode ser expressa pela área do triângulo retângulo	formado por AB e BM, ou seja, $\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{2}$. Portanto, $a\ (x) = \ 2x - 8$ no intervalo 4 < x ≤ 6.

Quadro 4. Parte 1(a) e 2(a) – Segundo deslocamento do ponto M.

Nessa etapa, tanto para o quadrado como para o retângulo, os sujeitos deveriam mobilizar os esquemas de utilização mencionados no Quadro 5, como segue:

Parte 1 (a)	Parte 2 (a)
Esquemas de utilização mobilizados	Esquemas de utilização mobilizados
Noções de função, segmento, triângulo e medida de sua área, domínio e intervalo.	Noções de função, segmento, triângulo e medida de sua área, domínio e intervalo.

Quadro 5. Esquemas de utilização usados na Parte 1 (a) e 2 (a) – Segundo deslocamento do ponto M.

Os esquemas de utilização mobilizados deveriam ser os mesmos da etapa referente ao primeiro deslocamento do ponto M, acrescidos do triângulo e sua área, que poderão favorecer, por meio do cálculo das medidas das áreas, a construção da sentença $a\ (x) = \ 2x - 8$, no intervalo 4 < x ≤ 8 para o quadrado, e $a\ (x) = \ 2x - 8$, no intervalo 4 < x ≤ 6 para o retângulo. Ao fazer essa mobilização, poderiam utilizar as propriedades de domínio que definem matematicamente o artefato. Aqui, como anteriormente, é possível que os sujeitos enfrentem alguma dificuldade em mobilizar as noções de domínio e intervalo na construção dos limites da sentença.

Por fim, as sentenças matemáticas formadas após os deslocamentos do ponto M por $AB, BC, CD\ e\ DA$ deveriam ser construídas da seguinte maneira, conforme o quadro 6.

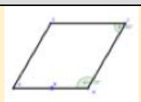
Parte 1 (a)	Parte 2 (a)
$a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8, & 4 < x \leq 8 \\ 2x - 8, & 8 < x \leq 12 \\ 16, & 12 < x \leq 16 \end{cases}$	$a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8, & 4 < x \leq 6 \\ x - 2, & 6 < x \leq 10 \\ 8, & 10 < x \leq 12 \end{cases}$

Quadro 6. Função definida por várias sentenças matemáticas formada pelas partes 1 (a) e 2 (a).

Ao fazer a construção das sentenças matemáticas, o sujeito estará utilizando todas as propriedades que definem matematicamente o artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas de acordo com Chumpitaz (2013).

Nos deteremos, a partir de agora, nas análises *a priori* da partes 3 (a) da atividade, que tratará do deslocamento do ponto M na figura plana do losango, sendo que o enunciado trará a informação a respeito de um ângulo de 60º entre seus lados. Cabe mencionar que essa parte da atividade ocorreu em um segundo encontro com o grupo de sujeitos.

De maneira similar às partes anteriores, o ponto M irá percorrer inicialmente AB (primeiro deslocamento do ponto M) do losango. Os sujeitos deveriam, então, construir uma solução similar ao encontrado no quadro 7:

Parte 3 (a) – Primeiro deslocamento do ponto M.	
Deslocamento do ponto M / Ação esperada	
	Enquanto M pertencer AB, a (x) = 0, pois não há área, e isso ocorre quando 0 ≤ x ≤ 4.

Quadro 7. Parte 3 (a). – Primeiro deslocamento do ponto M.

A situação é similar ao que anteriormente foi proposto, ou seja, que os sujeitos mobilizem um esquema de utilização a respeito da noção de função.

O enunciado do problema é de caráter fechado e pode auxiliar nessa mobilização, aliado ao fato de que as partes anteriores da atividade tiveram as mesmas caraterísticas. Neste caso, não há ilustração; os sujeitos deveriam construir o esboço da figura levando em conta as medidas dos lados e o ângulo formado entre os mesmos e, depois, construir a sentença a(x)=0, 0 ≤ x ≤ 4 .

A mobilização dos esquemas de utilização deveria ser similar às partes anteriores da atividade, como apresentado no Quadro 8.

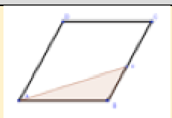
Parte 3 (a) – Primeiro deslocamento do ponto M.
Esquemas de utilização mobilizados

Noções de função, segmento, losango e medida de sua área, intervalo e domínio.

Quadro 8. Esquemas de utilização usados na parte 3 (a) – Primeiro deslocamento do ponto M.

É possível que os sujeitos não tenham dificuldades em identificar a função, em razão do enunciado corroborar nessa direção e, como mencionado, a parte 3 (a) da atividade possuir um caráter similar ao das etapas anteriores ocorridas no encontro 1.

Em um segundo momento da parte 3 (a), o ponto M irá percorrer BM (segundo deslocamento do ponto M) da figura que representa o losango, ocorrendo a formação da área de um triângulo. Se os sujeitos estiverem instrumentalizados em relação ao artefato, é possível que haja construção de uma solução similar à do Quadro 9:

Parte 3 (a) – Segundo deslocamento do ponto M.	
Deslocamento do ponto M / Ação esperada	
	Quando M percorre BC, a área varrida é representada por um triângulo com um dos ângulos igual a 120°, valendo a relação $\frac{1}{2}AB\ BM\ \mathrm{sen}\,120$. Nesse sentido, é possível encontrar a relação $a\ (x) =\ \sqrt{3}$ (x – 4) para o intervalo 4 < x ≤ 8.

Quadro 9. Parte 3 (a) – Segundo deslocamento do ponto M.

Portanto, os sujeitos deveriam mobilizar os esquemas de utilização mencionados no Quadro 10:

Parte 3 (a) – Segundo deslocamento do ponto M.
Esquemas de utilização mobilizados
Noções de função, segmento, triângulo e medida de sua área, domínio, Intervalo, ângulo e seno.

Quadro 10. Esquemas de utilização usados na parte 3 (a) – Segundo deslocamento do ponto M

Os esquemas mobilizados envolvem a noção do triângulo e sua área, que poderão favorecer, por meio do cálculo das áreas, a construção da sentença $a\ (x) = \sqrt{3}$ (x – 4) para o intervalo 4 < x ≤ 8. Ao fazer essa mobilização, poderão utilizar as propriedades de domínio que definem matematicamente o artefato.

É possível que os sujeitos enfrentem alguma dificuldade com as noções de domínio e intervalo na construção dos limites da sentença e na mobilização do esquema referente ao seno de um ângulo. Esse problema inclui a necessidade de mobilizar conceitos básicos de trigonometria para o cálculo da área, portanto o esquema referente à noção de ângulo deverá ser mobilizado.

Finalmente, as sentenças matemáticas formadas deverão ser construídas da seguinte maneira:

Parte 3 (a)
$a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{3}\ (\mathrm{x} - 4), & 4 < x \leq 8 \\ \sqrt{3}\ (\mathrm{x} - 4), & 8 < x \leq 12 \\ 8\sqrt{3}\,, & 12 < x \leq 16 \end{cases}$

Quadro 11. Função definida por várias sentenças matemáticas formada pela parte 3 (a)**.**

4.4 *Análise a posteriori* da Atividade

As análises a *posteriori* obedeceram a seguinte estrutura: 1º) relato das ações produzidas pelos sujeitos, por meio dos diálogos e soluções que eventualmente tenham sido produzidas; 2º) análise das ações e confrontação dos dados obtidos com as análises prévias.

Com relação ao encontro 1, foi observado que os três sujeitos se envolveram com grande intensidade no processo de resolução da atividade. Eles realizaram as atividades individualmente, e, em outro momento do trabalho, debateram suas construções.

Os pesquisadores puderam observar que, decorridos aproximadamente 15 minutos do início da atividade do encontro 1, João passou a construir individualmente as sentenças matemáticas. Após a verificação de que os sujeitos tinham elaborado suas resoluções, passou-se a um debate acerca das mesmas.

Pesquisador: O que vocês puderam perceber? Vamos debater as atividades?

Maria: Que é possível dividir as expressões da área pintada em variantes. 1º: Quando M ∈ AB; 2º quando M ∈ BC. Quando M ∈ AB, a área pintada é nula, então a(x) = 0.

Pesquisador: O que isso representa para vocês?

Maria: Para mim, representa a área. A área é a medida da superfície. Calculei a área, que, no caso resulta zero.

Figura 2. Maria, parte 1 (a) - primeiro deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

José: Eu calculei a área também, como a atividade solicitou.

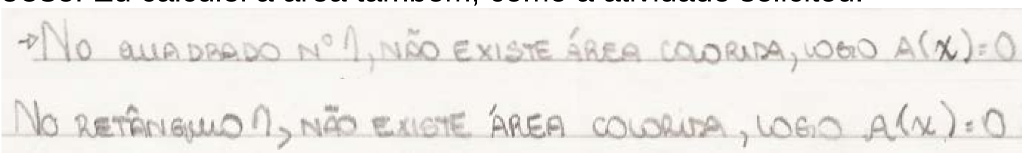


Figura 3. José, partes 1 (a) e 2 (a) - primeiro deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

João: Essa atividade é sobre função de várias sentenças matemáticas, nós vimos isso no ano passado. Cada área dessas figuras representa uma sentença da função. No primeiro quadrado e no primeiro retângulo, não tem nenhuma área, porque o ponto está se deslocando só em AB. Eu também pensei assim. A área é a sentença e ela tem valor igual a zero.

José: No quadrado 1, não existe área colorida, logo a(x) = 0 cm^2? Não lembro dessa função, João.

José: Como você continuou, Maria?

Maria: Quando M ∈ BC, a área depende da distância entre B e M. E da distância entre A e M. Eu calculei a área assim:

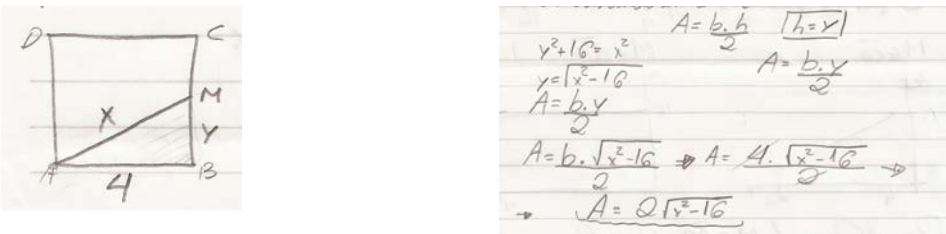


Figura 4. Maria, partes 1 (a) e 2 (a) - segundo deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

João: O triângulo está ok, Maria, mas pensei da seguinte forma:

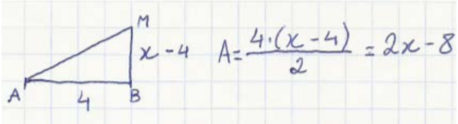


Figura 5. João, parte 1 (a) - segundo deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

José: Pensei como você Maria, também usei Pitágoras.

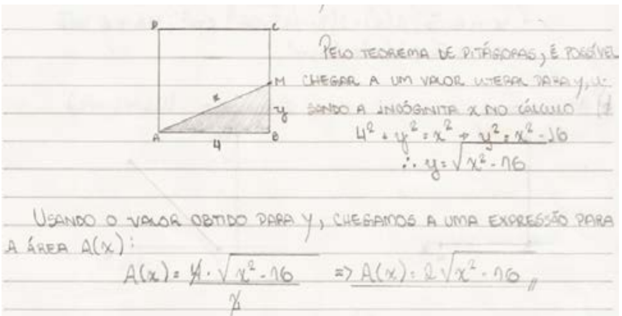


Figura 6. José, partes 1 (a) e 2 (a) - segundo deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

João: Vocês não perceberam que em BC, no quadrado, vocês precisam diminuir 4 de alguma coisa, e no retângulo 2, porque a largura vale 2. Essa coisa é X. Então a área é outra. Além disso, no primeiro deslocamento do ponto M sobre AB, não há área. Então, a 1ª equação da função das duas figuras que corresponde a esse primeiro deslocamento é 0, se $0 \leq x \leq 4$.

José: Então a segunda equação é 2x – 8, como você falou João? E no retângulo?

Maria: Eu errei, então! Pensei em área e resolvi assim:

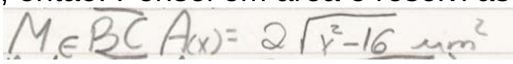


Figura 7. Maria, parte 1(a) - segundo deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

José**: Eu vi o intervalo, mas não vi o x – 4 e x -2:**

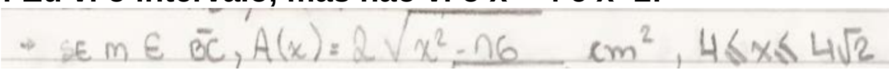


Figura 8. José, parte 1(a) - segundo deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

Na confecção das sentenças matemáticas, os sujeitos continuaram debatendo suas construções a partir de resoluções individuais, que passaram a ser confrontadas e debatidas coletivamente. Dessa forma, foi possível perceber que os sujeitos chegaram a um consenso a partir da construção proposta por João:

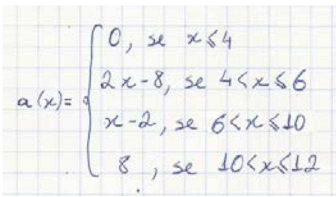


Figura 9. João, sentenças matemáticas da parte 1 (a).
Fonte: Xavier Neto (2016).

Maria: Eu achei que devia calcular somente as áreas. No retângulo também fiz assim:

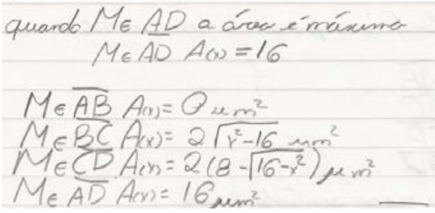


Figura 10. Maria, medidas de áreas para parte 2 (a).
Fonte: Xavier Neto (2016).

João: Você achou que era para calcular só as áreas?

Maria: Sim, eu não vi que tinha que relacionar ou fazer sentenças.

José: Errei os cálculos, mas vi que era função com as sentenças.

João: O retângulo tem essas sentenças:

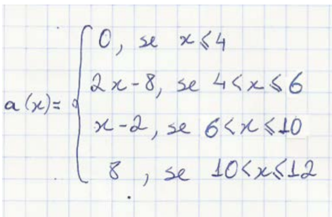


Figura 11. João, sentenças matemáticas da parte 2 (a).
Fonte: Xavier Neto (2016).

Todos concordam?

Maria: Eu não vi assim, não enxerguei essa relação.

José: Ok para mim.

Observando os diálogos entre os sujeitos, as ações produzidas e analisando o referencial teórico, é possível inferir que João está instrumentalizado em relação ao artefato. Além disso, tal constatação nos leva também a inferir que a técnica utilizada por João para identificar a função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas funciona como um esquema de ação instrumentada.

Como os três alunos tiveram a possibilidade de estudar o conteúdo função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas durante o primeiro ano do ensino médio, as ações de João indicam que sua instrumentalização se configura como durável, caracterizando o segundo nível do processo da Gênese Instrumental, porque mobilizou propriedades matemáticas do objeto, indicando sua aprendizagem. Isso ocorreu quando ele mobilizou a lei de formação da função definida por pelo menos duas sentenças matemáticas correspondentes, e outra primeira propriedade, referente às sentenças matemáticas, definidas em diferentes partes do domínio.

Por outro lado, João continuou a instrumentalizar-se, pois mobilizou os esquemas de uso (já existentes) de conteúdos matemáticos que o ajudaram a encontrar soluções para as atividades que foram propostas. Isso ocorreu quando mobilizou os esquemas de utilização referentes à noção de domínio restringido pelo intervalo. Essa situação enfrentada por João vai ao encontro das conclusões elaboradas no estudo de Oliveira (1997), que observou as dificuldades encontradas pelos alunos em estabelecer o domínio de funções com mais de uma expressão algébrica.

Pode-se afirmar que Maria não está instrumentalizada em relação ao artefato, pois não conseguiu mobilizar a 1ª propriedade a respeito da lei de formação das matemáticas, ou ainda de que essas estão definidas pelo domínio da função. Pode-se dizer que as noções prévias de Maria a respeito das propriedades matemáticas do artefato aparentaram ser superficiais, porque ela tratou as partes 1 (a) e 2 (a) da atividade, de maneira não conectada. Maria também teve dificuldades em mobilizar outros esquemas que faziam parte da atividade, tais como noção de segmento, intervalo e domínio e que eram necessários para a sua resolução. De acordo com Artigue, (2002, p.14, tradução nossa), “o entrelaçamento dos conhecimentos matemáticos básicos, aliado aos conhecimentos do artefato”, é necessário para que se produza a construção de uma atividade. É possível que as partes 1 (a) e 2 (a) da atividade tenham possibilitado a evolução de esquemas de uso e de ação instrumentada e, eventualmente, favorecido a assimilação do artefato a esquemas já constituídos. O debate a respeito das duas atividades pode ter produzido instrumentação por meio dos esquemas de atividade coletiva instrumentada, o que necessitará ser avaliado nas atividades seguintes.

Por outro lado, as dificuldades de Maria em mobilizar conhecimentos matemáticos dificultaram essa evolução, indo ao encontro do que observa Gomes (2008, p.57): “o processo de Gênese Instrumental relativo à instrumentação requer a mobilização de conhecimentos matemáticos. ”

Com relação a José, foi possível observar que ele não desenvolveu ou mobilizou os mesmos esquemas de utilização que Maria. Ele mobilizou a propriedade do artefato, referente às sentenças matemáticas estarem definidas em diferentes partes do domínio, mas não o fez corretamente com relação à lei de formação da função. Além disso, é possível inferir que o conjunto formado pelas atividades e o debate a respeito das soluções que foram objeto de debate entre os três sujeitos possam tê-lo instrumentalizado em relação ao artefato momentaneamente. Portanto, assume-se que, para ele, com relação a essa atividade, de acordo com Gomes (2008, p.14) “por meio de adaptações progressivas dos esquemas mentais a novas situações”, seja possível entender melhor o desenvolvimento de sua Gênese Instrumental na atividade seguinte ocorrida no encontro 2.

Quanto à atividade da parte 3 (a) ocorrida no encontro 2, os sujeitos procederam de maneira idêntica à do encontro anterior, ou seja, elaboraram individualmente suas soluções e, em seguida, debateram a atividade. Segue o diálogo.

João: Posso começar?

Maria: Gostaria de iniciar, João!

João: Tudo bem, Maria.

Maria: A primeira sentença é fácil, pois me lembro da atividade da outra oficina. Os domínios também: $0 \leq x \leq 4$.

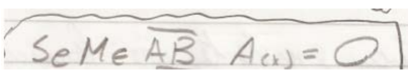


Figura 12. Maria, parte 3 (a) – primeiro deslocamento do ponto M.
Fonte: Xavier Neto (2016).

José: Ok Maria, também fiz assim!

João: Minhas sentenças ficaram assim:

$$a(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 4 \\ (x-4)\sqrt{3}, \text{ se } 4 < x \leq 12 \\ 8\sqrt{3}, \text{ se } 12 < x \leq 16 \end{cases}$$

Figura 13. João, sentenças matemáticas da parte 3 (a).
Fonte: Xavier Neto (2016).

Novamente o debate teve como centro as construções propostas por João. Após isso, os sujeitos debateram a atividade, chegando a um consenso envolvendo as quatro sentenças matemáticas que constituíram, como pode ser observado a seguir.

Maria: Falta uma equação João, você não acha? O ponto M se move por quatro segmentos até a área do losango ser total.

José: Parece ser igual às atividades da oficina passada. Eu achei que eram três sentenças, porque o enunciado agora menciona ABCD. Na atividade da aula passada, era ABCDA.

Maria: Mas aí não faria sentido, José!

José: Pode ser. Mas tive dúvida com o enunciado.

João: Sim, são quatro sentenças, porque o ponto M percorre todos os segmentos do losango.

Os sujeitos continuaram debatendo até chegarem corretamente à conclusão de que se tratavam de 4 sentenças matemáticas.

As ações de João, novamente, evidenciaram o caráter durável de sua instrumentalização, ou seja, o segundo nível de dimensão da Gênese Instrumental, já que a função adquirida se conservou da atividade anterior como propriedade do artefato. Durante a ação, ele mobilizou as propriedades matemáticas da lei de formação da função, definida por pelo menos duas sentenças matemáticas correspondentes, e outra, referente às mesmas, estando definidas em diferentes partes do domínio.

O debate no grupo possibilitou que João continuasse a instrumentalizar-se, na medida em que agregou novos esquemas. O momento da discussão a respeito da sentença do terceiro deslocamento do ponto M tornou isso claro. A função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas é um instrumento com relação a esse sujeito, evidenciada por suas ações apresentadas nas atividades desenvolvidas.

Maria começou a parte 3 (a) da atividade percebendo que se tratava de uma função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas, pois mobilizou esquemas já existentes, criados na atividade anterior. Ao fazê-lo, foi possível levantar a possibilidade de que o processo de instrumentalização estivesse em curso, já que estava criando esquemas de uso com relação ao artefato. Maria descobriu as potencialidades do uso desse artefato, explorando-o e apropriando-se de seus recursos, portanto evoluiu de esquema de ação instrumentada para esquema de uso.

Nessa dimensão da Gênese Instrumental, o sujeito pode considerar situações em outros contextos com os artefatos, construindo novas relações, de maneira a explorá-las ou elaborá-las por imitação.

É possível inferir também que essa descoberta foi progressiva, o que, em tese, evidencia o processo de instrumentalização, que por sua vez, de acordo com Rabardel (2011, p. 211, tradução nossa), "é acompanhado da acomodação de seus esquemas, mas também de mudanças de significado do instrumento que resultam da associação do artefato com novos esquemas". Essa acomodação dos esquemas contribui para suas mudanças de significado e são constituintes da segunda dimensão da Gênese Instrumental. Portanto, com relação ao processo de instrumentalização que se está inferindo a respeito de Maria, seria necessário acompanhar outras atividades que não a aqui descrita. O acompanhamento dessa dimensão da Gênese Instrumental deverá ocorrer, de acordo com Gomes (2008, p. 15), "mediante análise dos esquemas que são mobilizados em cada uma das tentativas de ação com o artefato", ou seja, a análise da aprendizagem de Maria relacionada ao conceito matemático que envolve o artefato poderá ocorrer mediante a análise de conceitos em ação e/ou teoremas em ato, que poderão ser mobilizados em cada uma das tentativas de ação com o mesmo. As ações de José indicam que, momentaneamente, ele possivelmente está instrumentalizado em relação ao artefato. Isso foi observado pelo conjunto formado pelas atividades e o debate a respeito das soluções em que não mobilizou todas as propriedades intrínsecas ao artefato, como se esperava. José mobilizou a propriedade do artefato referente ao fato de as sentenças matemáticas estarem definidas em diferentes partes do domínio, o que evidencia sua aprendizagem. Por outro lado, foi possível observar que, nessa atividade, durante o processo de debate, ele construiu corretamente a lei de formação da função, por meio dos esquemas de atividade coletiva instrumentada que emergiram do processo.

5. Considerações Finais

A transformação do artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em instrumento pôde ser constatada quando os sujeitos resolviam – individual ou coletivamente – as atividades propostas sobre o artefato. A análise realizada, no tocante à forma de como foram mobilizados e/ou criados os esquemas de utilização permitiu verificar como se deu o fenômeno da Gênese Instrumental.

No estudo realizado com os três sujeitos pesquisados, constatou-se que Maria não estava instrumentalizada em relação à função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas nas primeiras partes da atividade. No entanto, no transcorrer da sequência, foi possível observar o processo de instrumentalização, ou, em outras palavras, observar como Maria foi construindo esquemas de uso e de ação instrumentada que evidenciaram a transformação do artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas em instrumento, ainda que sejam necessárias outras atividades para se ter um quadro mais nítido do processo de instrumentalização.

José, outro sujeito da pesquisa, construiu seu processo instrumentalizando-se durante os debates, por meio dos esquemas de atividade coletiva que foram produzidas. O processo de instrumentalização não pareceu permanente; isso ficou evidente em equívocos na mobilização de esquemas de utilização mencionados ao longo da discussão.

Com relação a João, embora o artefato função de uma variável real definida por várias sentenças matemáticas já fosse um instrumento, foi possível constatar que continuou a mobilizar esquemas de ação instrumentalizada para a resolução da atividade. Ele contribuiu de forma efetiva para que emergissem os esquemas coletivamente instrumentalizados, já que o debate se deu, geralmente, em torno das suas ações.

Esse estudo constatou, portanto, a mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da Gênese Instrumental para esses sujeitos e não igualmente.

Bibliografia

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Colômbia: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work**.** *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*. pp. 245-27.

Chumpitaz, L. D. M. (2013). *La génesis instrumental: Un estudio de los processos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingenería*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica do Peru, Lima, Peru.

C3U. (2017). *Conception, Création , Cómpetences et Usages*. Recuperado em 15 Fevereiro de 2017, de: http://c3u.paragraphe.info/Site_C3U/Pierre_Rabardel.html.

ESCOM (2016). *Didactique professionnelle et didactique des disciplines*. Recuperado em 15 Março de 2017, de: http://www.archivesaudiovisuelles.fr/413/introduction.asp.

Gomes, A. S. (2008). Referencial Teórico Construtivista para Avaliação de Software Educativo*. Revista Brasileira de Informática na Educação, 16*, pp. 1-14.

Gueudet, G.; Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Education Studies in Mathematics, 71,* pp. 199-218.

IPN (1991). Colletion Mathématiques. In HATIER. *9e année* p. 157. Rep. De Mali: Librairie Nouvelle.

Jesus, G. B. (2012). *As construções geométricas e a Gênese instrumental: o caso da mediatriz***.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Oliveira, N. (1997). *Conceito de função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator*, *v3 n2,* pp. 3-8.

Rabardel, P. (1995a). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (1995b). Qu'est qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. Outils pour le calcul et le traçage de courbes. Le mathématicien, le physicien et le psycologue. *CNDP–DIE – Mars,* pp. 61-65.

Rabardel, P. (2002). *People and Technology: A cognitive approach to contemporary instruments.* [Translated by Heidi Wood]. Paris: Université de Paris 8.

Rabardel, P. (2011). *Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos*. [Tradución de Martin Acosta Gempeler]. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Rossini, R. (2006). *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.* Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Vergnaud, G. (1990). La teoria de los campos conceptuales. [Traducción de Juan D. Godino. Espanha]. *Reserches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,* pp. 133-170.

Xavier Neto, A. L. (2015). Gênese Instrumental: levantamento das pesquisas no Brasil no período de 2005 a 2013. *XVI Encontro Baiano de Educação Matemática*. Recuperado em 10 de Abril de 2017 de http://www.xviebem-ifba-ssa.ufba.br/modulos/submissao/Upload-267/65673.doc.

Xavier Neto, A. L. (2016). *Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Autores:

Armênio Lannes Xavier Neto: É Mestre em Educação Matemática pela PUC-SP. Possui Especialização em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. Atualmente Professor de Matemática no EF2 da Escola Viva, Examiner e Team Leader em ITGS - International Baccalaureate (IBO).
Email: eltche@gmail.com

Maria José Ferreira da Silva: É Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atualmente é professora Assistente doutor da Graduação, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática e da Especialização em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Email: zeze@pucsp.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http://www.revistaunion.org
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 126-139

Educação Estatística e as questões do Exame Nacional do Ensino Médio 2016: reflexões sobre o enfoque Ciência Tecnologia e Sociedade

Cristiane de Fatima Budek Dias, Caroline Subirá Pereira
Giane Correia Silva, Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves
Guataçara dos Santos Junior

Fecha de recepción: 02/05/2017
Fecha de aceptación: 14/10/2017

Resumen	Este artículo tiene como objetivo principal analizar los problemas de Examen Nacional de Educación Secundaria (ENES) en Brasil, aplicada en 2016, buscando identificar los niveles de reflexiones para el enfoque de Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS), presente en temas relacionados con conocimiento probabilístico y estadístico. El análisis sigue el método de análisis de contenido. Las categorías de clasificación de preguntas se preparan según por Pereira, Dias, Silveira y Santos Junior (2016). Los resultados muestran que el conocimiento probabilístico y estadístico se puede facilitar con las discusiones que implican el enfoque CTS, pero ENES es todavía poco profundo en estas reflexiones. **Palabras clave**: CTS. Educación Estadística.Educación Secundaria.
Abstract	This article aims to analyze the issues of the National High School Examination (NHSE) of Brazil, applied in 2016, seeking to identify the levels of reflections regarding the Science, Technology and Society (STS) approach, present in the issues that deal with the Probabilistic and statistical knowledge. The analysis follows the Content Analysis method. The classification categories of the questions is in agreement with those elaborated by Pereira, Dias, Silveira and Santos Junior (2016). The results point out that probabilistic and statistical knowledge can be facilitated with the discussions involving the STS approach, but the NHSE is still superficial in these reflections. **Keywords:** STS. Statistical Education. High school.
Resumo	Este artigo tem como objetivo geral analisar questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do Brasil, aplicado no ano de 2016, buscando identificar os níveis de reflexões referentes ao enfoque Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS), presentes nas questões que tratam dos conhecimentos probabilísticos e estatísticos. A análise segue o método da Análise de Conteúdo. As categorias de classificação das questões estão de acordo com as elaboradas por Pereira, Dias, Silveira e Santos Junior (2016). Os resultados apontam que os conhecimentos probabilísticos e estatísticos podem ser facilitados com as discussões envolvendo o enfoque CTS, porém o ENEM ainda é superficial nessas reflexões. **Palavras-chave:** CTS. Educação Estatística. Ensino Médio.

1. Introdução

A visão de uma ciência neutra e superior, em que tudo que se testa cientificamente é inquestionável, ainda perdura no contexto escolar. Há também um falso entendimento de que todos os avanços trazidos com a ciência e a tecnologia serão capazes de transformar e resolver a todos os problemas da humanidade. Essas concepções equivocadas precisam ser desmistificadas e é nesse contexto que surge a necessidade de um enfoque que trate das relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade, o enfoque CTS.

O enfoque CTS “visa ressaltar a importância social da ciência e da tecnologia, de forma que se enfatize a necessidade de avaliações críticas e análises reflexivas sobre a relação científico-tecnológica e a sociedade” (Pinheiro, 2007, p. 87).

A perspectiva do trabalho tendo em conta essas inter-relações, no entanto, deve ser considerada em todos os campos do conhecimento. No contexto educativo, faz-se indispensável um trabalho interdisciplinar, que considere que todas as disciplinas possam contribuir com reflexões críticas a respeito da ciência e da tecnologia. Partindo de seus conteúdos, cada área do conhecimento é capaz de tratar das relações dos conhecimentos científicos, das questões sociais e das tecnologias correlatas (Pinheiro, 2007), como é o caso da Matemática e da Estatística.

Para Batanero (2001), o grau de desenvolvimento de um país está ligado ao modo de se colocar, de forma estatística, as situações que o regem, de tal forma que esses dados possam ser utilizados para nortear as tomadas de decisões em diversas áreas sociais.

Assim, tornam-se viáveis reflexões sobre como a Estatística influencia a tomada de decisões nos mais diversos campos e como ela está inteiramente relacionada ao desenvolvimento científico e tecnológico. Também é por meio da Educação Estatística que os estudantes são levados a reflexões críticas e à construção da cidadania, pois ela é responsável por desenvolver nos alunos habilidades de coleta, organização, interpretação e análise de dados, encaminhando-os para ações concretas no meio em que vivem.

É nesse sentido que se busca neste artigo uma discussão sobre as questões relacionadas à Estatística sob o enfoque CTS no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O Ensino Médio é a última etapa da Educação Básica brasileira e constitui-se como momento fundamental “para reflexões que contribuam para a formação cidadã do aluno” (Pereira, Dias, Silveira e Santos Junior, 2016). Essa etapa tem como uma de suas finalidades a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos, assim como o processo de transformação da sociedade (Brasil,1996).

O ENEM é a avaliação do Ensino Médio e deve apresentar questões formuladas em acordo com competências descritas em sua Matriz de Referência (Brasil, 2009), dentre essas questões, estão aquelas relacionadas à interpretação, análise e resolução de problemas envolvendo aspectos tecnológicos, científicos e sociais, nas quais se deve fazer uso do conhecimento matemático para sua resolução. Essas particularidades sugerem que o “ENEM pode ser visto como uma ferramenta avaliativa cujo objetivo é nortear as potencialidades dos alunos articuladas com o enfoque CTS, visando à Alfabetização Científica e Tecnológica (ACT)" (Pereira et al, 2016).

Dessa forma, considerando a Estatística como um conhecimento relevante para as relações CTS, foram analisadas especificamente as questões que tratam de tal conteúdo. O intuito é averiguar se, realmente, as questões propiciam aos estudantes reflexões e relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade.

2. Educação Estatística e enfoque CTS

No final da década de 60 e início da década de 70, as inter-relações entre a Ciência, a Tecnologia e a Sociedade passam a ser consideradas por uma nova óptica, reconhecendo-se que os avanços científicos e tecnológicos estão intrinsecamente relacionados com a sociedade e vice e versa. Ou seja, do mesmo modo que a Ciência e a Tecnologia geram impactos na sociedade como um todo, também, são influenciadas pelos interesses sociais, políticos, econômicos, culturais e éticos (Santana, 2011; Pinheiro 2005; Pereira et al, 2016).

Bazzo, Von Linsingen e Pereira (2003, p. 119), entendem que o termo CTS demonstra sua completude por abranger tanto os "fatores sociais que influenciam na mudança científico-tecnológica, como no que diz respeito às consequências sociais e ambientais". E são essas relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade que precisam ser consideradas no processo educativo, considerando que cada área do conhecimento pode ser articuladora de reflexões em prol de tomadas de decisão cada vez mais acertadas para o bem comum.

Nessa perspectiva, a Estatística também pode dar sua contribuição. "A estatística é considerada uma ciência de análise de dados, ou seja, possibilita obter conhecimento a partir de dados" (Lopes, 2012, p. 167). Os conteúdos referentes à Estatística no currículo da Educação Básica brasileira estão propostos nos documentos norteadores da disciplina Matemática. A relevância desses conteúdos está explicitada nas propostas curriculares oficiais, representando uma preocupação com a formação de cidadãos críticos e atuantes na sociedade. No documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) para a Matemática, afirma-se:

> A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc. (Brasil, 1999, p. 25).

Nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná / Brasil encontra-se também aporte para essa reflexão, pois nesse documento está exposto que o "Tratamento da Informação é um conteúdo estruturante que contribui para o desenvolvimento de condições de leitura crítica dos fatos ocorridos na sociedade" (Paraná, 2008, p. 60). O documento também revela a preocupação de que, na Educação Básica, o trabalho com a estatística seja efetivado tendo como base um processo investigativo, proporcionando ao estudante a manipulação dos dados desde o momento da coleta até seus processos finais.

Compreende-se, portanto, que o ensino de Estatística deve promover a capacidade de pensamento crítico do estudante, dando suporte à formação para a cidadania. Nesse sentido, é importante ter em mente que um ensino dessa ciência de forma mecânica e com a ênfase em cálculos algébricos pode inviabilizar esse processo. Lopes (1998, p. 21) assinala que "o ensino da Estatística e da Probabilidade, através de experimentações, observações, registros, coletas e análises de dados de modo interdisciplinar, pode possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do senso crítico".

Na Estatística os problemas não têm solução única e não podem ser avaliados como totalmente errados ou certos, devem ser avaliados em termos da qualidade do raciocínio, da adequação dos métodos utilizados à natureza dos dados existentes. (Lopes, 2010).

É nessa linha de pensamento que se considera que a Educação Estatística trabalhada em um enfoque Ciência Tecnologia e Sociedade (CTS) pode dar suporte a um trabalho efetivo de construção de cidadania e de desenvolvimento do pensamento crítico.

Para Santana (2011),

> […] é na busca das soluções que os conteúdos científicos e tecnologias correlatas surgirão. Habilidades serão desenvolvidas. A comunicação / argumentação oral e escrita, a tomada de decisão frente às várias possibilidades, a aprendizagem cooperativa por meio de atividades em grupos, deverão ser exercitadas. Deve-se, ainda, abandonar situações-problema em que só cabe o certo ou o errado como alternativas. Ao invés disso, o importante é a argumentação e a flexibilidade para escolhas mais adequadas. Na Educação Estatística, pela natureza dessa ciência. (Santana, 2011, p. 45-46).

O estudo de Santana (2011) traz importantes reflexões sobre a possibilidade de trabalho com a Estatística em um enfoque CTS, afirmando que os conhecimentos estatísticos são essenciais na vida cotidiana dos cidadãos e são excelentes meios de reflexão crítica e de tomada de decisão.

A proposta de Pereira, Silveira e Santos Junior (2013), também revela uma importante forma de abordagem com os conceitos estatísticos vinculados a questões sociais e ao desenvolvimento científico-tecnológico. Para os autores, os dados estatísticos bombardeiam a todo o momento as pessoas e também são os responsáveis pelas ações referentes às políticas sociais. Partindo-se de dados estatísticos "alarmantes de desmatamentos, epidemias, impactos e outros fenômenos que se inserem indagações, e políticas de mudança e projetos de uma busca pela sustentabilidade começam a ser elaborados e colocados em prática" (p. 87).

Destarte percebe-se que o uso das informações estatísticas está interligado aos contextos sociais, políticos e econômicos, sendo que demandam ações e inquietações em todos esses campos. Para Santana (2011, p. 49) o "uso do conhecimento estatístico traz demandas éticas exigindo assim um olhar crítico sobre esse uso". É necessário, pois, refletir sobre as informações representadas estatisticamente, sobre sua veracidade e sobre as ações que desencadeiam.

3. O Exame Nacional do Ensino Médio

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi instituído em 1998 com a finalidade de avaliar o desempenho do estudante ao fim da Educação Básica brasileira, procurando colaborar para a melhoria da qualidade do ensino.

A partir de 2009, o ENEM passou por alterações significativas, passando a ser utilizado como forma de ingresso ao Ensino Superior. Além disso, houve a reestruturação dos currículos do Ensino Médio (Brasil, 2008, p.15), que passaram a focar temáticas de contextualização, interdisciplinaridade, competências e habilidades que estejam voltadas à ciência e tecnologia conexa com a sociedade.

Devido às mudanças, o Exame começou a ser aplicado em dois dias e as questões passaram a ser divididas em quatro áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

As questões do ENEM seguem uma Matriz de Referência, na qual estão pautadas as competências e habilidades que precisam ser avaliadas. Nesse documento pode ser observada a articulação dos conteúdos com o enfoque CTS, pois,

> Pode-se ponderar que a cada ano ficam mais adjacentes as inter-relações entre a Ciência, Tecnologia e Sociedade e as propostas educacionais brasileiras, considerando que se realça cada vez mais a influência da sociedade no desenvolvimento científico e tecnológico (e vice-versa) e a importância da presença destes fatores na formação cidadã dos educandos (Alves, 2011, p. 44).

Realizando a análise das competências e habilidades presente na Matriz de Referência do ENEM (Brasil, 2009), levando em consideração a área de Matemática e suas Tecnologias, de forma mais específica o eixo estruturante Análise de Dados, pode-se observar a aproximação com os pressupostos do enfoque CTS, nas competências de área 6 e 7:

> **Competência de área 6** - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
>
> **Competência de área 7** - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística. (Brasil, 2009, p. 6-7).

As competências propõem, entre suas habilidades, aspectos nos quais os alunos precisam ser capazes de utilizar conhecimentos matemáticos para a realização de cálculos, resolver situações-problema, saber argumentar por meio do conhecimento matemático e/ou estatístico.

Dessa forma, entende-se que as questões do ENEM precisam apresentar no seu enunciado, ou em suas alternativas de resposta, aspectos que levem em consideração essas competências e que apontem relações com os propósitos do enfoque CTS.

4. Método

Observando os documentos curriculares oficiais do Ensino Médio, optou-se pelo estudo e análise das questões da área de Matemática e suas Tecnologias do ENEM de 2016, sendo que, este artigo, é uma complementação do estudo realizado por Pereira *et al* (2016), que analisou questões do ENEM 2014.

Encontram-se disponibilizados por meio eletrônico os cadernos do Exame em quatro cores: amarelo, azul, cinza e rosa. As questões estão organizadas de maneira distinta em cada caderno, mas respeitando-se a similaridade entre as mesmas.

A área de Matemática e suas Tecnologias compreendem da questão 136 até a questão 180, as quais correspondem ao caderno do segundo dia de prova.

Para esta análise foram consideradas apenas as questões que tratam dos conteúdos de Probabilidade e Estatística, portanto, das 45 questões da área, foram consideradas 16 questões do caderno amarelo.

Neste artigo, utilizou-se abordagem metodológica qualitativa de natureza interpretativa. A pesquisa qualitativa “explora as características dos indivíduos e cenários que não podem ser facilmente descritos numericamente” (Moreira & Caleffe, 2008, p. 73). Para Vilela (2003, p. 459), “a investigação qualitativa é descritiva e interpretativa: os dados recolhidos são transpostos, o mais fielmente possível, na comunicação dos resultados da pesquisa”.

Por isso, a análise dos dados está baseada na interpretação das questões, levando em consideração o referencial teórico estudado, os PCN (Brasil, 1999) e a Matriz de Referência do ENEM (Brasil, 2009).

Optou-se pela análise de conteúdo empregada por Bardin (1977, p. 44) que consiste em um:

> [...] conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores, quantitativos ou não que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção / recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Rodrigues Junior, Dickman,Hygino e Linhares (2014, p. 42) explicam que a análise de conteúdo integra três fases: “1) A pré-análise; 2) exploração do material, 3) tratamento dos resultados, as inferências e a interpretação”.

Na fase de pré-análise realiza-se a organização do material. Na fase de exploração, reúne-se, codifica-se e categorizam-se para realização da análise. Bardin (1977, p. 117), enfatiza que:

> A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, aos quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos.

E a última fase realiza o tratamento, as inferências e interpretação dos resultados, no qual os dados são discutidos para que se tornem significativos e válidos (Rodrigues Junior et al, 2014).

Utilizando as fases estabelecidas por Bardin, a pesquisa apresenta as seguintes etapas:

Primeira: realizou-se a seleção dos documentos oficiais, como a Matriz de Referência para o ENEM (Brasil, 2009) e as questões do bloco de Matemática e suas Tecnologias do Exame aplicado no ano de 2016.

Segunda: codificação e categorização das questões relativas à área de Matemática e suas Tecnologias, voltadas ao conteúdo de Probabilidade e Estatística nas quais se buscou pontos que analisassem os pressupostos do enfoque CTS. As questões foram separadas por similaridade, observando-se as congruências e discordâncias. As categorias de análise empregadas neste estudo são similares às elaboradas por Pereira et al (2016), conforme disposto no Quadro 1.

Categorias	Descrição
I	Propicia ao aluno apenas reconhecer aspectos científicos, tecnológicos e sociais
II	Oportuniza ao aluno interpretar fenômenos científicos, tecnológicos e sociais
III	Possibilita ao aluno avaliar modos de intervenção sobre problemas científicos, tecnológicos e sociais
IV	Enfatiza apenas conhecimento matemático específico sem relações consideráveis com a ciência, tecnologia e sociedade

Quadro 1. Categorias de análise. Adaptado de Pereira et al (2016).

Terceira: na última fase deste estudo sucedeu-se a análise interpretativa das questões, de acordo com as categorias apresentadas no Quadro 1.

4.1. Análise dos dados

Após a leitura e análise profunda das questões do ENEM que abordavam o conteúdo de Probabilidade e Estatística, essas foram agrupadas conforme as categorias pré-estabelecidas.

O ENEM é composto por 45 questões de Matemática, das quais 16 envolviam o conteúdo Probabilidade e Estatística. A classificação das 16 questões está organizada na Tabela 01:

Categorias	Questões	%
I	138, 151, 157	18,75%
II	141, 160, 164, 167, 180	31,25%
III	139, 143, 148, 154	25%
IV	144, 147, 150, 153	25%

Tabela 1. Questões e suas Categorias
Fonte: Da Pesquisa.

Para ilustrar as questões de cada categoria, foram selecionadas as consideradas mais representativas de cada grupo. Assim, a Figura 01, representa uma das questões classificadas na Categoria I, na qual apenas propicia-se ao aluno reconhecer os aspectos CTS.

QUESTÃO 151

O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração da população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000

Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	459 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

A 125%
B 231%
C 331%
D 700%
E 800%

Figura 1. Exemplo de questão da Categoria I.
Fonte: Enem, 2016, 1ª aplicação, Caderno Amarelo.

A questão apresentada na Figura 01 traz como tema situações de aumento da população de regiões do Brasil, sustentadas por dados do Censo Demográfico. Dessa forma, a questão relaciona questões de Ciência, Tecnologia e Sociedade, visto que, aborda sobre um assunto real da população brasileira, pesquisada pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) envolvendo Ciência, Tecnologia e Sociedade.

Porém, a pergunta que é gerada nessa questão, apenas faz com que o aluno reconheça os aspectos de CTS envolvidos, não exigindo que se faça uma interpretação desse envolvimento e, muito menos, que se avalie um modo de intervenção. Para o aluno responder, basta ler os dados numéricos, sem a necessidade de relacionar e refletir sobre os aspectos de CTS envolvidos na questão.

As questões 138 e 157 também seguem esse modelo, exigindo apenas que o aluno reconheça os aspectos CTS. Pinheiro (2007) defende a ideia de que todas as disciplinas contribuam com reflexões críticas envolvendo CTS, o que inclui a Matemática e a Estatística.

Embora essas três questões classificadas na Categoria I apresentem CTS em seu contexto, elas não geram reflexões sobre a temática. Assim, levanta-se que essas questões poderiam trazer mais evidências sobre as relações de CTS e inclusive estar de acordo com o que se propõe na competência 6 da Matriz de Referência do ENEM (Brasil, 2009, p. 6): “Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”.

Percebeu-se que o foco das perguntas das três questões aqui classificadas, exige que o aluno interprete as informações apenas com o olhar numérico, sem a necessidade de relacionar com CTS.

Para representar a Categoria II, tem-se a Figura 02, a qual, conforme a classificação da categoria, é uma questão em que o aluno é oportunizado a interpretar os fenômenos científicos, tecnológicos e sociais.

QUESTÃO 167

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A I.
B II.
C IV.
D V.
E VII.

Figura 2. Exemplo de questão da Categoria II.
Fonte: Enem, 2016, 1ª aplicação, Caderno Amarelo.

A questão representada na Figura 02 não possui dados reais, porém a situação-problema aborda uma questão econômica, na qual, é necessária uma interpretação criteriosa a partir do balanço de lucros de uma empresa. A questão apresenta uma relação direta com assuntos científicos, tecnológicos e sociais, tendo como base a análise de uma situação financeira de uma empresa, oportunizando a interpretação acerca de fenômenos que envolvem CTS.

A pergunta realizada ao aluno nessa questão deixa evidente a necessidade de interpretação de dados contidos em tabelas e, também, da utilização de Medidas de Tendência Central para a tomada de decisão sobre um determinado problema, implicando na utilização de ferramentas estatísticas para a resolução de problemas que envolvem CTS.

Da mesma forma, as outras questões da categoria II foram assim classificadas pela sua capacidade de levar o aluno a interpretar situações que envolvem CTS, buscando suprir a necessidade decorrente do crescimento científico-tecnológico, para a tomada de decisão. Conforme Pinheiro (2007), o senso crítico precisa ser aguçado na tomada de decisões, na criação de estratégias e recursos de resolução dos problemas que envolvam Ciência e Tecnologia em conjunto com a sociedade.

Na Categoria III, encontram-se as questões que possibilitam ao aluno avaliar modos de intervenção sobre CTS, sendo considerada, portanto, neste trabalho, a categoria de melhor qualidade. Para representar essa categoria tem-se a questão 148, ilustrada por meio da Figura 03:

QUESTÃO 148

Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

A 59
B 65
C 68
D 71
E 80

Figura 3. Exemplo de questão da Categoria III.
Fonte: Enem, 2016, 1ª aplicação, Caderno Amarelo.

A questão 148 trata de um problema real que atinge a comunidade científica e toda a sociedade, e ainda, como descrito no enunciado, necessita de tecnologia e ciência para uma solução. Nota-se, portanto, um envolvimento mais abrangente de CTS.

A pergunta central dessa questão é a principal característica que a faz fazer parte da Categoria III, pois solicita que o aluno avalie um modo para intervir na situação-problema e apresentar uma possível solução. No decorrer do enunciado, a questão, também, propicia aos alunos reconhecer os aspectos CTS e oportuniza que os fenômenos sejam interpretados, relacionando-se assim com as características das Categorias I e II.

Essa questão, por se tratar de uma temática de interesse social, e por meio do conteúdo de Estatística, vem de acordo com Santana (2011), autor que reconhece a Estatística no currículo escolar como um excelente meio de reflexão crítica e de tomada de decisão. Quanto ao seu envolvimento amplo com CTS, enfatiza ainda mais a importância de questões como essa em um exame a nível nacional do Ensino Médio.

A última categoria é a IV, cuja característica é enfatizar apenas o conhecimento estatístico específico sem relações consideráveis com CTS. Como exemplo dessa categoria tem-se a questão 150, representada na Figura 04:

QUESTÃO 150

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Figura 4. Exemplo de questão da Categoria IV.
Fonte: Enem, 2016, 1ª aplicação, Caderno Amarelo.

A questão 150, apesar de apresentar uma situação possivelmente realística, não possui envolvimento com CTS, e a pergunta direcionada ao aluno não exige nenhum tipo de reflexão para tomada de decisão. Para respondê-la, basta ao aluno saber o conceito de Moda para aplicá-lo ao cálculo, obtendo-se o valor pedido.

Em outras palavras, nessa questão a ênfase está voltada para o conteúdo sem a necessidade de reflexão e tomada de decisão. Esse aspecto também é notado nas demais questões agrupadas na categoria IV, sendo esta a categoria na qual se enquadra o maior número de questões do ENEM 2016, compreendendo apenas 4 das 16 questões de conteúdo de Estatística do exame desse ano. Considera-se que esta deveria ser a categoria com menor porcentagem, ou até mesmo ser inexistente no Exame, visto o exposto nas competências e orientações da Matriz de Referência do ENEM (Brasil, 2009).

Por fim, destaca-se a necessidade de as questões do ENEM serem formuladas com maior atenção para os aspectos apontados nas categorias I, II e III, com ênfase principal na Categoria III, pois um ensino que prioriza relações com CTS, conforme defendem Santana (2011) e Pereira, Silveira e Santos Junior (2013), favorecem a educação e o desenvolvimento da sociedade, da ciência e da tecnologia como um todo.

5. Considerações Finais

Percebeu-se, com esta análise, que os conhecimentos probabilísticos e estatísticos podem ser facilitados com as discussões envolvendo o enfoque CTS, porém o ENEM ainda apresenta superficialidade em relação a essas reflexões, pois ainda há alto índice de questões que somente exigem conhecimento do conteúdo sem proporcionar ao estudante uma reflexão crítica a respeito dos aspectos científicos, tecnológicos e sociais.

Tomar decisões com base em dados é uma condição fundamental para a vida cotidiana e isso pode ser muito bem aproveitado para as reflexões CTS e para que os alunos tenham uma visão crítica da realidade, por isso, entende-se que seria relevante que as questões apresentassem foco nesse aspecto, o que foi pouco observado a partir da análise das questões do ENEM 2016.

Tem-se por pressuposto que, nas próximas edições do ENEM, poderia ser apresentada com maior ênfase características como as apresentadas nas categorias I, II e III, com destaque principal na Categoria III, vista como mais completa, pois, isso poderá oportunizar reflexões e tomadas de decisões favoráveis ao contexto atual.

Bibliografía

Alves, A. R. (2011). Propostas Teórico-Metodológicas do ENEM: *Relações entre o enfoque CTS/CTSA e o discurso de professores a acerca da prática docente*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos).

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. São Paulo: Edições 70.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidade de Granada.

Bazzo, W. A.; Von Linsingen, Pereira, L.T.V. (Eds.). (2003). *Introdução aos estudos CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade)*. Madri: OEI.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*: bases legais. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Brasil. Ministério da Educação. (2008). *Reestruturação e expansão do ensino médio no Brasil*. Brasília: Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/2009/gt_interministerialresumo2.pdf.

Brasil. Ministério da Educação. (2009). *Matriz de Referência do ENEM 2009*. Brasília: Ministério da Educação/Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Brasil. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. (1996, 23 de dezembro). *Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* Diário Oficial da União, seção 1.

Lopes, C. A. E. (1998). *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:* uma análise curricular. (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

Lopes, C. E. (2010). A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico. In: Reunião Anual da ANPED. 33, Caxambu/MG. *Anais.... Disponível* em: http://33reuniao.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6836--Int.pdf

Lopes, C. E. (2012). A educação estocástica na infância. *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, SP: UFSCar, 6(1), 160-174. Disponível em:http://www.reveduc.ufscar.br

Moreira, H., Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.* (2ed). Rio de Janeiro: Lamparina.

Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação do Paraná. *Diretrizes curriculares da Educação Básica*. Paraná.

Pereira, C. S., Dias, C. F. B., Silveira, R. M. C. F., Santos Junior, G. (2016). O enfoque CTS nas questões de matemática no ENEM de 2014: uma realidade? *Imagens da Educação,* 6(3), 62–73.

Pereira, L. B. C., Silveira, R. M. C. F., Santos Junior, G. (2013). Ensino de estatística com enfoque CTS: uma articulação entre matemática e temas sociais. *Revista Práxis*, 5(10), 86-96.

Pinheiro, N. A. M. (2005). *Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico:* a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático. (Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina). Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/101921/222011.pdf?sequence=1

Pinheiro, N. A. M. (2007). Formar cidadãos crítico-reflexivos: a contribuição da matemática. *Semina: Ciências Sociais e Humanas*, 28(1), 81–92.

Rodrigues Junior, E., Dickman, A. G., Hygino, C. B., Linhares, M. P. (2014). Questões interdisciplinares com enfoque CTS: uma proposta para o ensino médio. *Lat. Am. J. Phys. Educ*., 8(1), 38-51.

Santana, M. de S. (2011). *A educação estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3º ano do ensino médio*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto).

Vilela, R. A. T. (2003). O lugar da abordagem qualitativa na pesquisa educacional: retrospectiva e tendências atuais. *Perspectiva*, 21 (2), 431–466.

Autores

Dias, Cristiane de Fatima Budek**: Doutoranda em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, campus Ponta Grossa/Paraná/Brasil. Bolsista Capes. E-mail:** cristianed@alunos.utfpr.edu.br

Pereira, Caroline Subirá: **Mestranda em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, campus Ponta Grossa/Paraná/Brasil. Bolsista Capes. E-mail:** carolinepereira@alunos.utfpr.edu.br

Silva, Giane Correia: **Mestranda em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, campus Ponta Grossa/Paraná/Brasil. E-mail:** gianecorreiasilva@gmail.com

Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes: **Mestrando em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, campus Ponta Grossa/Paraná/Brasil. E-mail:** amfg_pr@hotmail.com

Santos Junior, Guataçara: **Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Ponta Grossa/Paraná/Brasil. E-mail:** guata@utfpr.edu.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 140-163

Nuevos conocimientos para una educación matemática del S. XX1: panorama internacional de la modelización en el currículo

César Trelles Zambrano, Ángel Alsina Pastells

Fecha de recepción: 23/05/2017
Fecha de aceptación: 24/09/2017

Resumen	En este artículo se argumenta la importancia que ha ido adquiriendo la modelización matemática en las últimas décadas y se revisa el tratamiento curricular que se da a este conocimiento desde las principales organizaciones internacionales –NCTM e ICTMA- que trabajan en educación matemática y en particular en el tema de modelización, así como los documentos curriculares de Estados Unidos, Ecuador y España con el objetivo de identificar la incorporación de este tema en los planes de estudio oficiales de estos países. Los resultados muestran que a pesar de que la modelización está presente en diferentes medidas en los documentos curriculares desde edades cada vez más tempranas, todavía falta una mejor articulación de este componente en los diferentes niveles educativos, así como mejores orientaciones curriculares que permitan llevar el proceso a la práctica. **Palabras clave**: Modelización matemática, modelo, resolución de problemas, currículo, etapas educativas.
Abstract	This paper argues the importance of mathematical modeling in the last decades and reviews the curricular treatment in the main international organizations on mathematics education - NCTM and ICTMA - as well as the mathematics curricula of the United States, Ecuador and Spain to analyze how mathematical modeling is treated. The results show that although modeling is present in curricular documents from earlier ages, there is still a lack of better articulation in the different educational levels, as well as better curricular orientations that allow the process to be put into practice. **Keywords**: Mathematical modeling, model, problem solving, curriculum, educational stages.
Resumo	Este artigo discute a importância que foi adquirindo a modelagem matemática nas últimas décadas e se revisa o tratamento curricular que se dá a esse conhecimento desde as principais organizações internacionais-NCTM e ICTMA- que trabalham em educação matemática e em particular no tema da modelagem, assim como os documentos curriculares dos Estados Unidos, Equador e Espanha, com o objetivo de identificar a incorporação desse tema nos planos de estudos oficiais desses países. Os resultados mostram que, embora a modelagem esteja presente em diferentes destaques em documentos curriculares para idades cada vez menores, todavia falta uma melhor articulação dessa componente nos diferentes níveis de ensino, assim como melhores diretrizes curriculares que permitam levar o processo à prática. **Palavras-chave:** Modelagem matemática, modelo, resolução de problemas, currículo, estágios educacionais.

1. Introducción

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática ha cobrado considerable protagonismo en el currículo de matemáticas de diferentes países, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, negocios, ciencias sociales, estudio climático, diseño avanzado, etc.) como dentro de la propia educación matemática. Esta mayor consideración ha dado lugar a que cada vez sea más común la modelización matemática tanto en los documentos curriculares como en el lenguaje empleado por el profesorado. Para Blomhøj (2008) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas. Pero ¿qué se entiende por modelización matemática? Si bien el objetivo de este artículo no es profundizar en la conceptualización de este tema, en términos muy generales podemos decir que es un proceso de construcción de un modelo que sirve para explicar o estudiar un fenómeno real o matemático (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007), lo que requiere traducciones constantes entre la realidad y las matemáticas. En este sentido, varios autores proponen un conjunto de pasos con el objetivo de ejecutar el mencionado proceso en las aulas, denominado ciclo de modelización. Por ejemplo, Blum y Leiß (2007) plantean que un ciclo de modelización consta de los siguientes pasos: 1) construcción, 2) simplificación/estructuración, 3) matematización, 4) trabajo matemático, 5) Interpretación, 6) validación y 7) exposición. Además, es importante indicar que en la literatura existen muchas otras definiciones, pero la mayoría recogen aspectos y características comunes a las anteriormente mencionadas.

Por otro lado, los continuos avances que se dan en la investigación en lo referente a este tema dan cuenta de que a pesar de que la implementación de la modelización matemática en las aulas puede presentar algunas dificultades, los beneficios que ofrecen a los estudiantes pueden resultar muy interesantes. Blum y Borromeo (2009) manifiestan que a través de la modelización, los estudiantes pueden comprender mejor los contextos en los cuales se desenvuelven; se apoya el aprendizaje de las matemáticas y se promueve el desarrollo de algunas competencias, actitudes y visiones adecuadas hacia esta disciplina.

Con estos antecedentes, los aspectos centrales que se exponen en este artículo pretenden evidenciar el nivel de importancia y el tratamiento que se le da a la modelización en las principales organizaciones que trabajan en educación matemática a nivel mundial, en concreto se analizan los lineamientos que establece el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) y los Estándares Estatales Comunes de Matemáticas (CCSSM) de Estados Unidos, así como cierta literatura generada desde la Comunidad Internacional de Profesores de Modelización Matemática y Aplicaciones (ICTMA) constituida como un grupo de estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI). Finalmente se analiza cómo se ha incorporado la modelización matemática en el currículo educativo de Ecuador y España en los niveles educativos desde los 3 a los 18 años.

El criterio que se ha utilizado para la revisión ha sido la búsqueda del término "modelización matemática" o términos asociados como "modelo", "modelos" o "modelación". Para realizar este análisis, se ha usado la técnica de análisis de documentos. Los documentos analizados son documentos oficiales de los distintos organismos mencionados y de las respectivas administraciones públicas. Dentro de la gran variedad de enfoques posibles de análisis de textos (Vallés, 1997), hemos optado por el análisis interpretacional en el sentido de Tesch (1990), puesto que nuestro interés es la comprensión del sentido del texto, a partir del cual pretendemos identificar y categorizar los elementos y explorar sus conexiones. Con el propósito de analizar la progresividad y articulación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos se han establecido y codificado cinco categorías de análisis:

1. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos concretos (MC).
2. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de la modelización a través de modelos gráficos y/o visuales (MGV)
3. Estándares, contenidos o destrezas que plantean el uso de un modelo previamente establecido (MPE)
4. Estándares, contenidos o destrezas que plantean la creación de un modelo (CM)
5. Estándares, contenidos o destrezas que explícitamente involucran un proceso de reflexión en la implementación de la modelización (PRM)

Se espera que los tópicos tratados permitan generar análisis y reflexión tanto en los profesores de matemáticas como en la comunidad de investigadores, pues al ser un tema relativamente nuevo en el currículo se considera que existe todavía mucho por hacer tanto en investigación como en la práctica docente, siendo importante para avanzar en este objetivo, poder identificar algunas fortalezas y debilidades presentes en la actualidad.

2. La modelización matemática en el NCTM

El NCTM, como organización profesional con influencia internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, trata de orientar la mejora de la educación matemática para que todos los estudiantes puedan entender y ser capaces de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. En este sentido, desde la publicación de *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics* (1989), *Professional Standars for Teaching Mathematics* (1991) y *Assesment Standars for school Mathematics* (1995), el NCTM ha ido incorporando conocimientos importantes para satisfacer esta necesidad.

La modelización matemática, como se ha argumentado en la introducción es, sin duda, uno de estos conocimientos, por lo que se ha procurado que progresivamente haya sido más visible en las orientaciones curriculares del NCTM. En *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics* (1989), por ejemplo, ya se asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares a partir de la etapa 5-8 (11-14 años) hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar, describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el término “modelo” ha ido evolucionando y ampliándose en los distintos documentos mencionados hasta que en *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), se presenta como una noción con diversos significados: a) para referirse a los materiales físicos con los que trabajan los alumnos (modelos manipulativos); b) para sugerir ejemplificación o simulación, como por ejemplo cuando se modeliza el proceso de resolución de un problema; y c) como, aproximadamente, sinónimo de representación. Desde esta visión, un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos:

> Desde prekindergarten hasta el nivel 2 (3-8 años), los alumnos pueden modelizar cómo distribuir 24 galletas entre 8 niños, utilizando teselas o bloques lógicos, de diferentes maneras. En la etapa 3-5 (9-11 años), empiezan a usar representaciones para modelizar los fenómenos del mundo que les rodea y les ayuda a reconocer patrones cuantitativos. En los niveles medios, cuando modelizan y resuelven problemas del mundo real y del matemático, aprenden a usar variables para representar incógnitas y emplear ecuaciones, tablas y gráficas para representar y analizar relaciones. Los alumnos de Secundaria crean e interpretan modelos de fenómenos referentes a una amplia gama de contextos, incluyendo los entornos físico y social, para identificar los elementos esenciales del contexto y diseñar representaciones que capten las relaciones matemáticas que existen entre estos elementos. (NCTM, 2003, p. 75).

Como puede apreciarse, el rango de edad a partir del que los alumnos deberían empezar a usar representaciones para modelizar fenómenos de diferente naturaleza baja hasta los 3 años y, a la vez, se intenta reforzar la idea que la modelización matemática debería aumentar en los diferentes niveles educativos. Las tablas 1 a 4 muestran la presencia de la modelización matemática en los últimos estándares para la educación matemática publicados hasta el momento (en todos los casos, se han omitido de las tablas las columnas de los niveles en los que no parecían términos asociados a la modelización matemática).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5
Utilizar diversos modelos para desarrollar las primeras nociones sobre el valor posicional y el sistema decimal de numeración (p. 400). MC Relacionar los nombres de los números y los numerales, con las cantidades que representan, utilizando varios modelos físicos y representaciones diversas (p. 400). MC	Utilizar modelos, referencias y formas equivalentes para juzgar el tamaño de una fracción (p. 400). MC Utilizar modelos visuales, referencias y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales de uso común (p. 400). MGV

Tabla 1. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de números y operaciones (NCTM, 2003).

Etapa Pre-K-2	Etapa 3-5	Etapa 6-8	Etapa 9-12
Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos (p. 401). MC, MGV	Modelizar situaciones problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones (p. 402). MC, MGV	Modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones (p. 403). MGV	Identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estas relaciones. MPE Usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones provenientes de varios contextos. CM Extraer conclusiones razonables de una situación, una vez modelizada (p. 403). PRM

Tabla 2. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de álgebra (NCTM, 2003).

Etapa 3-5
Usar modelos geométricos para resolver problemas de otras áreas de las matemáticas, tales como los números y la medida (p. 404). MGV

Tabla 3. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de geometría (NCTM, 2003).

Etapa 3-5	Etapa 6-8
Identificar tendencias en datos bidimensionales, y hallar funciones que los modelicen, o los transformen para que puedan modelizarse (p. 409). MPE	Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área (p. 410). MPE

Tabla 4. Expectativas por edades vinculadas a la modelización matemática en el estándar de contenido de estadística y probabilidad (NCTM, 2003).

El análisis de las tablas 1 a 4 muestra que, tal como sugieren Hirsch y McDuffie (2016), en términos generales se ha prestado una escasa atención a la modelización matemática en los documentos del NCTM de 1989 y de 2000. A pesar de que, de acuerdo con las categorías planteadas en nuestro análisis, las diferentes expectativas relacionadas con modelización evidencian una progresividad gradual de la misma, se observa una falta de articulación debido a que la modelización no aparece en todos los niveles, no se observa una mayor presencia en función del nivel, -- a pesar de que ésta es la intención--; y no se considera la modelización en todos los estándares de contenido, ya que por ejemplo se omiten estos conocimientos para el caso del estándar de contenido de medida. Para procurar subsanar esta situación, el NCTM ha publicado posteriormente otros documentos en los que se han ido concretando algunos recursos y estrategias didácticas para impulsar, entre otros aspectos, la modelización matemática en los diferentes niveles. La colección *Navigations,* por ejemplo, está compuesta por 35 manuales para las diferentes etapas educativas, desde Prekindergarten hasta el grado 12 (3-18 años), que se han ido publicando a lo largo de la primera década del S. XXI. Estos manuales se centran en los cinco estándares de contenido matemático (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad) y en los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y conexiones. Cada libro incluye, además, un CD-ROM suplementario que ofrece actividades electrónicas interactivas para usar con los estudiantes, archivos PDF imprimibles de todas las páginas de actividades, artículos de revistas de NCTM y *applets* interactivos.

De la misma manera, la colección *Essential Understandings,* compuesta también por 35 manuales publicados a partir de 2010, aborda temas ampliamente reconocidos como desafíos para los maestros y para los estudiantes mediante la exploración, el desarrollo y la reflexión sobre las ideas y conexiones que permiten a los profesores responder a las preguntas de los estudiantes, corregir sus conceptos erróneos y escalar su progreso al siguiente nivel. Cada libro de esta serie desarrolla conceptos básicos que se identifican como las "grandes ideas" y las "comprensiones esenciales" relacionadas que desbloquean estos temas. Si bien no hay ningún manual específico de esta serie sobre modelización matemática, se trata mediante ejemplos en manuales dedicados al pensamiento algebraico; expresiones, ecuaciones y funciones; números; razones, proporciones y razonamiento proporcional; geometría y medición; estadística; o el razonamiento matemático.

Recientemente se ha publicado el libro *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (NCTM, 2016), que incluye 25 capítulos agrupados en siete secciones: 1) comprensión de modelos y modelización; 2) uso de modelos para representar matemáticas; 3) enseñanza y aprendizaje sobre modelización matemática; 4) la modelización matemática como vehículo para el aprendizaje STEM; 5) diseño de tareas orientadas a la modelización y planes de estudios; 6) evaluación de la modelización matemática; y 7) apoyo al aprendizaje de los maestros sobre la modelización matemática. En los distintos capítulos de este libro se incluyen reflexiones sobre el significado y la práctica de la modelización, estudios de casos, observaciones que provienen de la investigación y estrategias para su implementación en el aula y en la formación del profesorado de todos los niveles. En muchos casos, estas aportaciones se apoyan en los planteamientos descritos en el documento CCSSM (2010), por lo que en el próximo subapartado se hace una descripción de este conjunto de planteamientos.

3. La modelización matemática en el CCSSM

El documento CCSSM (2010) que ha sido adoptado por más de 40 de los 50 estados de los Estados Unidos de América tiene como propósito fundamental unificar criterios respecto a lo que los estudiantes necesitan saber y ser capaces de hacer en matemáticas a lo largo de los diferentes grados educativos desde *Kindergarten* hasta el grado 12 (5 a 18 años). En relación a la modelización matemática, desde una perspectiva genérica se considera como “el uso de la matemática o de la estadística para realizar una descripción (i.e., modelo) de una situación real del mundo y deducir información adicional acerca de la situación mediante cálculos y análisis matemáticos o estadísticos” (Common Core Standars Writing Team, 2013, p. 5).

Los CCSSM están divididos en estándares para la práctica matemática y en estándares para el contenido matemático, en lo que respecta a los primeros, el modelado con matemáticas es uno de los estándares explícitos para todos los grados educativos, en él se manifiesta:

> Los estudiantes matemáticamente competentes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas de la vida cotidiana (…) ellos interpretan rutinariamente sus resultados matemáticos en el contexto de la situación y reflexionan sobre si los resultados tienen sentido, posiblemente mejorando el modelo si no ha cumplido su propósito. (National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers [NGACBP y CCSSO], 2010, p. 7).

El uso estratégico de herramientas apropiadas es otro de los estándares para la práctica matemática en donde se plantea tanto el uso de modelos concretos para la resolución de problemas matemáticos, así como el uso de la tecnología para visualizar los resultados al momento de realizar modelos matemáticos.

Por su parte los estándares para el contenido matemático están organizados por dominio y de acuerdo al grado educativo. A continuación, se presenta la información por grados educativos concerniente a la modelización matemática y de acuerdo a los dominios en la que se presenta.

En el *Kindergarten*, los dominios son: cantidades y números cardinales; operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; medición y datos; y geometría. En los grados primero y segundo los dominios son los mismos a excepción de cantidades y números cardinales.

Nivel	**Estándares por dominio**	
	Número y operaciones en base 10	**Geometría**
Kindergarten (5 años)		Realizan modelos con figuras geométricas que existen en el mundo a través de la construcción de figuras con diferentes materiales (por ejemplo, palitos y bolas de arcilla o plastilina) y dibujan figuras geométricas. (p. 12) MC. MGV

Primer grado (6 años)	Suman hasta el 100, incluyendo el sumar un número de dos dígitos y un número de un dígito, así como el sumar un número de dos dígitos y un múltiplo de 10, utilizan modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito, y explican el razonamiento aplicado. Entienden que al sumar números de dos dígitos, se suman decenas con decenas, unidades con unidades; y a veces es necesario el componer una decena. (p. 16). MC, MGV Restan múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 (con diferencias positivas o de cero), utilizando modelos concretos o dibujos, y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento utilizado. (p. 16). MC, MGV	
Segundo grado (7 años)	Suman y restan hasta 1000, usando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor de posición, las propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito. Comprenden que al sumar o restar números de tres dígitos, se suman o restan centenas y centenas, decenas y decenas, unidades y unidades; y a veces es necesario componer y descomponer las decenas o las centenas (p. 19). MC, MGV	

Tabla 5. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el Kindergarten, Primer y Segundo grado.

En los grados tercero cuarto y quinto los dominios son: operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones en base diez; números y operaciones – fracciones; medición y datos; y geometría.

Nivel	**Estándares por dominios**		
	Números y operaciones en base diez	**Número y operaciones - Fracciones**	**Medición y datos**
Tercer grado (8 años)		Reconocen y generan fracciones equivalentes simples. Explican por qué las fracciones son equivalentes, por ejemplo, al utilizar un modelo visual de fracciones. (p. 24). MGV Comparan dos fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador al razonar sobre su tamaño. Reconocen que las comparaciones son válidas solamente cuando las dos fracciones hacen referencia al mismo entero. Anotan los resultados de las comparaciones con los símbolos >, = o <, y justifican las conclusiones, por ejemplo, usando un modelo visual de fracciones. (p. 24). MGV	Utilizan fichas cuadradas para demostrar concretamente que el área de un rectángulo cuyas longitudes laterales son números enteros a y $b+c$, es la suma de $a \cdot b$ y $a \cdot c$. Utilizan modelos de área para representar la propiedad distributiva en el razonamiento matemático. (p. 25). MC

Cuarto grado (9 años)	Multiplican y dividen un número entero de hasta cuatro dígitos por un número entero de un dígito, y multiplican dos números de dos dígitos, Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares, y/o modelos de área. (p. 30). MGV	A través de la utilización de modelos visuales: Explican equivalencia de fracciones, comparan dos fracciones con numeradores y denominadores distintos, descomponen de varias maneras una fracción en una suma de fracciones con el mismo denominador, resuelven problemas verbales sobre sumas y restas de fracciones, entienden que un múltiplo de a/b es un múltiplo de $1/b$, resuelven problemas verbales relacionados con la multiplicación de una fracción por un entero, comparan dos decimales hasta las centésimas al razonar sobre su tamaño (p. 30). MGV	
Quinto grado (10 años)	Hallan números enteros como cocientes de números enteros con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de dos dígitos. Ilustran y explican el cálculo utilizando ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área. (p.35). MGV Suman, restan, multiplican y dividen decimales hasta las centésimas utilizando modelos concretos. (p. 35). MC	A través de la utilización de modelos visuales: Resuelven problemas verbales de suma y resta de fracciones que se refieran a un entero, incluyendo casos de denominadores distintos; resuelven problemas verbales relacionados a la división de números enteros que resulten en fracciones o números mixtos; Interpretan el producto $(a/b)\cdot q$ como tantas partes a de la repartición de q en partes iguales de b; resuelven problemas del mundo real relacionados a la multiplicación de fracciones y números mixtos; Interpretan la división de una fracción unitaria entre un número entero distinto al cero, y calculan sus cocientes; Interpretan la división de un número entero entre una fracción unitaria y calculan sus cocientes; Resuelven problemas del mundo real relacionados a la división de fracciones unitarias entre números enteros distintos al cero y la división de números enteros entre fracciones unitarias. (p. 36; p. 37). MGV	

Tabla 6. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el tercer, cuarto y quinto grado.

En sexto y séptimo grado, los dominios son: razones y relaciones proporcionales; el sistema numérico; expresiones y ecuaciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	**Estándares por dominios**		
	Sistema numérico	**Geometría**	**Estadísticas y probabilidad**

Sexto grado (11 años)	Interpretan y calculan cocientes de fracciones, y resuelven problemas verbales relacionados a la división de fracciones entre fracciones, utilizando modelos visuales de fracciones y ecuaciones para representar el problema. En general, $(a/b) \div (c/d) = ad/bc$. (p. 42). MGV	Representan figuras tridimensionales utilizando modelos planos compuestos de rectángulos y triángulos, y utilizan los modelos planos para hallar el área total de estas figuras. Aplican estas técnicas al contexto de la resolución de problemas matemáticos y del mundo real. (p. 45). MC	
Séptimo grado (12 años)			Investigan los procesos estocásticos y desarrollan, utilizan y evalúan modelos de probabilidad. (p. 50). MPE Desarrollan un modelo de probabilidad y lo utilizan para hallar la probabilidad de eventos. Comparan probabilidades a partir de un modelo de frecuencias observadas; si la coincidencia no es buena, explican las posibles causas de dicha discrepancia. (p. 51). CM, PRM Desarrollan un modelo de probabilidad uniforme al asignar la misma probabilidad a todos los resultados, y utilizan el modelo para determinar las probabilidades de eventos. Por ejemplo, si un estudiante es seleccionado al azar en una clase, hallan la probabilidad de que Juana sea seleccionada y la probabilidad de que una de mujer sea seleccionada. (p. 51). CM Desarrollan un modelo de probabilidad (el cual puede no ser uniforme) al observar frecuencias en datos generados a partir de un evento fortuito. (p. 51). CM

Tabla 7. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el sexto y séptimo grado.

En el octavo grado, los dominios son: sistema numérico; expresiones y ecuaciones; funciones; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Nivel	Estándares por dominios		
	Funciones	Geometría	Estadísticas y probabilidad

Octavo grado (13 años)	Construyen una función para representar una relación lineal entre dos cantidades. Determinan la tasa de cambio y el valor inicial de la función a partir de una descripción de una relación o a partir de dos valores (x, y), incluyendo leerlas en una tabla o en una gráfica. Interpretan la tasa de cambio y el valor inicial de una función lineal en términos de la situación que modela, y en términos de su gráfica o de una tabla de valores. (p. 55). CM	Entienden la congruencia y semejanza utilizando modelos físicos, transparencias, o programas de geometría. (p. 55). MGV	Saben que líneas rectas se utilizan ampliamente para modelar relaciones entre dos variables cuantitativas. Para diagramas de dispersión que sugieren una asociación lineal, ajustan informalmente una línea recta, y evalúan informalmente el ajuste del modelo juzgando la cercanía de los puntos de datos a la línea. (p. 56). MPE Usan una ecuación de un modelo lineal para resolver problemas en el contexto de datos bivariados de medición, interpretando la curva y la intercepción. Por ejemplo, en un modelo lineal para un experimento de biología, interpretan que una pendiente de 1.5 cm/h significa que una hora adicional de luz solar cada día está asociada con un 1.5 cm adicionales en la altura de una planta madura. (p. 56). MPE, PRM

Tabla 8. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en el octavo grado.

Finalmente, en el caso de *High School* (14-18 años) los estándares están organizados en seis categorías conceptuales: número y cantidad; álgebra; funciones; modelización; geometría; y estadísticas y probabilidad.

Los estándares relacionados con la modelización matemática en cada categoría conceptual se presentan en la tabla 6, a excepción de la propia categoría de modelización que se analizará por separado.

	Estándares por dominio
Número y cantidades	Define cantidades apropiadas para el propósito de un modelado descriptivo (p. 60). MPE Representa y modela con cantidades vectoriales (p. 61). CM
Álgebra	Representa restricciones por ecuaciones o inecuaciones o sistemas de ecuaciones o inecuaciones e interpreta las soluciones como viables o no en un contexto de modelado. Por ejemplo representa desigualdades que describen restricciones nutricionales y de costos en combinaciones de diferentes alimentos (p. 65). CM

Funciones	En una función que modela una relación entre dos cantidades, interpreta las características claves de los gráficos y las tablas en términos de las cantidades, y dibuja gráficos que muestran las características claves dada una descripción verbal de la relación. Las características claves incluyen: intercepciones; intervalos donde la función es creciente, decreciente, positiva o negativa; máximos y mínimos relativos; simetrías; comportamiento final; y periodicidad (p. 69). MGV, CM Construye una función que modela una relación entre dos cantidades (p. 70). CM Combina tipos de funciones estándar utilizando operaciones aritméticas. Por ejemplo, construye una función que modela la temperatura de un cuerpo de enfriamiento agregando una función constante a una exponencial en descomposición y relaciona estas funciones con el modelo (p. 70). CM Escribe secuencias aritméticas y geométricas tanto recursivamente como con una fórmula explícita, las utiliza para modelar situaciones y traduce entre las dos formas (p. 70). CM Distingue entre situaciones que pueden modelarse con funciones lineales y con funciones exponenciales (p. 70). MPE Para los modelos exponenciales, expresa como logaritmo la solución de $ab^{ct} = d$ donde a, c y d son números y la base b es 2, 10 o e; Evalúa el logaritmo utilizando la tecnología (p. 71). MPE Interpreta expresiones para funciones en términos de la situación que modelan (p. 71). MPE Elije funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud y frecuencia especificadas (p. 71). MPE Utiliza funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que surgen en contextos de modelado. Evalúa las soluciones utilizando la tecnología y las interpreta en términos del contexto (p. 71). MPE, PRM
Geometría	Usa formas geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (por ejemplo, modelar un tronco de árbol o el torso humano como un cilindro) (p. 78). MGV Aplica conceptos de densidad basados en área y volumen en situaciones de modelado (por ejemplo, número de personas por milla cuadrada, BTUs por pie cúbico). (p. 78). CM
Estadística y probabilidad	Ajusta una función a los datos; utiliza funciones adaptadas a los datos para resolver problemas en el contexto. utiliza funciones dadas o elije una función sugerida por el contexto. Enfatiza los modelos lineales, cuadráticos y exponenciales (p. 81). MPE, CM Interpreta la pendiente (tasa de cambio) y la intercepción (término constante) de un modelo lineal en el contexto de los datos (p. 81). MPE Decide si un modelo especificado es coherente con los resultados de un determinado proceso generador de datos, por ejemplo, utilizando simulación. Por ejemplo, un modelo dice que una moneda giratoria cae hacia arriba con probabilidad 0.5. ¿Un resultado de 5 colas en una fila le hará cuestionar el modelo? (p. 81). PRM Utiliza los datos de una encuesta por muestreo para estimar una media o proporción de la población; Desarrollar un margen de error mediante el uso de modelos de simulación para el muestreo aleatorio (p. 82). MPE Encuentre la probabilidad condicional de A dado B como la fracción de los resultados de B que también pertenecen a A, e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM Aplica la regla de suma P (A o B) = P (A) + P (B) - P (A y B), e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM Aplicar la Regla de Multiplicación general en un modelo de probabilidad uniforme, P (A y B) = P (A) P (B | A) = P (B) P (A | B) e interpreta la respuesta en términos del modelo (p. 82). MPE, PRM

Tabla 9. Estándares educativos de CCSSM relacionados con la modelización matemática en High School.

El análisis minucioso de las tablas 5 a 9 muestra que la modelización matemática tiene más presencia que en los planteamientos del NCTM, se evidencia también que al igual que en estos últimos existe una progresión gradual de la implementación de la modelización a lo largo de los diferentes niveles educativos a pesar de que a nuestro criterio aún es escasa la presencia de estándares que involucren un proceso de reflexión en la implementación de la modelización, más aún cuando el documento de CCSSM es claro al manifestar que ésta debe ser entendida como un proceso y no como una colección de temas aislados.

> El ciclo de modelado básico Implica: (1) identificar variables y seleccionar aquellas que representan características esenciales, (2) formular un modelo mediante la

> creación y selección de representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas que describan las relaciones entre las variables, (3) analizar las variables (4) interpretar los resultados de las matemáticas en términos de la situación original, (5) validar las conclusiones comparándolas con la situación, y luego de ser posible mejorar el modelo y (6) informar sobre las conclusiones y el razonamiento detrás de ellas. (NGACBP y CCSSO, 2010, p. 72).

Sin embargo, a pesar de que en los niveles superiores la modelización matemática toma mayor protagonismo, se puede evidenciar que no existe un tratamiento transversal de la misma, pues en los diferentes niveles educativos existen dominios que no poseen estándares relacionados con un proceso de modelización.

4. La modelización matemática en el ICTMA

ICTMA fue creada desde el año 1983 con el objetivo de fomentar la investigación y la enseñanza de la modelización matemática y sus aplicaciones en los diferentes niveles educativos a nivel internacional, desde primaria hasta la educación universitaria. Un aspecto a destacar de esta comunidad es que reúne tanto a educadores como a profesionales de la modelización matemática a nivel científico, hecho que se convierte en una fortaleza ya que el diálogo entre matemáticos y educadores matemáticos es una necesidad cada vez más latente.

Varios son los tópicos que se han tratado en las diferentes conferencias del ICTMA que son celebradas cada dos años, sin embargo un aspecto clave de las últimas reuniones ha sido a nuestro juicio la generación de importante literatura en torno a la construcción de una teoría que permita unificar criterios que permitan llevar la modelización matemática a las aulas. Al momento se han podido establecer parámetros generales como:

> (…) una teoría global para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática, en el sentido de un sistema de puntos de vista vinculados que cubran todos los niveles didácticos, es decir: los objetivos de aprendizaje, las razones fundamentales para alcanzar estos objetivos en los diferentes niveles de los sistemas educativos, ideas probadas sobre cómo apoyar a los profesores en la implementación de objetivos de aprendizaje y los reconocidos retos y dilemas didácticos relacionados con diferentes formas de organizar la enseñanza , análisis teóricos y empíricos de las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelización e ideas sobre diferentes formas de evaluar el aprendizaje de los estudiantes en las actividades de modelado y los obstáculos relacionados. (Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006, p. 82).

Por otra parte, la actividad investigativa mediante la implementación de varias actividades de modelización en las aulas ha permitido plantear varias perspectivas. Kaiser y Sriraman (2006) las clasifican en:

- Perspectiva realista, cuyo objetivo principal tiene un enfoque pragmático utilitario hacía la resolución de problemas del mundo real.
- Perspectiva contextual: se centra en los objetivos psicológicos, otorgando mucha importancia a la resolución de problemas de palabras.
- Perspectiva educacional: persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.
- Perspectiva socio crítica: busca la comprensión crítica del mundo circundante.

- Perspectiva epistemológica: se centra en los desarrollos teóricos del proceso de modelado.
- Perspectiva cognitiva: tiene las características más bien de una meta perspectiva y se centra en objetivos de investigación a través del análisis y comprensión de los procesos cognitivos que ocurren durante el modelado, así como en objetivos psicológicos mediante la promoción de los procesos de pensamiento matemático utilizando modelos como imágenes mentales o incluso como imágenes físicas, enfatizando a la modelización como un proceso mental tanto de abstracción como de generalización.

Sin embargo para (Blomhøj, 2008) las perspectivas no son mutuamente excluyentes y todas tienen características distintivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática.

Blum & Borromeo (2009) bajo la perspectiva cognitiva, recomiendan el siguiente esquema para un proceso de modelización a ser trabajado por los estudiantes: 1) Entendimiento de la tarea, para ello plantean que es necesario leer el texto con precisión e imaginar la situación claramente, 2) Establecer un modelo, para lo cual se buscarán los datos necesarios así como las relaciones matemáticas, 3) Usar procedimientos matemáticos adecuados y llegar a un resultado, 4) Explicar el resultado y en caso de ser necesario regresar al paso 1.

5. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano

El nivel de Educación General Básica (EGB) en Ecuador está dividido en cuatro subniveles: preparatoria (5 años de edad), básica elemental (6-8 años de edad), básica media (9-11 años de edad) y básica superior dirigida a estudiantes de 12-14 años de edad (Decreto 1241/2012). En el currículo vigente, a partir del subnivel Elemental y hasta el Bachillerato inclusive, la asignatura de matemáticas está organizada en tres grandes bloques: 1) álgebra y funciones; 2) geometría y medida; y 3) estadística y probabilidad (Ministerio de Educación del Ecuador [MinEduc], 2016).

El tratamiento metodológico que se da a la matemática en los primeros subniveles posee un carácter lúdico, poniendo especial énfasis en el manejo de material concreto como recurso didáctico que facilite alcanzar los aprendizajes en los estudiantes, mientras que a partir del subnivel medio se otorga un tratamiento más abstracto, teniendo siempre presente la resolución de problemas de la vida real como elemento orientador en todos los subniveles.

> En el nivel de Educación General Básica, en especial en los subniveles de preparatoria y elemental la enseñanza del área está ligada a las actividades lúdicas que fomentan la creatividad, la socialización, la comunicación, la observación, el descubrimiento de regularidades, la investigación y la solución de problemas cotidianos; el aprendizaje es intuitivo, visual y, en especial, se concreta a través de la manipulación de objetos para obtener las propiedades matemáticas deseadas e introducir a su vez nuevos conceptos. A partir del subnivel medio y superior de EGB se van complejizando de forma sistemática los contenidos y procesos matemáticos, los estudiantes utilizan definiciones, teoremas y demostraciones lo que conlleva al desarrollo de un pensamiento reflexivo y lógico que les permite resolver problemas de la vida real. (MinEduc, 2016, p. 218).

Si bien el término "modelización matemática" aparece poco de forma explícita a lo largo de todo el currículo de EGB, términos asociados como "modelo", "modelos funcionales" y "modelos matemáticos" son utilizados con más frecuencia, por ejemplo, el primer objetivo general de la asignatura establece que, al terminar la escolarización obligatoria, los estudiantes serán capaces de:

> Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de *modelos funcionales*, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto. (MinEduc, 2016, p. 228).

A continuación, se presenta el tratamiento que se da a la modelización matemática en cada subnivel educativo de EGB y en el nivel educativo de Bachillerato, considerando que cada uno contempla los siguientes componentes: objetivos, destrezas con criterios de desempeño por bloque curricular, criterios de evaluación, orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, e indicadores de evaluación.

5.1. Subnivel de EGB Preparatoria

A diferencia de los demás subniveles, en preparatoria no se trabajan los tres grandes bloques debido a que se trabaja con un ámbito de desarrollo y aprendizaje denominado relaciones lógico-matemáticas. En ninguno de los componentes de este subnivel se evidencia un tratamiento de la modelización matemática.

5.2. Subnivel de EGB Elemental

El objetivo de este subnivel relacionado con la modelización matemática es:

"Utilizar objetos del entorno para formar conjuntos, establecer gráficamente la correspondencia entre sus elementos y desarrollar la comprensión de modelos matemáticos" (MinEduc, 2016, p. 509).

En la tabla 10 se muestran los demás componentes del subnivel asociados a la modelización matemática (cabe señalar que no se indican criterios e indicadores de evaluación, por lo que se han omitido de la tabla 10).

Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios
Reconocer y diferenciar los elementos y propiedades de cilindros, esferas, conos, cubos, pirámides de base cuadrada y prismas rectangulares en objetos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV Identificar formas cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares en cuerpos geométricos del entorno y/o modelos geométricos (p. 512). MC, MGV	El aprendizaje del estudiante se evidencia cuando este nombra las características de los objetos de su entorno y los relaciona con lo aprendido. Además, cuando es capaz de crear un modelo geométrico físico con diversos materiales, tomando en cuenta las características de los cuerpos y figuras geométricas; y de explicar el procedimiento realizado y los resultados del mismo. También clasifica los cuerpos y figuras geométricas en diferentes escenarios recreados, de acuerdo a sus características y/o propiedades (p. 519).

Tabla 10. La modelización matemática en el subnivel de EGB Elemental (MinEduc, 2016)

5.3. Subnivel de EGB Media

De los objetivos de este subnivel, el único que guarda relación directa con la modelización matemática es:

"Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas y la generación de sucesiones con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, como estrategias para solucionar problemas del entorno, justificar resultados, comprender modelos matemáticos y desarrollar el pensamiento lógico-matemático (MinEduc, 2016, p. 709).

A pesar de que uno de los objetivos de este subnivel menciona la comprensión de modelos matemáticos, los demás componentes de este subnivel omiten este tema.

5.4. Subnivel de EGB Superior

De los diferentes objetivos que existen en este subnivel educativo, ninguno hace alusión específica a la modelización matemática. En tanto que los componentes de este subnivel que sí tratan este tema se presentan en la tabla 11 (como puede apreciarse en la tabla, no aparecen términos asociados a la modelización en las orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios, por lo que dicha columna se ha omitido).

Destrezas con criterios de desempeño	Criterios de evaluación	Indicadores de evaluación
Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas (p. 883). CM Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas (p. 883). MPE Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 884). CM. PRM	Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología (p. 892)	Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema (p. 893). Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia (n=1, 2, 3), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares (p. 893).

Tabla 11. La modelización matemática en el subnivel de EGB Superior (MinEduc, 2016)

5.5. Nivel de Bachillerato

En el caso del Bachillerato existen dos posibilidades: a) Ciencias y b) Técnico, sin embargo, la asignatura de matemáticas forma parte de un tronco común, lo que hace que todos los estudiantes reciban la misma formación matemática independientemente de la alternativa que elijan. Es importante indicar que en el caso del Bachillerato en Ciencias existe un número de horas a discreción de las diferentes instituciones educativas, que en función de los intereses de los estudiantes pueden ser destinadas a fortalecer o ampliar la formación matemática u otras áreas de conocimiento.

En la introducción del currículo matemático de Bachillerato se manifiesta explícitamente la importancia que deben tomar los procesos relacionados con la modelización matemática. “En el bachillerato, los contenidos matemáticos tienen un carácter más formal, se enfatizan las aplicaciones y la solución de problemas mediante la elaboración de modelos” (MinEduc, 2016, p. 1250).

Por su parte, los objetivos del bachillerato son los mismos que los objetivos generales del área y sólo el primero de ellos que fue ya citado en líneas anteriores pone de relieve aspectos relacionados con la modelización matemática.

Sin embargo, en el bachillerato toma un poco más de protagonismo la modelización matemática, conforme podemos apreciar en la tabla 12.

Destrezas con criterios de desempeño	**Criterios de evaluación**	**Orientaciones metodológicas para la evaluación de los criterios**	**Indicadores de evaluación**
Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n=-1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), cuadráticas, derivadas de funciones cuadráticas, polinomiales, racionales, trigonométricas, exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos (p. 1255; p. 1256; p. 1257; p. 1260). MPE, CM, PRM Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de	Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.	Se quiere comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones;	Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC (p. 1272). Reconoce funciones polinomiales de grado n, opera con funciones polinomiales de grado ≤4 y racionales de grado ≤3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados (p. 1272). Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados (p. 1272).

producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1263). CM, PRM		y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones (p. 1272).	Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema (p. 1279).

Tabla 12. La modelización matemática en el currículo ecuatoriano vigente de Bachillerato (MinEduc, 2016)

A diferencia del currículo matemático de EGB se puede apreciar que en el Bachillerato los procesos relacionados con la modelización matemática tienen una mejor articulación y presentan una organización más sistemática.

En términos generales observamos que si bien en el currículo ecuatoriano también se evidencia un progreso gradual de la modelización, el hecho de que ésta no esté presente en todos los subniveles ocasiona problemas de desarticulación similares a los discutidos en líneas anteriores.

6. La modelización matemática en el currículo español

En el currículo básico de Educación Primaria (6-12 años) vigente en España, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco grandes bloques en todos los niveles, desde 1º hasta 6º: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números; 3) medida; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad. Cada bloque, a su vez, está subdivido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término "modelización matemática" no aparece en ninguna ocasión en el currículo de matemáticas, mientras que otras nociones aparecen únicamente para definir las matemáticas como:

> (…) un conjunto de ideas y formas que nos permiten analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, para obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas y actuar, preguntarnos, *obtener modelos* e identificar relaciones y estructuras, de modo que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

A pesar de la escasez de referencias explícitas a la modelización matemática cabe señalar que, por su carácter transversal, en la presentación de la asignatura de matemáticas de Educación Primaria se exponen ya las primeras directrices curriculares vinculadas a la modelización, al hacer referencia al aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas en contextos reales:

> El trabajo en esta área en la Educación Primaria estará basado en la experiencia; los contenidos de aprendizaje parten de lo cercano, y se deberán abordar en contextos de identificación y resolución de problemas. Las matemáticas se

> aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados" (Real Decreto 126/2014, p. 19386).

Como puede apreciarse, se alude a aspectos como la planificación del proceso de resolución y el uso de estrategias y procedimientos diversos, sin hacer, pero mención directa a la modelización. Aun así, considerando la definición de modelización matemática que se asume en este artículo, en la tabla 13 se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje sobre resolución de problemas que los autores hemos asociado a la modelización matemática.

	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Planificación del proceso de resolución de problemas: - Análisis y comprensión del enunciado. - Estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc. - Resultados obtenidos. Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales (p. 19388).	1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones. 4. Profundizar en problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc. 5. Realizar y presentar informes sencillos sobre el desarrollo, resultados y conclusiones obtenidas en el proceso de investigación. 6. Identificar y resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas (p. 19388).	1.1. Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.3. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc. 2.4. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.5. Identifica e interpreta datos y mensajes de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (facturas, folletos publicitarios, rebajas…). 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. 3.2. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen. 4.1. Profundiza en problemas una vez resueltos, analizando la coherencia de la solución y buscando otras formas de resolverlos. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc. 5.1. Elabora informes sobre el proceso de investigación realizado, exponiendo las fases del mismo, valorando los resultados y las conclusiones obtenidas (p. 19388).
Bloque 2. Números; Bloque 3. Medida; Bloque 4. Geometría; Bloque 5. Estadística y probabilidad	Resolución de problemas de la vida cotidiana (p. 19390). Resolución de problemas de medida (p. 19392) (En los bloques 4 y 5 la resolución de problemas no aparece como contenido)	Al final de cada bloque se expone el mismo criterio de evaluación: Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas (p. 19390; p. 19392; p. 19393).	Al final de cada bloque se exponen los mismos estándares de aprendizaje evaluables: Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo (p. 19390; p. 19392; p. 19393).

Tabla 13. La modelización matemática en el currículo español vigente de Educación Primaria (Real Decreto 126/2014)

Como se observa en la tabla 13, en el currículo de Educación Primaria no aparecen contenidos sobre la modelización matemática – motivo por el cual no se han categorizado los contenidos , y este proceso matemático se vincula a la resolución de problemas en contextos reales, tal como se ha indicado. Concretamente, se enfatizan los procesos de razonamiento y estrategias de resolución, junto con la descripción y análisis de situaciones de cambio para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, que -sin mencionarlo- son algunas de las principales finalidades de la modelización matemática.

En el currículo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y más concretamente en el primer ciclo (12-14 años), las matemáticas se trabajan en ambos cursos en la asignatura troncal “Matemáticas”. En el segundo ciclo, en cambio (14-16 años), se puede elegir entre las asignaturas “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas” o “Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas”. En todos los niveles, la asignatura de matemáticas está organizada en cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) geometría; 4) funciones; y 5) estadística y probabilidad.

En Bachillerato, existen diversas posibilidades en función de la modalidad: a) Ciencias (“Matemáticas” I y II); b) Humanidades y Ciencias Sociales (para el itinerario de ciencias sociales, “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” I y II); c) Artes (sin matemáticas). En la asignatura de “Matemáticas” hay cinco bloques: 1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2) números y álgebra; 3) análisis; 4) geometría; y 5) estadística y probabilidad; mientras que en la asignatura “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales” no se incluye el bloque de geometría.

Como en el caso de Educación Primaria, en todos los niveles de ESO y Bachillerato, cada bloque está subdivido en tres categorías: a) contenidos; b) criterios de evaluación; y c) estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 126/2014).

El término “modelización matemática” aparece en la introducción del currículo de matemáticas tanto de ESO como de Bachillerato para referirse a las finalidades de las matemáticas:

> Las matemáticas adquieren un papel relevante como herramienta adecuada para adquirir y consolidar el conocimiento, desarrollan la capacidad de reflexionar y razonar acerca de los fenómenos sociales y proporcionan instrumentos adecuados para la representación, *modelización* y contraste de las hipótesis planteadas acerca de su comportamiento. (Real Decreto 1105/2014, p. 381; p. 399).

A diferencia del currículo de matemáticas de Educación Primaria, en el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” del currículo de ESO y Bachillerato, que como se ha indicado se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático, se hace mención explícita a la matematización y *modelización*, junto a la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. Al tratarse de un bloque transversal, los contenidos, criterios y estándares referentes a la modelización aparecen de forma idéntica en todos los niveles:

Bloque	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluados
Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419) MPE, CM, PRM	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 399; p. 404; p. 409; p. 414; p. 419).	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad (p. 382; p. 386; p. 391; p. 395; p. 400; p. 404; p. 409; p. 415; p. 420).

Tabla 14. La modelización matemática en el currículo español vigente de ESO y Bachillerato (Real Decreto 1105/2014)

A partir de los datos analizados, se concluye que en el currículo español de matemáticas de ESO y Bachillerato la modelización matemática se considera un proceso matemático para trabajar los diferentes bloques de contenido a través de la resolución de problemas en contextos tanto reales como matemáticos.

A partir del análisis de los criterios de evaluación de la última tabla se puede inferir que los contenidos trabajados en el currículo español de ESO y Bachillerato relacionados con la modelización matemática están relacionados directamente con la utilización de modelos previamente establecidos, la construcción de modelos y el uso de un proceso de reflexión en la implementación de la modelización.

7. Consideraciones Finales

La revisión de los diferentes documentos mencionados en este artículo pone de manifiesto la presencia, aunque en diferentes medidas, de la modelización matemática en los currículos de los niveles educativos de primaria, secundaria y bachillerato o su equivalente en Estados Unidos, Ecuador y España. En términos generales, a pesar de que la modelización matemática es un proceso que debería incrementarse en mayor medida conforme los estudiantes avanzan en los diferentes niveles educativos, observamos que al menos en ciertos documentos curriculares no ocurre:

- Un aspecto común a todos los documentos curriculares analizados es la implementación gradual de los procesos de modelización, en donde los modelos concretos y los modelos gráficos visuales son utilizados predominantemente en los primeros niveles escolares (3 a 11 años). Las utilizaciones de modelos previamente establecidos de carácter un poco más formal son utilizados con más frecuencia en los niveles escolares intermedios (12 a 14 años) y la creación de modelos con su respectivo análisis, interpretación y juzgamiento del proceso de modelización es casi único en los últimos niveles educativos estudiados (15-18 años). Si bien el proceso de reflexión toma mayor importancia en los últimos niveles educativos es importante que se comience a desarrollar la criticidad y procesos de reflexión en los estudiantes desde las primeras edades.

- En Estados Unidos se puede notar como una fortaleza que los estándares emitidos desde el NCTM propongan trabajar la modelización matemática desde tempranas edades, sin embargo, en los niveles superiores los estándares para trabajar la modelización no están explícitos. La ventaja es que el NCTM cada vez viene realizando mayores esfuerzos por generar literatura que permita llevar las modelizaciones matemáticas a las aulas.

- Por su parte los CCSSM permiten observar una mayor incorporación de la modelización matemática a lo largo de los diferentes niveles, no obstante, se puede notar un cierto nivel de desarticulación, ya que existen algunos dominios en algunos niveles educativos en los cuales no se trabaja la modelización matemática.
- En el caso ecuatoriano de manera similar se nota una desarticulación en el tratamiento de la modelización matemática, pues en ocasiones dentro de un mismo grado educativo se trabaja la modelización matemática, pero solo en ciertos componentes curriculares.
- En España, a pesar de que en Educación Primaria se otorga mucha importancia a la resolución de problemas, es un inconveniente que la modelización matemática no esté incorporada de forma explícita en el currículo oficial. Esta situación mejora mucho en la Educación Secundaria y Bachillerato, donde se puede notar un tratamiento importante a lo largo de los diferentes bloques de estudio.

Finalmente consideramos que la modelización matemática debe ser entendida como un elemento transversal que atraviese tanto los diferentes dominios o bloques matemáticos así como los diferentes niveles educativos y por tanto debe estar explícita en las diferentes partes del currículo matemático, empero pensamos que no basta simplemente con enunciarla de manera formal, es importante también orientar al profesorado sobre cómo ponerla en práctica en el aula de clases y para ello las iniciativas surgidas desde diferentes organismos internacionales como el NCTM o el ICTMA son un gran aporte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., García, L.M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA 54,* 51-53.

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research (Vol. 1–13). Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/811

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1era ed., pp. 222–231). Chichester: Horwood.

Common Core Standards Writing Team (2013). *Progressions for the Common Core Standards in Mathematics (draft) High School, Modeling.* Tucson, Ariz: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.

Ecuador. Decreto Ejecutivo 1241/2012, de 25 de julio, por el que se establece el Reglamento General a la ley Orgánica de Educación Intercultural.

España. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Hirsch, C., & McDuffie, A. (2016). *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. (National Council of Teachers of Mathematics, Ed.) (1era ed.). Reston.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 82–85.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *38*(3), 302–310.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria*. Recuperado de: http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Curriculov2.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional Standars for Teaching Mathematics. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assesment Standars for school Mathematics. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington D.C. Publicado en castellano: Estándares Estatales Comunes de Matemáticas, San Diego, San Diego County Office of Education (2012).

Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools.* Nueva York: The Falmer Press.

Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional.* Madrid: Síntesis.

Autores: César Trelles Zambrano: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Cuenca (Ecuador). Estudiante de Doctorado en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas tanto en la formación del profesorado como en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria y bachillerato. cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec

Alsina, Ángel: Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina. angel.alsina@udg.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 164-183

¡Estadístic@s en acción!: Una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la estadística revisitada desde la teoría de la cognición situada y una perspectiva constructivista del aprendizaje

Maria Paula Dieser

Fecha de recepción: 24/05/2017
Fecha de aceptación: 14/08/2017

Resumen	La enseñanza y aprendizaje de la estadística en diferentes niveles de enseñanza es, desde hace décadas, un tema de discusión y análisis en la comunidad educativa y académica. Múltiples son los planteos y propuestas que pueden encontrarse en la literatura vinculados a la temática. En este trabajo se relata una propuesta didáctica, atravesada por la resolución de problemas y el desarrollo de proyectos con datos reales, en un curso de estadística para estudiantes universitarios. Dicha experiencia es analizada desde diversas teorías del enseñar y aprender como la teoría de la cognición situada y el constructivismo. **Palabras clave**: estadística, enseñanza y aprendizaje, resolución de problemas, proyectos con datos reales.
Abstract	Teaching and learning of statistics at different levels of education has been a discussion and analysis topic in educational and academic community. Many arguments and proposals can be found in the literature related to this topic. In this paper, a didactic proposal for undergraduate statistical course, caracterized by problem solving and the development of projects with real data, is reported. This experience is analyzed from various theories of teaching and learning as the theory of situated cognition and constructivism. **Keywords**: statistics, teaching and learning, problem solving, projects with real data.
Resumo	O ensino e aprendizagem da estatística em diferentes níveis de educação é, há décadas, um tema de discussão e análise na comunidade educativa e acadêmica. Muitiplos são os argumentos e propostas que podem ser encontrados na literatura relacionada à temática. Nesse trabalho se relata uma proposta didática, atravessada pela resolução de problemas e o desenvolvimento de projetos com dados reais, num curso de estatística para estudantes universitários. Essa experiência é analisada a partir de diversas teorias de ensino e aprendizagem como a teoria da cognição situada e o construtivismo. **Palavras-chave:** estatística, ensino e aprendizagem, resolução de problemas, projetos com dados reais.

1. Introducción

Durante la última década, como respuesta a los imperativos sociales que demandan nuevas competencias profesionales y a las investigaciones sobre la manera de enseñar y aprender de las personas, se piensa en una educación eficaz en la medida que ésta sea capaz de desarrollar habilidades de alto nivel que ayuden a los estudiantes a aprender a lo largo de toda su vida, *i.e.* una educación capaz de ofrecer a los ciudadanos un conocimiento sólido y a la vez flexible que pueda dar respuestas ajustadas a las diferentes situaciones que se presentan (Barberà, 2005).

La enseñanza de la estadística no ha quedado ajena a esta perspectiva de transformación, siendo objeto de un marcado interés en la comunidad educativa. Varios son los autores que hablan de construir una cultura estadística. Gal (2002) se refiere a dos componentes interrelacionados: la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, y la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tal información. Franklin *et al.* (2005) indican que la enseñanza de la estadística debe ayudar a los estudiantes a aprender los elementos básicos del pensamiento estadístico: la importancia de los datos, la ubicuidad de la variabilidad, su cuantificación y explicación. Wild & Pfannkuch (1999), afirman que el razonamiento estadístico, esencial para el aprendizaje, incluye cinco componentes fundamentales: reconocer la necesidad de los datos, la transnumeración, percibir la variabilidad, razonar con modelos estadísticos e integrar la estadística al contexto.

Asimismo, es necesario diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos estadísticos requiere no sólo de conocimientos técnicos (construir un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo usar un concepto o gráfico dado) (Pozo & Postigo, 1993). Los problemas y ejercicios presentes en libros de texto sólo se concentran en conocimientos técnicos. Sin embargo, el trabajo con problemas que involucran datos reales demanda utilizar conocimientos estratégicos.

En este contexto, Batanero, Díaz, Contreras, & Arteaga (2011) afirman que proponer a los estudiantes el desarrollo de proyectos con datos reales, sugeridos por el equipo docente o diseñados por los mismos estudiantes, permite reemplazar la introducción de conceptos y técnicas descontextualizadas, aplicadas a problemas tipo y difíciles de encontrar en la vida real, por una actividad integral donde se presenten y desarrollen las diferentes fases de una investigación estadística que motive a los estudiantes y favorezca la construcción del conocimiento, entendiendo además que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

Este tipo de experiencias requiere, indudablemente, un rol activo del estudiante en el proceso de aprendizaje y un rediseño de la gestión del proceso de enseñanza, caracterizado por el asesoramiento y acompañamiento permanente del profesor, monitoreando el trabajo del estudiante y guiando su aprendizaje de manera de favorecer la construcción del conocimiento, brindar oportunidades de aplicación de técnicas descriptivas e inferenciales en un contexto real, y desarrollar las capacidades de formulación de conjeturas, argumentación, y creatividad.

Adicionalmente, en las últimas décadas, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han influido enormemente en el mundo educativo. El aprendizaje y la enseñanza de la estadística no han sido la excepción. Aparicio Acosta (2000) señala que, tradicionalmente, la enseñanza estadística estuvo dominada por un fuerte componente formal, mostrando en primer lugar los fundamentos matemáticos y discutiendo a continuación algunas aplicaciones, resultando los cursos de estadística poco útiles y de difícil comprensión para los estudiantes. No obstante, la introducción de las TIC en el proceso de enseñanza y de aprendizaje ha tenido un gran impacto, contribuyendo y propiciando la innovación en dicho proceso. En este sentido, diversos autores informan acerca de los beneficios que genera el uso de *software* específico en cursos de estadística, no sólo como una herramienta de cálculo, sino como un potente recurso didáctico, permitiendo una aproximación más significativa en la enseñanza de la disciplina (Díaz Godino, 1995; Medina Martínez & Medina Martínez, 2010).

Como consecuencia de todas estas consideraciones, desde 2013, se propone a los estudiantes de las asignaturas “Estadística” y “Probabilidad y Estadística II” de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), Argentina, la realización de proyectos con datos reales desarrollando las diferentes etapas de una investigación estadística, publicando las evidencias de aprendizaje a través de ePortfolios, y utilizando comunidades virtuales para la creación de redes de aprendizaje (Cavero & Dieser, 2017; Dieser, 2014; Dieser & Cavero, 2013). La propuesta es parte de una estrategia didáctica más amplia que involucra la resolución de problemas y actividades tendientes a la comprensión de conceptos. En este trabajo, se reseña y analiza dicha propuesta desde algunas teorías del aprendizaje y de la enseñanza.

El documento se estructura en cuatro partes: una primera en la que se exponen algunos elementos teóricos que permiten fundamentar la propuesta didáctica que se describe en la segunda sección, explicitando los objetivos y contenidos involucrados y detallando las estrategias y actividades desarrolladas; una tercera en la que se presentan algunos resultados obtenidos de la experiencia; y una cuarta y última parte presentando algunas conclusiones y consideraciones que justifican la reproducción y mejora de la propuesta en futuras implementaciones.

2. Fundamentación de la propuesta

Se exponen a continuación algunas argumentaciones teóricas que permiten analizar la propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística en cursos de nivel superior presentada en este trabajo.

2.1. Teorías del aprendizaje

La propuesta didáctica que se describe en la siguiente sección está fuertemente atravesada por un enfoque constructivista del aprendizaje. Para estas teorías, la mente (sujeto) y el mundo (objeto) se construyen mutuamente, de modo que el conocimiento es siempre resultado de una interacción entre la información nueva y las representaciones anteriores, donde aprender es construir dinámicamente modelos para interpretar la información que se recibe; lo que implica reestructurar los conocimientos anteriores y adoptar un rol activo basado en la reflexión y la toma de consciencia (Pozo, 2008a).

Los postulados de construcción dinámica y reestructuración de conocimientos representan una idea central de las teorías constructivistas que abogan por una de las tres características fundamentales que, según afirma Pozo (2008b), debe poseer el buen aprendizaje: producir un cambio duradero. Ésta representa, además, una de las dificultades a las que se enfrenta el aprendizaje mismo: aprender implica necesariamente desaprender o reaprender, dejar de hacer, pensar o sentir aquello que se creía o percibía válido, obligando a reconstruir las representaciones implícitas, y reflexionando sobre ellas para poder así modificarlas. Sin embargo, si bien aprender implica un cambio, no todos los cambios producen aprendizajes de la misma calidad (Pozo, 2008b). Los aprendizajes constructivos tienden a ser más estables y duraderos, pero, como contrapartida, suelen ser más difíciles de lograr.

Desde las teorías constructivistas se proponen diversos enfoques para entender el aprendizaje, entre ellos la teoría del aprendizaje significativo propuesta por David Ausubel, y la construcción social del conocimiento defendida por Lev Vigotsky. A continuación, se describe brevemente cada una de ellas.

Según Ausubel (1976), el aprendizaje es significativo por definición. Durante el aprendizaje significativo, el estudiante relaciona de manera sustancial la nueva información (ideas culturalmente significativas) con sus experiencias y conocimientos previos (ideas de anclaje). Para que el aprendizaje significativo se produzca, se requiere disposición del alumno e intervención del docente en esa dirección, siendo de suma importancia la forma en que se plantean los materiales de estudio y las experiencias educativas. Díaz Barriga (2003) resalta que, si se logra el aprendizaje significativo, se trasciende la repetición memorística de contenidos inconexos y se logra construir significado, dar sentido a lo aprendido, y entender su ámbito de aplicación y relevancia en situaciones académicas y cotidianas. Pozo Municio & Pérez Echeverría (2009) agregan que este tipo de aprendizaje facilita la generalización o transferencia en mayor medida que el aprendizaje repetitivo, e incrementa la capacidad de recuperar y usar esos conocimientos en nuevas situaciones. Por lo tanto, el aprendizaje significativo, y en particular constructivo, sería potencialmente útil para alcanzar una segunda característica del buen aprendizaje: ser transferible a otras situaciones (Pozo, 2008b).

Desde una visión vigotskiana, el aprendizaje implica el entendimiento e internalización de los símbolos y signos de la cultura y grupo social al que se pertenece, los estudiantes se apropian de las prácticas y herramientas culturales a través de la interacción con miembros más experimentados (Díaz Barriga, 2003). Estas ideas, reunidas en la denominada teoría sociocultural, ponen el acento en la participación proactiva de los alumnos con el ambiente que les rodea, siendo el desarrollo cognoscitivo fruto de un proceso colaborativo. Particularmente, Vigotsky sostiene que los aprendices desarrollan su aprendizaje mediante la interacción social, adquiriendo nuevas y mejores habilidades cognoscitivas como proceso lógico de su inmersión a un modo de vida. De allí la importancia que, en este enfoque, tienen los procesos de andamiaje del docente y los pares, la negociación mutua de significados y la construcción conjunta y colaborativa de los saberes. Esta orientación, colaboración y supervisión resultan particularmente necesarias para ofrecer ayudas ajustadas a los estudiantes permitiendo el cruce de la zona de desarrollo próximo, entendida como la brecha entre lo que ya son capaces de hacer y comprender, y lo que aún no pueden conseguir por sí solos. En otras palabras, el soporte y la orientación adecuadas permiten el progreso adecuado en la formación y consolidación de sus nuevos conocimientos y aprendizajes. En cualquier caso, este tipo de interacciones sociales que favorecen y permiten el aprendizaje están inmersas en un medio real y concreto en el que el estudiante, docente, y pares se mueven para aprender a partir de la práctica misma. Esto tiende a fortalecer el tercer rasgo prototípico del buen aprendizaje manifestado por Pozo (2008b): ser consecuencia de una práctica directa.

2.2. Teorías de la enseñanza

A fin de promover el aprendizaje significativo a través de una propuesta didáctica caracterizada por una visión vigotskiana del aprendizaje, el modelo de enseñanza situada se presenta especial y potencialmente cautivador. Este enfoque instruccional, derivado de las teorías de la cognición situada, parte de la premisa de que el conocimiento es situado, es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza (Díaz Barriga, 2003). Además, tal como indican Pozo Municio & Pérez Echeverría (2009), para lograr una enseñanza eficaz apoyada en los enfoques constructivistas del aprendizaje, es preciso: (a) orientar este último hacia la comprensión, en lugar de promover la mera repetición de lo aprendido; y (b) fomentar un uso estratégico o competente de los conocimientos adquiridos de manera que permitan resolver problemas o tareas realmente nuevas, en lugar de limitarse a aplicar tales conocimientos en forma rutinaria.

La enseñanza situada destaca la importancia de la actividad y el contexto para el aprendizaje, entendiendo que aprender y hacer son acciones inseparables, puesto que saber qué (*know what*) y saber cómo (*know how*) son categorías estrechamente ligadas en cualquier experiencia de aprendizaje significativo. En consecuencia, reconoce que el aprendizaje es, ante todo, un proceso de enculturación en el que los estudiantes se integran gradualmente a una comunidad o cultura de prácticas sociales. Según Baquero (2002), citado por Díaz Barriga (2003), el aprendizaje debe entenderse como un proceso multidimensional de apropiación cultural, ya que se trata de una experiencia que involucra pensamiento, afectividad y acción.

Varias son las estrategias de enseñanza, *i.e.* "los procedimientos que el profesor [...] utiliza de manera flexible, adaptativa, autorregulada y reflexiva para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos" (Díaz Barriga, 2003, p. 8), postuladas por los teóricos de la cognición situada. Entre ellas pueden mencionarse: (a) el aprendizaje basado en la resolución de problemas auténticos, y (b) el trabajo mediante proyectos. Ambas estrategias están centradas en el aprendizaje experiencial y situado, y se enfocan en la construcción del conocimiento en contextos reales, en el desarrollo de las capacidades reflexivas, críticas y en la participación en prácticas sociales auténticas de la comunidad.

El aprendizaje basado en la solución de problemas auténticos consiste en presentar situaciones reales o simulaciones vinculadas a la aplicación de un ámbito de conocimiento o ejercicio profesional, en las cuales el estudiante debe analizar la situación y elegir o construir una o varias alternativas viables de solución (Jiménez Aleixandre, 2010). Este tipo de experiencias favorecen una mayor retención y comprensión de conceptos, aplicación e integración del conocimiento, motivación por el aprendizaje y desarrollo de habilidades de alto nivel (Díaz Barriga, 2003).

Por su parte, el trabajo mediante proyectos consiste en asignar, a un estudiante o a un grupo pequeño, una tarea formal sobre un tópico relacionado con un área de estudio, organizada alrededor de actividades desde una perspectiva experiencial, donde el alumno aprende a través de la experiencia personal, activa y directa con el fin de iluminar, reforzar y asimilar el aprendizaje cognitivo (Díaz Barriga, 2003). Este tipo de experiencias se caracterizan por construir conocimiento de tipo social, actitudinal y habilidades cada vez más complejas, poniendo énfasis en asuntos del mundo real de interés práctico para los estudiantes, focalizándose en preparar a los alumnos para la ciudadanía.

La resolución de problemas auténticos y el desarrollo de proyectos con datos reales son dos de las estrategias de enseñanza utilizadas en la propuesta didáctica que se describe en la siguiente sección, a fin de lograr un aprendizaje significativo de la estadística, construido socialmente en un curso universitario de grado.

3. Descripción de la propuesta

Se detallan en esta sección los destinatarios de la propuesta, los objetivos didácticos y cognitivos perseguidos, los contenidos involucrados, y la descripción de las estrategias y actividades desarrolladas.

3.1. Destinatarios

La propuesta didáctica descripta en el presente trabajo está destinada a estudiantes de Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática de la FCEyN de la UNLPam que se encuentran cursando “Estadística” y “Probabilidad y Estadística II” en el segundo cuatrimestre del tercer año de la carrera respectiva.

Se trata de estudiantes que, se entiende, han elegido naturalmente la matemática como área de estudio y actividad laboral desde un perfil de la enseñanza o la investigación, por lo que tendrían una actitud positiva frente a experiencias educativas como la que aquí se propone, con potencialidades de ser escalada y transferida a un futuro trabajo profesional docente, y vinculada con el área de la investigación matemática aplicada.

En relación a la formación disciplinar específica, son estudiantes que han cursado previamente asignaturas referidas a temas propios del análisis matemático de una y dos variables, lógica, álgebra y álgebra lineal, nociones de geometría axiomática y analítica, y teoría de la probabilidad, lo que supone que han aprendido los conceptos matemáticos necesarios y suficientes para iniciar el aprendizaje de los temas de estadística tratados en el espacio curricular en cuestión.

Asimismo, han pasado por asignaturas vinculadas con la informática y la programación que le aportan un marco de conocimiento adecuado para el desarrollo de las aplicaciones que requieran de la programación de algoritmos adecuados para llevar adelante las investigaciones estadísticas propuestas.

Los estudiantes de Profesorado han cursado, además, diversas asignaturas del área de formación docente lo que, potencialmente, les permitiría vivenciar y evaluar la propuesta de enseñanza y de aprendizaje desde una perspectiva vinculada con la futura práctica profesional.

3.2. Objetivos

La propuesta de enseñanza y de aprendizaje que se describe y analiza en este trabajo tiene los siguientes objetivos didácticos:

- Promover el aprendizaje activo de la estadística a partir del trabajo con datos reales facilitando el logro de los objetivos de aprendizaje propuestos, y contribuyendo a la formación de significados.
- Estimular una mayor reflexión, compromiso y proactividad en los estudiantes.
- Estimular el pensamiento crítico.
- Fomentar el uso de las TIC como herramientas necesarias en la resolución de problemas estadísticos con datos reales.
- Ofrecer oportunidades de transferencia de los conceptos aprendidos aplicándolos a situaciones problemáticas concretas en un contexto real.
- Favorecer el establecimiento de redes de aprendizaje.

Mediante la propuesta didáctica aquí presentada, se pretende que los estudiantes sean capaces de:

- Reconocer la utilidad de la estadística para explorar, analizar y resumir la información contenida en un conjunto de datos estadísticos, así como para hacer inferencias y predicciones sobre una población, valorando su buen uso en situaciones concretas.
- Distinguir población, muestra, unidad experimental u observacional, variable, estadístico y parámetro en un problema estadístico.

- Clasificar variables medidas u observadas en un conjunto de individuos.
- Explorar, analizar y resumir información contenida en una muestra estadística mediante tablas, gráficos y medidas adecuadas según la cantidad y tipos de variables y características de la muestra.
- Estimar y formular hipótesis sobre algunas características de interés de una población en problemas concretos y aplicar técnicas inferenciales adecuadas para la predicción o toma de decisiones a partir de evidencias adecuadas.
- Utilizar *software* estadístico y programar, de ser necesario, algoritmos que permitan resolver problemas estadísticos concretos.
- Justificar la elección y utilización de técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales adecuadas para llevar adelante una investigación estadística propia, así como evaluar la adecuación de las técnicas utilizadas en investigaciones de pares.

3.3. Contenidos

Los contenidos conceptuales están distribuidos en seis unidades temáticas y estructurados según el mapa conceptual de la Figura 1.

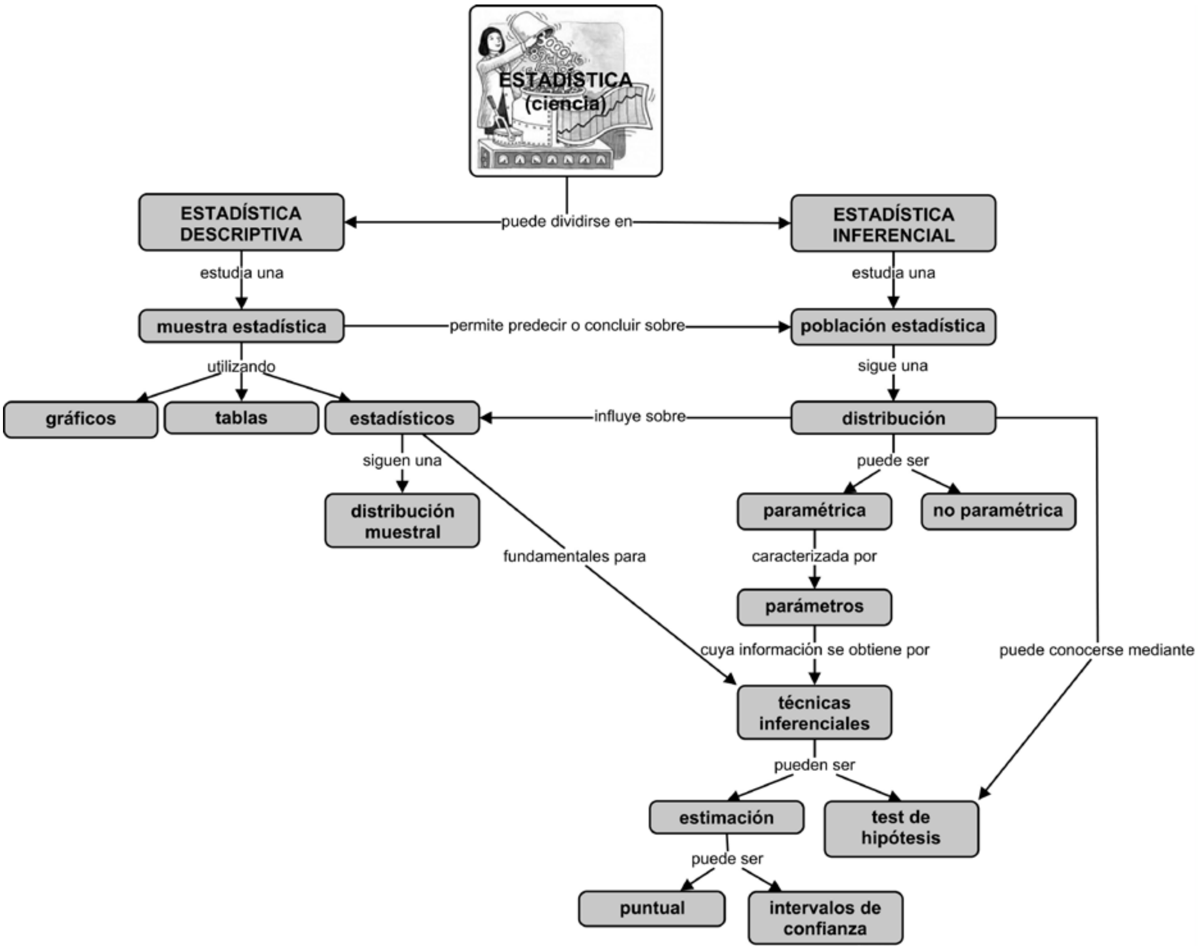


Figura 1. Mapa conceptual de los ejes temáticos involucrados en la propuesta.

En la primera unidad, introductoria por naturaleza, se presenta el lenguaje estadístico y algunas definiciones elementales. La segunda, permite el abordaje de técnicas exploratorias de datos unidimensionales y bidimensionales. En la unidad 3 se presentan algunas distribuciones de probabilidad derivadas de otras estudiadas en un curso previo de teoría de la probabilidad; también se revisan resultados relacionados con teoremas límites y distribuciones asintóticas. Además, sobre la base del concepto de estadístico, se construyen aquéllos que funcionarán como los pivotes principales en las unidades siguientes relacionadas con la inferencia estadística. Las unidades 4 y 5 están destinados al problema de la estimación puntual y por intervalos de confianza, respectivamente. La sexta y última unidad introduce la técnica de test de hipótesis como herramienta estadística para la toma de decisiones entre dos hipótesis contradictorias. Particularmente, se construyen los principales casos relacionados con la prueba de hipótesis sobre los parámetros de una población normal, la comparación de parámetros de poblaciones normales, y las pruebas de nivel asintótico para la media de cualquier población. Asimismo, se estudia una serie de técnicas no paramétricas como las pruebas de bondad de ajuste, independencia y homogeneidad.

3.4. Estrategias y actividades

A la luz de las consideraciones teóricas expuestas anteriormente, desde 2013 se presenta a los estudiantes que cursan las asignaturas arriba mencionadas, una propuesta pedagógica atravesada por la resolución de problemas y el desarrollo de proyectos con datos reales.

Estos proyectos son concebidos como una verdadera investigación, integrando la estadística, e involucrando las fases de planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recolección y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado. La experiencia requiere el uso de TIC, sea desde una perspectiva netamente pragmática pues el volumen de datos a analizar obliga a utilizar algún programa estadístico, o bien desde el punto de vista pedagógico ya que las evidencias de los aprendizajes se publican a través de ePortfolios y se comparten con otros (compañeros, estudiantes de ciclos anteriores, docentes, investigadores, etc.) a través de comunidades virtuales. En esta propuesta, los conceptos y técnicas son construidos utilizando razonamiento matemático apropiado, pero partiendo de experiencias concretas diseñadas y vivenciadas en un aula concebida como un taller. El desarrollo de estas experiencias obliga al estudiante a mantener un rol activo, diseñando la técnica de muestreo más apropiada según el contexto, eligiendo tablas, gráficos y estadísticos adecuados para resumir y analizar la información contenida en la muestra y, posteriormente, en función de los supuestos que surjan del análisis previo, hacer inferencias y predicciones apropiadas sobre las características de la población que se constituye en el objeto de estudio adoptado.

En 2013, el proyecto se llevó adelante utilizando la plataforma Mahara, una aplicación web de código abierto para gestionar ePortfolios y redes sociales. Dicha plataforma incluye *blogs*, una herramienta de presentación, un gestor de archivos y vistas, entre otros. Las vistas permiten crear versiones de los contenidos según el contexto, y el usuario puede controlar qué elementos y qué información o artefactos dentro de su ePortfolio pueden ser accedidas por otros usuarios o miembros de comunidades (Mahara-Wiki, 2011). En virtud de los exitosos resultados obtenidos en el rendimiento general de los estudiantes (entendido como objetivos cognitivos alcanzados) y la excelente recepción de la propuesta pedagógica (Dieser & Cavero, 2013; Dieser, 2014), se decide continuar con la metodología de aprendizaje y evaluación. Sin embargo, las observaciones y dificultades evidenciadas en el desarrollo del ePortfolio a través de la plataforma Mahara y, a la luz de las múltiples herramientas disponibles en el marco de una web evolucionada y colaborativa, resulta necesario introducir algunas modificaciones. En consecuencia, desde 2014 se utilizan algunas aplicaciones y complementos de Google para la elaboración de los ePortfolios (Cavero & Dieser, 2017).

El desarrollo de los proyectos, concebido como una experiencia de aprendizaje que favorece la evaluación procesual del mismo, se incluye en una propuesta didáctica más amplia que comprende la resolución de problemas auténticos y actividades tendientes a la construcción y comprensión de conocimientos. Se describe a continuación la propuesta de enseñanza y aprendizaje desarrollada durante el ciclo lectivo 2015, ofreciendo en primera instancia una visión global de la secuenciación de actividades, para luego describir las experiencias vinculadas con la resolución de problemas y el desarrollo de proyectos propiamente dichos.

Las asignaturas, con una carga horaria semanal de 8 horas reloj, son dictadas en modalidad presencial y están complementadas con la utilización de un curso dentro del entorno virtual de enseñanza y aprendizaje (EVEA) de la FCEyN (UNLPam) desarrollado sobre Moodle. La semana previa al inicio del cuatrimestre, los estudiantes inscriptos para cursar los espacios curriculares son matriculados manualmente en dicho curso *online*. Esto permite no sólo tener un primer contacto virtual con todo el grupo antes del inicio de las clases presenciales, sino también desarrollar algunas actividades de diagnóstico[1]. Particularmente, a fin de rastrear los conocimientos previos de los estudiantes sobre el concepto y usos de la estadística, se les solicita visionar un video[2] sobre la temática y responder las siguientes preguntas utilizando un foro:

1. ¿Conocés actividades o situaciones en las que se usa la estadística, además de las mencionadas en el video?
2. ¿Podés describir algún momento de tu vida cotidiana en el que hacés uso de la estadística?
3. ¿Recordás noticias que hayas leído en diarios o revistas, vistas en la tele o escuchado en la radio en las que se diera información estadística?

Asimismo, a fin de iniciar pequeñas tareas de investigación que permitan desarrollar competencias vinculadas con la búsqueda de información y el sentido crítico, se les invita a ofrecer alguna definición de "estadística" utilizando fuentes que consideren "confiables". Estas definiciones son volcadas en un muro colaborativo y retomadas en la primera clase presencial, tras la presentación de la propuesta pedagógica con una descripción detallada de los objetivos, contenidos y actividades involucradas acompañadas de un cronograma para el desarrollo de las mismas. La Figura 2 muestra una vista parcial del muro construido[3]. La relectura y análisis de las diversas definiciones presentadas no sólo permite elaborar, en forma conjunta, una definición de estadística (entendida como ciencia) que atraviese toda la cursada, sino que además obliga a construir los conceptos vinculados con el objeto de estudio de la estadística, *i.e.* la noción de dato estadístico caracterizado por la incertidumbre y la variabilidad.

A fin de construir el concepto de dato estadístico, se parte de una experiencia sencilla de recolección de datos vinculados a características de estudiantes universitarios (edad, altura, peso, carrera, entre otros), diseñada en el aula y realizada *in situ*, recorriendo los pasillos de la Facultad. El objetivo de la investigación se discute y define con los estudiantes antes de iniciar la tarea de recolección. Una vez recolectados los datos y habiendo regresado al aula, se los

---

1 Cabe mencionar que todo el equipo docente conoce personalmente a la totalidad de los estudiantes puesto que éstos han debido cursar previamente las asignaturas "Probabilidad" o "Probabilidad y Estadística I" con los mismos profesores. En consecuencia, el contacto que se establece en la semana previa no es el primero.

2 Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=ufHZUJGYzx8.

3 Puede accederse al muro completo desde http://es.padlet.com/estadisticafcey/definicion2015.

carga en una planilla adecuada para analizar, posteriormente, sus particularidades en búsqueda de regularidades. Esto permite no sólo elaborar el concepto indicado (dato estadístico) y otros vinculados (unidad experimental u observacional, población, muestra, y variable, incluyendo su clasificación) sino que, además, sienta las bases para el estudio de las diversas técnicas descriptivas e inferenciales comprendidas en el programa de las asignaturas, a lo largo de la cursada.

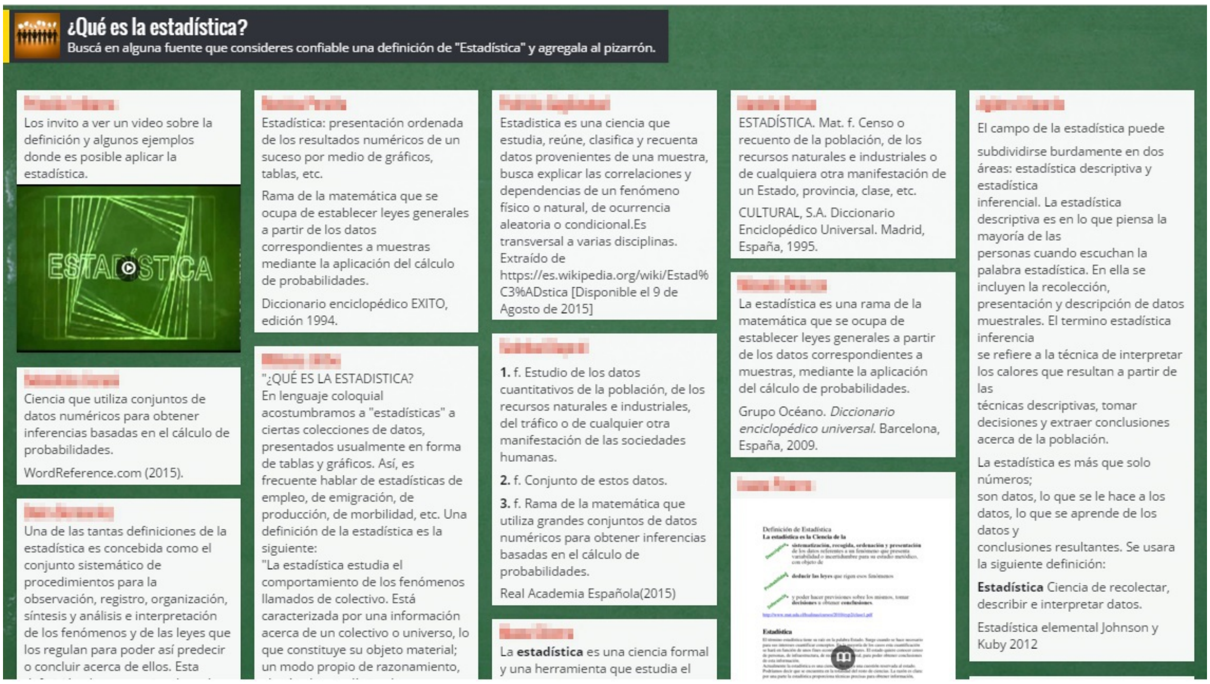


Figura 2. Vista parcial del muro colaborativo creado en la actividad inicial.

A fin de consolidar y contextualizar el contenido recientemente construido se propone una actividad áulica de lectura de algunos parágrafos de *papers* seleccionados y vinculados con diferentes temáticas (se procura que estos artículos estén escritos en castellano y utilicen técnicas a estudiar posteriormente en las asignaturas). Estos trabajos son distribuidos a pequeños grupos de estudiantes, en función de sus intereses, proponiendo el reconocimiento de los elementos antes definidos (objetivo de estudio, unidad experimental u observacional, población, muestra, y variable). La actividad de lectura y análisis permite, también, materializar la interdisciplinariedad del contenido, poniendo en contacto a los estudiantes, probablemente por primera vez, con estudios académicos y científicos que utilizan la estadística como herramienta. Estas actividades son seguidas por la realización de una serie de ejercicios que permiten, repetidas veces y en diferentes situaciones enunciadas, reconocer y describir adecuadamente los elementos antes definidos.

La segunda clase presencial se destina a la ejecución de una experiencia conjunta que da origen al desarrollo de los pasos propios de una investigación que requiere del uso de la estadística, tanto desde el punto de vista descriptivo como inferencial. Dicha experiencia es propuesta por el equipo docente, a fin de permitir la utilización de diferentes tipos de variables y disparar multiplicidad de problemas que abarcan la mayor cantidad de técnicas incluidas en el programa de estudios. El objetivo general de la investigación sugerida es estudiar las características de paquetes de confites de chocolate de distribución nacional (uno de producción local y otro extranjero). Estos paquetes (30 de una marca y 20 de la otra) son analizados por los estudiantes desde diversos aspectos: (a) distribución de colores de confites (abriendo los paquetes y tabulando adecuadamente); y (b) peso neto (determinado mediante dos instrumentos diferentes: pesola y balanza digital). Algunos paquetes disponibles para el trabajo con los estudiantes son adulterados de diferentes maneras: (a) un paquete es abierto previamente y se quitan intencionalmente algunos confites de un mismo color; (b) todos los pesos de paquetes de la marca nacional son ocultados apropiadamente. Esto permite generar ciertas problemáticas típicas en el análisis de datos estadísticos, como datos anómalos, faltantes, etc. Algunas fotografías tomadas el día de la experiencia se muestran en la Figura 3.

(a) (b) (c)

Figura 3. Fotografías tomadas durante la experiencia áulica *"The sweetest statistics"* en las que se observa: (a) el análisis de la distribución de colores de confites; (b) la determinación del peso neto utilizando una balanza digital; y (c) la determinación del peso neto mediante una pesola.

Esta actividad inicial, denominada *"The sweetest statistics"*, no sólo permite recuperar los conceptos estudiados en la clase anterior, sino que además favorece el planteo de preguntas, por parte de los estudiantes, que derivan en la definición de diversos objetivos de investigación específicos retomados en clases posteriores, dando lugar al estudio de diferentes técnicas estadísticas incluidas en el programa que, a su vez, requieren del estudio de otras adicionales o derivan en las mismas. En consecuencia, los contenidos estudiados en las clases de las asignaturas surgen de la necesidad de resolver un problema concreto y real, con las dificultades típicas que caracterizan estas situaciones, en contraposición a una presentación descontextualizada y, en ocasiones, arbitraria comúnmente observable en cursos de estadística a nivel superior.

En términos generales, las clases presenciales de las asignaturas están caracterizadas por la siguiente secuencia de actividades:

1. Recuperación de un problema planteado grupalmente en la experiencia inicial *"The sweetest statistics"* y definición del objetivo de estudio asociado mediante una dinámica de indagación grupal.
2. Análisis de la necesidad de contar con una técnica estadística apropiada que permita resolver el problema a partir de la recuperación de conocimientos previos y el reconocimiento de la imposibilidad de aplicar lo ya conocido. Esto se realiza a través de dinámicas grupales adecuadas y un plenario posterior.
3. Construcción de la técnica estadística necesaria y conceptos asociados, siguiendo razonamientos lógico-matemáticos adecuados, por parte del profesor, en base a las respuestas ofrecidas por los estudiantes. Esto puede generar la necesidad de construir otras técnicas y conceptos adicionales.
4. Aplicación de las técnicas y conceptos construidos en el desarrollo de nuevos ejemplos tipo, utilizando dinámicas grupales adecuadas.
5. Resolución de una serie de ejercicios modelo que permiten aplicar los contenidos presentados, así como discutir la validez y adecuación de su aplicación en investigaciones realizadas por la comunidad científica (a través de la lectura y análisis de *papers*). Estas actividades son diseñadas y

presentadas a los estudiantes en una guía de trabajos prácticos con el fin de consolidar los conocimientos. Algunas requieren el uso de *software* estadístico cuyo aprendizaje operativo es favorecido a través de actividades tipo taller y reforzado con tutoriales disponibles en el curso *online*.

A fin de favorecer la transferencia de los conocimientos adquiridos, se propone a los estudiantes desarrollar, de manera transversal a la cursada, un proyecto completo con datos reales siguiendo los pasos involucrados en una investigación estadística. Esta actividad, denominada "¡Estadístic@s en acción!", representa una instancia más de aprendizaje y se utiliza como una estrategia de evaluación. La misma se describe a continuación.

Las tareas a realizar en "¡Estadístic@s en acción!", sus objetivos, y los criterios con los que son evaluados se presentan a los estudiantes una vez finalizada la actividad inicial *"The sweetest statistics"*. El proyecto, desarrollado en pequeños grupos (un máximo de tres integrantes) conformados según las afinidades de los estudiantes, involucra las siguientes fases: planteamiento de un problema, análisis descriptivo e inferencial de un conjunto de datos debidamente obtenido y depurado, escritura de un reporte de investigación, y comunicación oral de los resultados.

Los criterios de evaluación, dispuestos en una rúbrica, son discutidos y acordados con el grupo clase sobre la base de la propuesta del equipo docente. Se consideran cinco bloques de criterios, correspondientes a sendas etapas del desarrollo del proyecto. Cada bloque involucra un conjunto de subcriterios que son evaluados según cuatro niveles (excelente, bueno, suficiente e insuficiente) equivalentes a cierto puntaje numérico. Por cada bloque de criterios se calcula una media de los puntajes obtenidos en los subcriterios. El puntaje final resulta de una media ponderada de estos cinco criterios iniciales. La aprobación del proyecto requiere un promedio mínimo de 6 puntos[4].

A fin de monitorear el desarrollo y avance de los proyectos, se solicita a cada grupo la creación de un *blog* en Blogger en el que deben publicar las evidencias de aprendizaje, utilizando los recursos que consideren convenientes, cada vez que lo crean necesario. No se establece un número máximo de publicaciones, pero sí un mínimo, de acuerdo a un cronograma acordado previamente. De esta manera, queda conformado el ePortfolio grupal. También se solicita a los estudiantes la unión a la comunidad de Google "¡Estadístic@s en acción!"[5]. Ésta tiene una utilidad doble: sirve como apoyo para el desarrollo de los proyectos y como un espacio para compartir las experiencias de aprendizaje. Las intervenciones docentes en estas tareas iniciales (creación del *blog* y unión a la comunidad virtual) se hacen a través de videos y tutoriales disponibles en la Web o creados por el equipo de cátedra, publicados en el curso *online* de las asignaturas.

Realizadas estas actividades introductorias se da inicio al desarrollo del proyecto propiamente dicho y, en consecuencia, la elaboración del ePortfolio.

La fase de planteamiento del problema en la ejecución de un proyecto es, sin duda, una de las más difíciles y, es muy probable que los estudiantes no comiencen con un problema claramente formulado o que no tengan preguntas claramente definidas. En esta etapa, el papel del profesor es ayudarles a pasar de un tema general a una pregunta posible de ser contestada. En consecuencia, los estudiantes

4 Estas equivalencias numéricas son establecidas al solo efecto de adaptarse a las condiciones de aprobación de las asignaturas de la FCEyN (UNLPam) de acuerdo al reglamento de cursada vigente.

5 Cuya dirección de acceso es https://plus.google.com/u/0/communities/106994415422947389614.

eligen alguna temática de interés sobre la base de diferentes problemas propuestos por el equipo docente. Esta propuesta se realiza en función de la disponibilidad de datos estadísticos aportados por investigadores de la Casa de Estudios u otras instituciones, disponibles en diferentes revistas científicas, sitios web, o *software* específico, entre otros. El abanico de temas incluye desde medicina hasta ecología, seguridad vial, diseño e ingeniería, meteorología hasta problemas clásicos de determinación de constantes físicas como la velocidad de la luz. También se invita a los estudiantes a diseñar sus propios experimentos o replicar otros propuestos para obtener datos propios. Sobre el problema y conjunto de datos elegidos, los alumnos comienzan sus investigaciones en revistas y literatura especializadas en el tema o consultas a especialistas para luego plantear sus hipótesis y objetivos de estudio.

A la elección y planteamiento del problema a investigar, sigue la etapa de recolección y depuración de datos. Una vez recolectados y depurados, el proceso de análisis de los mismos se divide en dos, acorde a lo estudiado en las clases presenciales: el análisis descriptivo y la aplicación de técnicas inferenciales que permitan poner a prueba las hipótesis iniciales realizadas sobre la población toda o aquellas adicionales que puedan derivarse de la etapa descriptiva. En esta fase, la computadora se transforma en una herramienta de gran utilidad y absolutamente necesaria a través del uso de programas estadísticos, particularmente R[6].

Finalizadas estas etapas, es necesario comunicar los resultados: (a) mediante un informe escrito de la investigación llevada a cabo, y (b) presentando oralmente los resultados y conclusiones obtenidos.

El informe debe ser escrito de forma clara y lógica, y siguiendo ciertas pautas establecidas en cuanto a su formato. Para orientar a los estudiantes en la realización de esta actividad, se invita a un docente investigador de la Casa de Estudios quien, mediante una charla breve y a través de un caso concreto, sugiere los apartados que podría tener tal reporte. Esta actividad no sólo refuerza en los estudiantes el proceso de razonamiento estadístico al relatar al lector sus decisiones, acciones e interpretaciones, sino que además sirve como pretexto para aprender, o bien profundizar, el uso de otras herramientas tecnológicas de utilidad tales como editores de textos, graficadores, gestores de bibliografía, etc.

Por último, las investigaciones son presentadas por cada grupo de estudiantes al grupo clase bajo la modalidad de simulación de una reunión científica, utilizando *slides* o *posters* como material de apoyo. Estos documentos son diseñados siguiendo ciertos lineamientos sugeridos por otro docente investigador de la Casa en una charla brindada a los estudiantes. La exposición debe realizarse en un tiempo máximo preestablecido respondiendo potenciales preguntas de la audiencia (compañeros y docentes) en cinco minutos posteriores. Esta actividad permite desarrollar competencias de comunicación lingüística y oralidad, al mismo tiempo que ofrece un nuevo espacio de uso de TIC para apoyar la comunicación.

Los resultados parciales de cada una de las etapas involucradas en el desarrollo del proyecto son incluidos en el *blog* del grupo de trabajo y compartidas con la comunidad virtual "¡Estadístic@s en acción!". Esto permite que docentes y pares accedan a las producciones individuales, hagan sugerencias, tiendan redes de aprendizaje entre grupos con temas similares o relacionados, etc. Las evidencias aportadas deben acompañarse de una justificación y una reflexión personal o

6 Se impulsa el uso de R (http://www.cran.r-project.org/), a través de la interfaz gráfica RCommander, por tratarse de un *software* libre de código abierto, con amplia variedad de técnicas disponibles, de gran flexibilidad y desarrollo constante, junto con la disponibilidad multiplataforma.

grupal, poniendo de manifiesto la relación entre esa evidencia y el aprendizaje. Ésto contribuye no sólo a tomar conciencia de qué y cómo se va aprendiendo, sino que además permite regular dicho aprendizaje.

El acompañamiento docente en el desarrollo de cada etapa del proyecto, a través de la comunidad virtual y reuniones presenciales periódicas, es de suma importancia para garantizar el éxito del proceso de aprendizaje mediante una adaptación dinámica, contextual y situada entre el contenido que tiene que aprenderse y lo que los estudiantes pueden aportar y aportan al aprendizaje en cada instancia. Las guías y ayudas, mediante mensajería, comentarios de *feedback* sobre las publicaciones en el *blog*, o en las reuniones presenciales pautadas, no se ofrecen al azar, o sólo ante el reclamo de los estudiantes, sino que se realizan en función de los cambios en su actividad constructiva del conocimiento, sugiriendo posibles caminos de acción y orientando el rumbo de la misma.

Resumiendo, el desarrollo de proyectos representa no solo una oportunidad de trabajo con datos reales, sino que, además, favorece la motivación de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos estadísticos y el desarrollo de competencias estadísticas, poniendo en práctica procesos de reflexión que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información, por medio del reconocimiento de las técnicas estadísticas apropiadas. Asimismo, el trabajo con proyectos permite a los estudiantes integrar el conocimiento matemático con los propios de otras disciplinas. Paralelamente, el desarrollo del proyecto contribuye al aprendizaje de la tecnología, favoreciendo la adquisición de destrezas de razonamiento para organizar la información, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias. Además, obliga a los estudiantes a ejercitar la construcción y comunicación del conocimiento, así como la organización y autorregulación del pensamiento, adquiriendo destrezas y actitudes relacionadas con la formación de un juicio crítico, la generación de ideas y la expresión de las mismas.

4. Resultados de la experiencia

A fin de ofrecer espacios para que los estudiantes evalúen la propuesta de aprendizaje y así hacer los ajustes necesarios para futuras implementaciones, se utilizan diferentes instrumentos: (a) una consulta escrita sobre la experiencia *"The sweetest statistics"*; (b) apreciaciones sobre las charlas de especialistas invitados y su impacto en la formación; (c) una encuesta final de cursada con preguntas cerradas de opciones múltiples; y (d) elaboración de un muro colaborativo para expresar las sensaciones vivenciadas durante el desarrollo del proyecto. Todas las herramientas empleadas para obtener información son anónimas y voluntarias.

La consulta realizada sobre la experiencia *"The sweetest statistics"* permite indagar sobre el nivel de motivación alcanzado, los aspectos que pueden haber impactado o no sobre un mejor aprendizaje, y las posibilidades de transferencia de experiencias semejantes a su futuro laboral (sea como investigador o como docente diseñando propuestas similares). Los comentarios y apreciaciones vertidos en las siete respuestas obtenidas revelan un alto grado de conformidad con la propuesta, al mismo tiempo que señalan múltiples aspectos positivos que incitan a incluir este tipo de experiencias en ediciones futuras. Algunos extractos de las opiniones de los estudiantes se transcriben a continuación:

- "Coincido y valoro la forma de presentar los temas [...], saliendo de lo teórico para abordar el tema desde una forma más práctica, ya que produce un aprendizaje más significativo. [...] me resultó sencillo entender los conceptos y a futuro creo que no me olvidaré de este tema."

- "Me gustó la experiencia [...]. Me facilitó entender el tema el hecho de que siempre nos basábamos en lo que nosotros conocíamos y habíamos hecho."
- "La experiencia [...] estuvo muy linda [...] porque sale de lo común, es decir que no es la situación típica de docente expositor alumnos receptores, fuimos parte de la experiencia."
- "Estos métodos de enseñanza han logrado que me guste mucho estadística, es muy motivante y logra que uno se interese por los conceptos a aprender."
- "En la universidad no realizamos este tipo de actividades. [...] está bueno que, a partir de una actividad concreta, se fue estructurando el tema a estudiar y siempre intercalando teoría con ejemplos, que particularmente es de gran utilidad para comprender mejor los conceptos."
- "La experiencia [...] me pareció muy buena e interesante. A partir de una muestra de [confites] (creo que nadie se imaginaba para qué era) nos motivó, y entre risas y trabajo en equipo, pudimos obtener nuestros propios datos."

Las charlas con especialistas son recibidas muy positivamente por los ocho estudiantes que responden sendas consultas. Se observa una alta valoración de la comunicación y el contacto con los expertos en tanto los docentes invitados exponen temáticas técnicas, pero lo hacen desde sus propias experiencias como investigadores, mostrando resultados de sus investigaciones y compartiendo sus vivencias en todo el proceso, incluyendo miedos, fracasos y frustraciones. Esto permite establecer un vínculo de identificación entre estudiantes e investigadores a través de lo vivido en el desarrollo del proyecto. Algunos de los comentarios recibidos indican que "la charla [respecto a cómo elaborar un reporte fue] muy buena, de mucha ayuda ya que de alguna manera aclaró dudas con respecto a la escritura y armado del trabajo [y] calmó ansiedades". En relación a la charla vinculada a la elaboración de presentaciones, manifiestan que "dejó un modelo y *tips* muy importantes para nuestro futuro, porque el día de mañana si tenemos que exponer algo de cualquier tema, sabemos cómo armar una buena presentación", además "al mostrarnos diferentes maneras de hacer una presentación hizo [notar] cuántas herramientas hay". Un testimonio destaca la importancia de aprender con otros: "Me pareció muy interesante que personas destacadas en su disciplina puedan aportar. Siempre la opinión, idea o modo de trabajo de personas con experiencia es bienvenida, sobre todo para nosotros que es la primera vez que llevamos a cabo un proyecto estadístico como el que acabamos de realizar".

Finalizada la cursada se realiza una encuesta integral a fin de indagar sobre cuestiones generales de la propuesta didáctica. La sección referida a la experiencia "¡Estadístic@s en acción!" comprende tres preguntas cerradas obligatorias que permiten obtener información sobre: (a) las percepciones relativas a la adecuación y significatividad de la actividad; (b) la adecuación del uso de herramientas de Google para las tareas realizadas; y (c) la adecuación de las rúbricas para la evaluación. Se incluye una pregunta adicional, abierta y optativa, para profundizar sobre las cuestiones antes consultadas. Diez de las once respuestas obtenidas, califican la realización del proyecto con datos reales como una actividad muy adecuada y significativa para la evaluación de los aprendizajes. El estudiante restante si bien considera la propuesta como muy adecuada, la percibe poco significativa (Figura 4). Todas las respuestas valoran cierto grado de adecuación para la utilización de herramientas de Google para el desarrollo de las tareas propuestas (Figura 5), y la utilización de rúbricas para la evaluación de los aprendizajes (Figura 6).

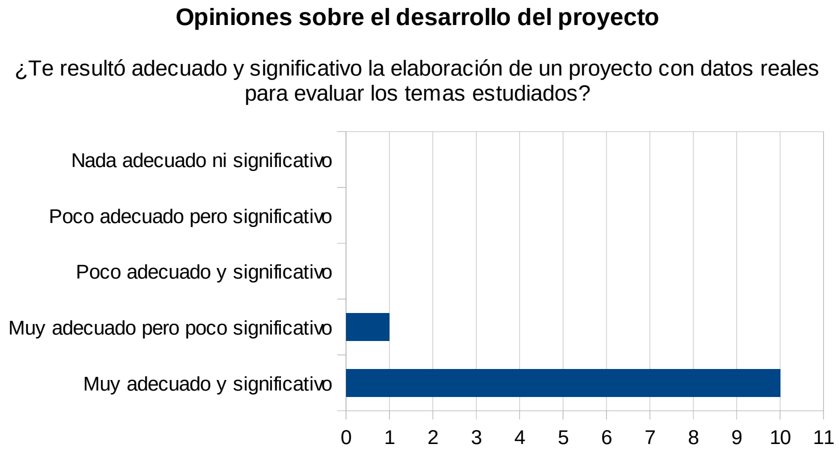


Figura 4. Opiniones sobre adecuación del desarrollo del proyecto para evaluar los aprendizajes.

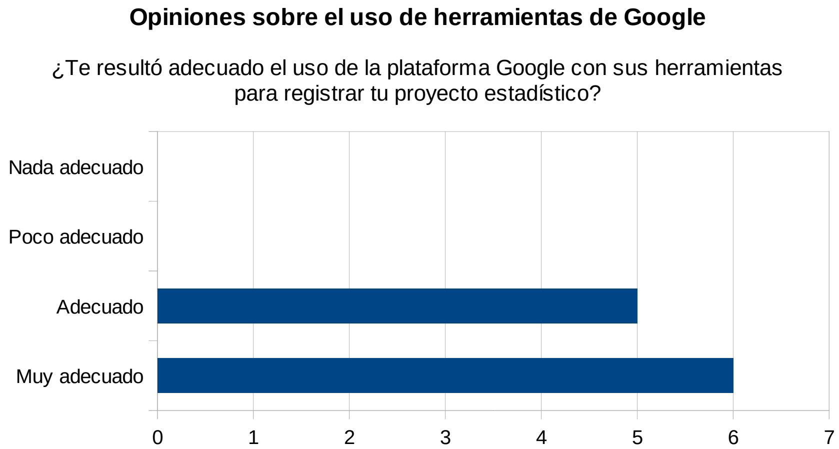


Figura 5. Opiniones registradas sobre el uso de herramientas de Google para el desarrollo de tareas.

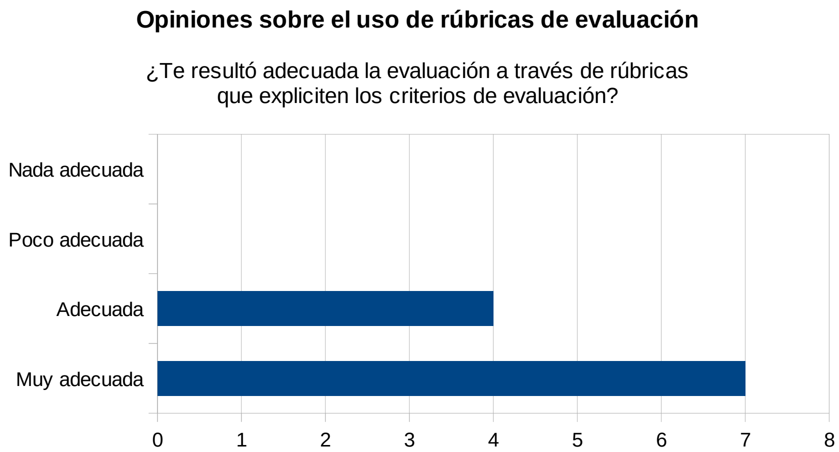


Figura 6. Opiniones registradas sobre la adecuación del uso de rúbricas para la evaluación.

Por último, a fin de conocer las sensaciones vivenciadas por los estudiantes durante todo el desarrollo del proyecto, se propone elaborar un muro colaborativo representando sus experiencias mediante una imagen ilustrativa acompañada de un máximo de cinco palabras. Los diez aportes recibidos se muestran en la Figura 7.

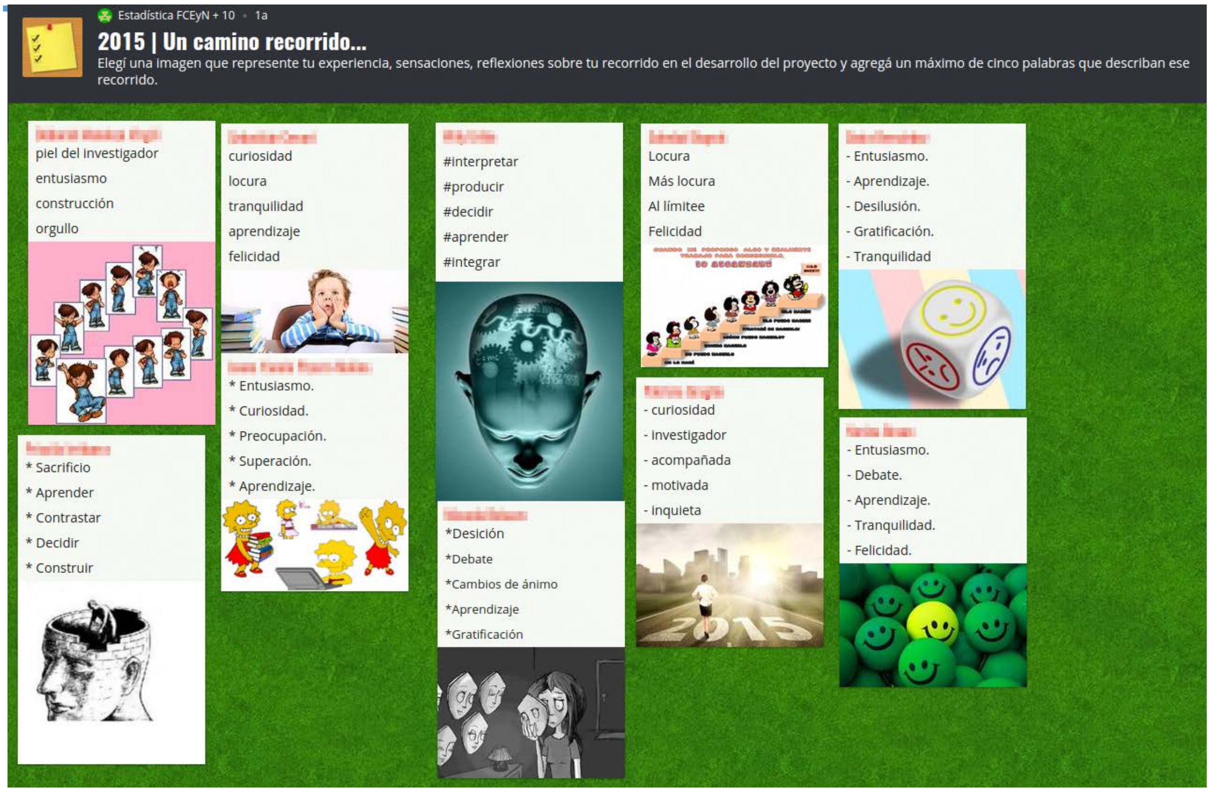


Figura 7. Muro colaborativo creado para expresar las sensaciones en el desarrollo del proyecto.

En relación al rendimiento académico, la propuesta didáctica permitió que doce de los dieciséis estudiantes que cursaron las asignaturas lograran regularizarlas o promocionarlas, alcanzando así una tasa del 75% de aprobación.

5. Reflexiones y consideraciones finales

Varias son las teorías que permiten abordar el estudio del aprendizaje y la enseñanza. Sin embargo, ninguna de ellas puede asumirse, por sí sola, como la panacea de todos los problemas existentes en el quehacer educativo. En cualquier caso, un diseño instruccional que favorezca la adquisición de aprendizajes duraderos y transferibles que surjan de una práctica directa, podrá ser entendido como una buena enseñanza generando buenos aprendizajes (Pozo, 2008b).

La teoría del aprendizaje significativo (Ausubel, 1976) y la construcción social del conocimiento defendida por Lev Vigotsky (Díaz Barriga, 2003) apuntan a la idea general de construir conocimientos que sean potencialmente transferibles a nuevas situaciones, *i.e.* que sean especialmente útiles para resolver problemas. Así, el aprendizaje por construcción o comprensión permite la adquisición de conocimientos estratégicos. No obstante, la adquisición de estrategias requiere, a menudo, de otros conocimientos de tipo técnico que pueden entrenarse mediante la realización de ejercicios, *i.e.* tareas cerradas o rutinarias, no necesariamente fáciles, para las que se han aprendido soluciones específicas y en las que el control está ejercido generalmente por alguien externo como el profesor (Pozo Municio & Pérez Echeverría, 2009). Este tipo de actividades, vinculadas con el aprendizaje asociacionista, no sólo aumenta la estabilidad, claridad, y disociabilidad de los significados emergentes, sino que además permite tomar consciencia de los olvidos y confusiones, facilitando el aprendizaje de nuevas tareas relacionadas. En consecuencia, el diseño instruccional presentado en este trabajo combina estrategias didácticas fuertemente signadas por un enfoque constructivista con otras más asociacionistas, evidenciadas en la propuesta de algunos ejercicios tipo.

Ahora bien, si se pretende que los estudiantes comprendan y construyan conocimiento, no basta con presentarles la información que deben aprender, sino que es necesario diseñar tareas que favorezcan y promuevan estas actividades cognitivas. Bajo la luz de las teorías de la cognición situada (Díaz Barriga, 2003), la experiencia didáctica descripta en el presente trabajo propone a los estudiantes tareas de aprendizaje que implican involucrarse en el mismo tipo de actividades que enfrentan los estadísticos expertos, utilizando estrategias que promueven el aprendizaje colaborativo o recíproco, y atravesadas por mecanismos de mediación y ayuda ajustada a las necesidades del alumno y del contexto.

"The sweetest statistics", caracterizada por la solución de problemas auténticos (Díaz Barriga, 2003), es especialmente útil para apoyar el aprendizaje por comprensión, permitiendo que los estudiantes relacionen la nueva información en una estructura de significado en la que los conocimientos previos resultan de total importancia. La experiencia promueve la activación de tales conocimientos para interpretar el nuevo, asimilándolo e integrándolo a los anteriores. Sin embargo, en ocasiones no es posible lograr la comprensión de los nuevos conocimientos pues las ideas previas son contrarias, e incluso incompatibles, con los primeros. En estos casos, es preciso generar un verdadero cambio conceptual, reorganizando toda la estructura conceptual y generando una nueva mentalidad (Pozo Municio & Pérez Echeverría, 2009). La resolución de problemas se presenta, nuevamente, como una estrategia potencialmente útil para promover este cambio, en tanto favorece prácticas reflexivas que apoyan la reestructuración conceptual.

El trabajo mediante proyectos (Díaz Barriga, 2003), utilizado en "¡Estadístic@s en acción!", representa una instancia más de aprendizaje y una estrategia de evaluación. Como indican Pozo Municio & Pérez Echeverría (2009), para evaluar si alguien ha comprendido es preciso enfrentarlo a una situación nueva distinta a la que sirvió para adquirir el conocimiento, pero lo suficientemente similar como para que éste sea transferible. Sin lugar a dudas, desarrollar un proyecto vinculado con una temática de interés para el estudiante, como en este caso, implica generalizar los conocimientos a una nueva situación que admite más de una solución posible en la que, además, se permite y favorece el uso de las TIC. Sin embargo, es importante considerar que este tipo de propuestas requiere de una evaluación continua y procesual, a través del monitoreo permanente del trabajo de los estudiantes, mediante el seguimiento de sus avances puestos de manifiesto en la publicación de sus evidencias de aprendizaje en el *blog* y compartidas en la comunidad virtual, así como en las entrevistas y reuniones periódicas. Esto permite obtener mútiples criterios para sostener la evaluación y la calificación final, y proporcionar a los estudiantes oportunidades para adquirir más conocimiento, y mejorar su rendimiento a partir de cada una de las instancias mencionadas.

En resumen, la experiencia didáctica aquí descripta y desarrollada en 2015, está atravesada por el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje basado en proyectos, en la que los ejercicios propuestos son necesarios para la adquisición de ciertas destrezas y conocimientos técnicos que sirven como recursos para los primeros. Adicionalmente, se incluyen actividades tendientes a favorecer el aprendizaje de competencias necesarias para el manejo crítico de la información y la alfabetización tecnológica, ambas requeridas en la sociedad del conocimiento De esta manera, se procura estimular y viabilizar la construcción de conocimientos colectivos que, según Scardamalia & Bereiter (1991), mencionados por Díaz Barriga (2003), debiera ser la principal función de la educación. Una actividad reflexiva sobre la práctica docente desarrollada permite confirmar que, pese a las múltiples mejoras que requiere la propuesta, las estrategias de enseñanza implementadas favorecen el aprendizaje de la estadística, promoviendo el desarrollo de habilidades de alto nivel que ayuden a los estudiantes a aprender a lo largo y para toda su vida.

Bibliografía

Aparicio Acosta, F. M. (2000). Pautas para la mejora de la calidad en la enseñanza de estadística en ingeniería de telecomunicación. *RELIEVE* [en línea], 6(1). Recuperado el 22 de mayo de 2017, de http://www.uv.es/RELIEVE/v6n1/RELIEVEv6n1_2.htm

Ausubel, D. (1976). *Psicología educativa*. Trillas, México.

Baquero, R. (2002). Del experimento escolar a la experiencia educativa. La transmisión educativa desde una perspectiva psicológica situacional. *Perfiles Educativos*, 24(97–98), 57–75.

Barberà, E. (2005). La evaluación de competencias complejas: la práctica del portafolio. *Educere*, 31(9), 497–504.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En C. Batanero & C. Díaz (Eds.), *Estadística con proyectos* (pp. 9–46). Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Cavero, L.V. & Dieser. (2017). Estadístic@s en acción: una propuesta de aprendizaje de la estadística, desarrollada y evaluada con herramientas de Google. En Roig, Hebe (Comp.). *Tecnologías en la enseñanza universitaria: experiencias e investigaciones. II Jornadas sobre uso pedagógico de TIC en la UNLPam*. EdUNLPam, Santa Rosa.

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* [en línea], 5(2). Recuperado el 22 de mayo de 2017, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1607-40412003000200011&script=sci_arttext

Díaz Godino, J. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores al aprendizaje y la enseñanza de la estadística? *UNO*. Didáctica de Las Matemáticas, 5, 45–56.

Dieser (2014). Los ePortfolios como estrategia de aprendizaje de la estadística: una experiencia. En *Memorias IX Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología* [online] (pp. 279–288). Chilecito: Universidad Nacional de Chilecito. Recuperado el 22 de mayo de 2017, de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/38631/Documento_completo.pdf?sequence=1

Dieser, & Cavero, L. V. (2013). EstadisTIC: Hacia la enseñanza de estadística a través de proyectos. En I Jornadas TIC de la UNLPam.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1–25.

Jiménez Aleixandre, M. P. (2010). *10 Ideas Clave. Competencias en argumentación y uso de pruebas*. Graó, Barcelona.

Mahara-Wiki. (2011). Documentación en Español/Guía del usuario/Introducción. Recuperado el 29 de diciembre de 2015, de https://wiki.mahara.org/index.php/Documentación_en_EspaC3%B1ol/Guia_del_usuario/Introducción

Medina Martínez, N. F., & Medina Martínez, O. R. (2010). Software didáctico para la formación de pensamiento estadístico. *Educación y Sociedad* [online], 8(3). Recuperado el 22 de mayo de 2017, de http://edusoc.unica.cu/index.php/83-

art%C3%ADculos/software-did%C3%A1ctico-para-la-formaci%C3%B3n-de-pensamiento-estad%C3%ADstico

Pozo, J. I. (2008a). Las teorías del aprendizaje: la integración entre diferentes niveles y sistemas de aprendizaje. En *Aprendices y maestros: la psicología cognitiva del aprendizaje* (pp. 121–148). Alianza.

Pozo, J. I. (2008b). Los rasgos de un buen aprendizaje. En *Aprendices y maestros: la psicología cognitiva del aprendizaje* (pp. 159–175). Alianza.

Pozo, J. I., & Postigo, Y. (1993). Las estrategias de aprendizaje como contenido del currículo. En C. Monereo (Comp.), *Las estrategias de aprendizaje: procesos, contenidos e interacción*. Edicions Domenech, Barcelona.

Pozo Municio, J. I., & Pérez Echeverría, M. del P. (2009). Aprender para comprender y resolver problemas. En J. I. Pozo Municio & M. del P. Pérez Echeverría (Eds.), *Psicología del aprendizaje universitario* (pp. 31–53). Ediciones Morata, Madrid.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1991). Higher levels of agency for children in knowledge building: a challenge for the design of new knowledge media. *The Journal of the Learning Sciences*, 1(1), 37–68.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–265.

Maria Paula Dieser: Docente e investigador de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Posee títulos de Profesor en Matemática y Computación, y Licenciado en Matemática. Actualmente desarrolla su tesis para acceder al grado de Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación. Ha participado como investigador desde 2001 en proyectos de investigación relacionados con la educación matemática y la estadística aplicada.

Contacto: pauladieser@exactas.unlpam.edu.ar o pauladieser@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 184-203

O Movimento Conceitual de Divisão a partir da atividade orientadora de Ensino e a Proposição Davydoviana

Josélia Euzébio da Rosa, Sandra Crestani

Fecha de recepción:11/07/2017
Fecha de aceptación: 11/10/2017

Resumen	En la investigación de naturaliza bibliográfica, investigamos el movimiento conceptual propuesto por Davýdov y compañeros para la enseñanza del concepto de división. Consideramos la relación entre abstracto, concreto, general, particular, singular y universal desde una situación desencadenadora de aprendizaje. Realizamos un estudio del material didáctico propuesto por Davýdov y compañeros, y da actividad orientadora de enseñanza propuesta por Moura. En la secuencia, elaboramos un problema matemático relacionado con el concepto de división y lo resolvemos. Procedemos la reducción del concreto al abstracto y ascensión del abstracto al concreto en el movimiento del general para lo particular y singular, orientado por la relación universal. **Palabras clave:** Educación Matemática, Concepto de división, Enseñanza del Desarrollo, Actividad Orientadora de Enseñanza.
Abstract	In this bibliographic research, we investigated the conceptual movement proposed by Davýdov and colleagues for teaching the division concept. We considered the relation among abstract, concrete, general, particular, singular and universal from a triggering situation of learning. We carried out a study on the courseware proposed by Davýdov and colleagues, and the guiding activity for teaching proposed by Moura. Then, we elaborated a mathematic problem regarding to the division concept and solved it. We proceeded the reduction from the concrete to abstract and the ascension from the abstract to concrete in the movement from general to the particular and singular, guided by the universal relationship. **Keywords:** Mathematic education, Division concept, Development teaching, Guiding activity for teaching.
Resumo	Na pesquisa, de natureza bibliográfica, investigamos o movimento conceitual proposto por Davýdov e colaboradores para o ensino do conceito de divisão. Consideramos a relação entre abstrato, concreto, geral, particular, singular e universal a partir de uma situação desencadeadora de aprendizagem. Realizamos um estudo do material didático proposto por Davýdov e colaboradores e da atividade orientadora de ensino proposta por Moura. Na sequência, elaboramos um problema matemático relacionado ao conceito de divisão e o resolvemos. Procedemos a redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto no movimento do geral para o particular e singular orientado pela relação universal. **Palavras chave:** Educação Matemática, Conceito de divisão, Ensino Desenvolvimental, Atividade Orientadora de Ensino.

1 Introdução

Considerando a realidade escolar brasileira (ROSA, 2012; HOBOLD, 2014; BRUNELLI, 2012), a urgência incide na reorganização do ensino, a fim de colocar os estudantes em atividade de estudo e proporcionar o desenvolvimento da capacidade de pensar teoricamente.

Diante disto, questionamo-nos: como ensinar os conceitos matemáticos de modo a desenvolver, nos estudantes brasileiros, a capacidade de pensar matematicamente? Vislumbramos uma possibilidade de resposta no contexto da Atividade orientadora de ensino (AOE) em diálogo com a obra davydoviana, com fundamentos na Teoria Histórico-Cultural, de modo a repensar tanto o conteúdo quanto os métodos de ensino adotados (DAVÝDOV, 1982).

Para Davýdov (1982), o desenvolvimento psíquico dos estudantes também é promovido no processo de ensino, por meio da apropriação dos conceitos teóricos. Esta finalidade deve começar, necessariamente, nos primeiros anos escolares, que é o período em que a atividade principal do estudante é a de estudo.

A condição para iniciar uma atividade ocorre por meio da formação de uma necessidade. Neste sentido, a AOE tem como ponto de partida, na organização do ensino, o desenvolvimento de uma necessidade como expressão social da humanidade que levou à elaboração de determinado conceito ou sistema conceitual. Tal necessidade trata-se, pois, da essência da situação desencadeadora da aprendizagem. Esta deve

> [...] contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (MOURA et al., 2010b, p. 103-104).

Nesse sentido, no contexto da AOE, professor e estudantes são sujeitos em atividade, mediados por seu conteúdo principal, o conhecimento teórico. Este é desenvolvido a partir de situações desencadeadoras de aprendizagem, que podem ser objetivadas por meio de diferentes recursos metodológicos (MOURA et al., 2010a).

Dentre os recursos, elegemos a história virtual para refletir sobre o modo de organização de ensino do conceito de divisão articulado com a proposição davydoviana. A história virtual consiste em uma narrativa que apresenta, em seu enredo, um problema desencadeador, dirigido a um grupo de estudantes que busca solucioná-lo coletivamente (MOURA et al., 2010a).

A necessidade que se apresenta na história virtual tem por objetivo fazer com que os estudantes, em atividade na busca pela solução do problema, percorram um caminho de formação do conceito semelhante àquele “vivenciado historicamente pela humanidade” (MOURA et al., 2010b, p. 105).

Na AOE, a aprendizagem dos conceitos não se configura como uma transmissão de conhecimentos, em que o ensino ocorre apenas pela memorização de procedimentos de cálculo na especificidade da Matemática, mas consiste em apropriar-se, dialeticamente, da lógica interna do conteúdo dos conceitos e o envolvimento dos sujeitos participantes. Neste caso, a apropriação não consiste "na adaptação passiva do indivíduo às condições existentes da vida social. Constitui o resultado da atividade reprodutiva da criança, que assimila procedimentos históricos elaborados [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 73). Fazem parte desse processo "o conteúdo de aprendizagem, o sujeito que aprende, o professor que ensina e, o mais importante, a constituição de um modo geral de apropriação da cultura e do desenvolvimento do humano genérico" (MOURA et al., 2010b, p. 94).

A partir dessas reflexões, elaboramos e desenvolvemos matematicamente uma história virtual. O conceito norteador é o de divisão, inter-relacionado com outros conceitos matemáticos, principalmente o de multiplicação, uma vez que ambos conformam um sistema conceitual cuja relação interna, de origem, é a mesma.

Para a resolução do problema que se explicita na história virtual, fundamentamo-nos nas tarefas davydovianas desenvolvidas nos livros didáticos do terceiro e quarto anos do Ensino Fundamental (ДАВЫДОВ, et al., 2009; ДАВЫДОВ, et al., 2011).

2 Método

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica com respaldo nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, mais voltada aos Fundamentos: Matemáticos e didáticos (DAVÝDOV, 1982; DAVÍDOV, 1987; DAVÍDOV, 1988; MOURA, 1992, 2001; MOURA et al., 2010b). A partir do estudo realizado (CRESTANI, 2016), elaboramos uma história virtual cujo título é *A produção de laços de dona baratinha*.

História virtual: *A produção de laços de Dona Baratinha*

A PRODUÇÃO DE LAÇOS DE DONA BARATINHA

Dona Baratinha era muito conhecida na cidade pelas lindas fitas que usava em seus cabelos. Sempre que ia passear, Dona Baratinha enfeitava-se com um grande laço no alto da cabeça, chamando a atenção de todos que ela encontrava pelo caminho. Eram laços de cores rosa, azul, amarela, vermelha e verde. A bicharada se encantava com tamanha beleza.

Certo dia, Dona Baratinha recebeu, em sua casa, a visita de Dona Baratilde, que vinha lhe fazer um pedido:

– Amiga Dona Barata, será que poderias fazer um grande laço para enfeitar meus lindos cabelos?! Assim como a senhora, também preciso arrumar um pretendente!

Dia a dia foram aparecendo outras amigas, deixando Dona Baratinha baratinada. A maioria delas tinha uma preferência: laços rosas. Eram tantos os pedidos desta cor que ficou preocupada se teria fita suficiente para confeccioná-los.

– E agora, o que fazer? Não sei nem por onde começar! – pensou Dona Baratinha.

Foi aí que se lembrou da mãe, Dona Baratânia. Ela tinha em seu baú um grande rolo de fita rosa, com muitos palmos de comprimento, que daria para fazer vários laços.

Para a produção de cada laço, de tamanho igual, seriam necessários alguns palmos de fita. Dona Baratinha pensou: - Preciso saber se, com a quantidade de fita que disponho, conseguirei fazer todos os laços rosa encomendados.

Porém, Dona Baratinha, sempre que começava a contar palmo a palmo, ficava tonta, cansada e desistia, pois o rolo de fita era muito comprido.

Depois de muito pensar, ela concluiu que precisava encontrar um meio de realizar a contagem de forma mais rápida para não ficar tão tonta. Mas, sozinha, não conseguia encontrar uma solução.

Por isso, Dona Baratinha, que adorava ir à escola da aldeia, decidiu ir até lá solicitar ajuda aos estudantes. Levou o rolo de fita para que eles determinassem a quantidade de laços que poderiam ser confeccionados. Porém, eles não conseguiram ajudá-la, apresentaram vários comprimentos de palmos diferentes, várias quantidades de laços, deixando-a mais baratinada ainda.

Porque isso aconteceu? Você poderia escrever uma carta aos estudantes ensinando-os a resolver o problema da Dona Baratinha, para que eles possam ajudá-la a confeccionar todas as encomendas? Além disso, poderia explicar-lhes por que não chegaram a um único resultado?

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

A expectativa é de que a necessidade apresentada na história virtual, vivenciada pela personagem principal, Dona Baratinha, seja compartilhada pelo coletivo, por meio da orientação do professor. A atividade do professor consiste, pois, na organização do ensino de modo a articular teoria e prática (MOURA et al., 2010a).

A necessidade apresentada na história virtual consiste na reprodução da mesma que ocorreu histórica e socialmente, no que concerne ao controle de quantidades. Neste processo de apropriação das formas culturais, os estudantes realizam "uma atividade que de uma ou outra forma corresponde à atividade humana historicamente objetivada e incorporada" (DAVÍDOV, 1988, p. 73, tradução nossa) na própria cultura. Dentre os problemas que o homem vivenciou, desde os primórdios, havia "a necessidade de controlar as variações de dimensões com as quais se defronta[va] ao delimitar seu espaço físico para morar e produzir" (LANNER DE MOURA, 1995, p. 54).

Nesse sentido, no contexto da história virtual em análise, a necessidade que se configura consiste em realizar a contagem das grandezas discretas e a medição das grandezas contínuas de modo mais rápido, principalmente quando se trata de grandes valores, para os quais a contagem *um a um* torna-se insuficiente ou extremamente trabalhosa.

Além disso, a atividade lúdica, peculiar à história virtual, faz parte do processo. É por meio dela que a criança desenvolve "uma série de neoformações psicológicas. Trata-se, sobretudo, da imaginação e da função simbólica da consciência" (DAVÍDOV, 1988, p. 81). A história virtual apresenta, em seu contexto, elementos de caráter imaginativo que, por meio deles, desenvolve nos estudantes a capacidade de criar o novo em diferentes esferas da atividade e em distintos níveis de significação.

O problema desencadeador refere-se à determinação do total de laços rosa que poderão ser produzidos com a fita que há em um rolo, cujas medidas de comprimento são desconhecidas. A personagem adota uma unidade de medida de comprimento, o palmo. Com ele, tenta medir o rolo de fita, contando um a um. Este procedimento torna-se insuficiente porque há, no rolo, uma grande quantidade de palmos de fita, e a contagem *um a um* gera dificuldades, o que torna insuficiente tal procedimento. A sugestão é que tal necessidade seja vivenciada pelos estudantes a partir da medição de um longo rolo de fita por meio de palmos. Ao reproduzir com eles a medição, a partir do próprio corpo, problematiza-se "para a criança o controle de variações de tamanho, dando-lhe a possibilidade de significar culturalmente as suas ações de medir" (LANNER DE MOURA, 1995, p. 54).

Nesse momento surge, então, a necessidade de utilização de outra unidade de medida para agilizar o cálculo que, por sua vez, possibilite a medição por agrupamentos. Desse modo, a contagem que, inicialmente, era realizada unidade por unidade básica (palmo), será superada por meio de agrupamentos (unidade de medida intermediária), que passa a ser a referência.

Nesta perspectiva, para a continuidade das reflexões referentes à resolução do problema vivenciado por Dona Baratinha, a orientação é que os estudantes considerem um pedaço de fita composto por alguns palmos de comprimento e, com ele, façam a medição.

No decorrer da resolução do problema desencadeador é importante, também, refletir sobre as fragilidades dessa unidade de medida (palmo), por consequência dos diferentes resultados que serão obtidos no coletivo de uma sala de aula. Tais limitações possibilitam a reflexão das fragilidades vivenciadas pelas civilizações primitivas, decorrentes do uso do próprio corpo como unidade no processo de medição (LANNER DE MOURA, 1995; IFRAH, 1997; CARAÇA, 2002). Foi a partir das dificuldades de comunicação enfrentadas pelos povos, ao utilizarem palmos, pés, cúbitos, polegadas, dentre outras referências de comparação, que surgiu a padronização das unidades de medida. No caso da grandeza comprimento, convencionou-se o metro, seus múltiplos e submúltiplos.

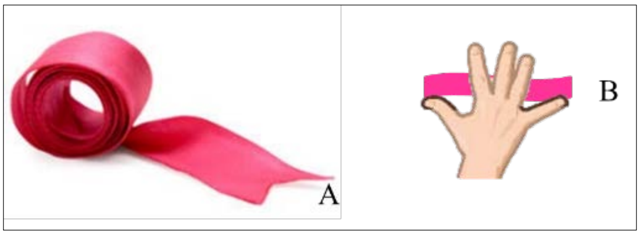
Toda atividade é decorrente de uma necessidade imposta pela vida social do homem, o que o leva ao desenvolvimento do ímpeto pela busca por soluções. A atividade oportunizou à humanidade atingir o alto nível de elaboração e produção conceitual como o que temos contemporaneamente. São movimentos cíclicos em que, em uma dada situação inicial, o homem observa em seu entorno e constata o nível caótico em que se encontra. Na busca pela superação dos problemas que o afligem, ele desenvolve abstrações que o possibilitam sair do nível caótico (concreto ponto de partida) para seguir em direção ao concreto ponto de chegada.

Deste modo, o concreto se manifesta duas vezes: "como ponto de partida da contemplação e da representação, reelaboradas no conceito, e como resultado mental da reunião das abstrações" (DAVÍDOV, 1988, p. 150). O movimento do concreto sensorial ao abstrato, e deste ao concreto síntese, consiste no movimento do pensamento teórico.

3 Resultados

No primeiro movimento, de redução do concreto ao abstrato no contexto da história virtual em análise, após o experimento objetal de comparação entre o comprimento do palmo e do rolo de fita, consideraremos que a medida total é o valor do comprimento *A,* e que a unidade básica (comprimento do palmo) mede *B* (figura 1). Nesse momento, a proposição é que se proceda à reflexão sobre a relação entre as duas medidas, em seu caráter geral, por meio dos termos: maior que, menor que, igual (ROSA, 2012). O professor poderá questionar os estudantes: qual comprimento é maior, de medida *A*, ou de medida *B,* ou são iguais?

FIGURA 1 – Relação entre a grandeza comprimento

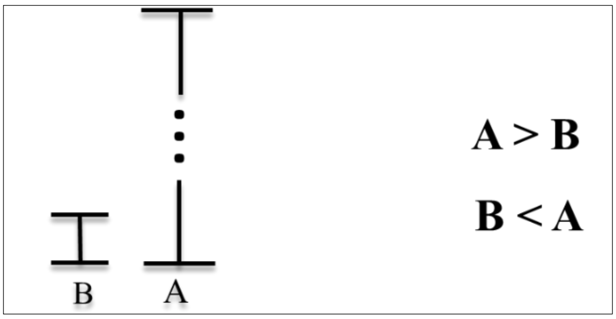


Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

A representação refere-se ao estágio inicial da resolução da história virtual, em seu caráter geral e caótico, uma vez que ainda não há um valor aritmético determinado, tanto para a medida do comprimento do palmo quanto para do rolo de fita. Tal orientação decorre da necessidade de desenvolver as relações entre grandezas, inicialmente por meio das significações algébricas (ROSA, 2012). Esse processo culminará com a revelação do modelo universal do conceito, com base no processo de redução do concreto caótico ao abstrato, mediado por elementos geométricos (retas, arcos e esquemas) e algébricos.

Para que os estudantes possam relacionar a medida *A* com a medida *B*, a representação objetal é abstraída e os comprimentos passam a ser representados por meio de elementos geométricos (segmentos de reta e pontos), conforme a figura 2:

FIGURA 2 – Relação entre a grandeza comprimento

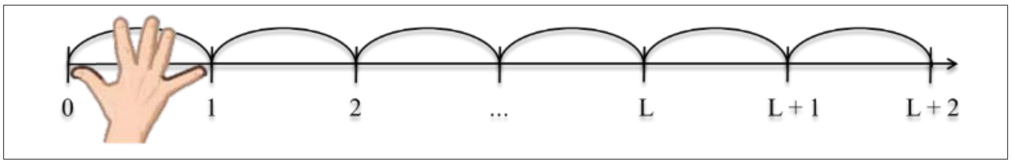


Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

De acordo com a figura anterior (2), o comprimento com medida *A* é maior que o comprimento com medida *B,* ou *B* é menor que *A*. Em outras palavras, a partir da relação entre as duas medidas referentes à grandeza comprimento, portanto, uma grandeza contínua expressa nos segmentos de reta, é possível constatar que o comprimento de medida A é maior que o comprimento de medida *B*. Mas, quantas vezes *B* cabe em *A*? Para determinar o valor desconhecido, faz-se um processo de medição pelo qual se determina quantas vezes a medida de uma grandeza cabe em outra de mesma natureza.

No rolo de fita rosa, cujo comprimento mede *A*, cabem alguns palmos. Entretanto, não sabemos exatamente a quantidade, pois, conforme a figura 1, não estão explícitos o início e o fim do rolo. O segmento que representa o valor *A* (Figura 2) não indica a real proporção com a unidade de medida *B*. Neste caso, no comprimento da fita (medida *A*), cabe uma vez, duas vezes, ..., L, L + 1, L + 2, ..., o comprimento do palmo (medida *B*), como mostra a figura 3:

Figura 3 – Quantidade de palmos



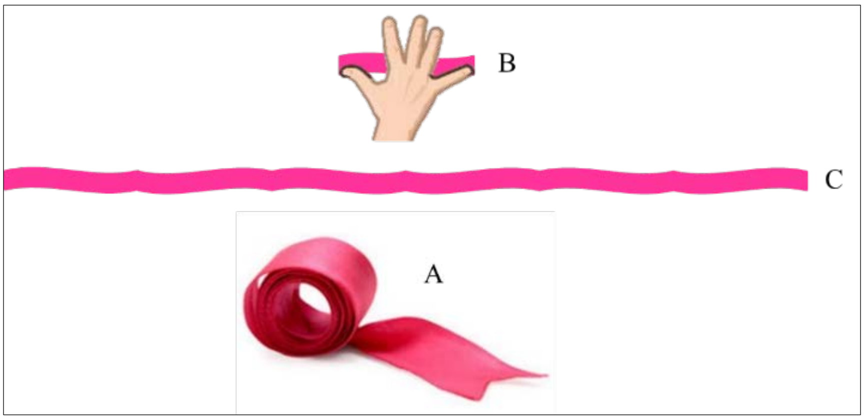
Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Cada arco, no registro do processo de medição (Figura 3), representa uma unidade de medida básica. Nesta construção, escolhe-se, aleatoriamente, um ponto na reta para representar a ausência de palmos. A partir dele, cada um é registrado com um arco à sua direita. O primeiro palmo registra-se com o número *um*. O número *dois* surge a partir da ideia de adição (1 + 1) e, assim, sucessivamente. Desse modo, para qualquer número (*L*) haverá sempre seu sucessor: L, L + 1, L + 2.

Assim, o conceito de número é revelado como o resultado da relação entre duas grandezas contínuas. O objeto dado visualmente, na figura da história virtual, assume um papel importante, pois não se limita apenas àquilo que se apresenta diretamente aos olhos. Não é possível determinar o comprimento do rolo de fita a partir da análise da imagem (Figura 1), pois não são visíveis seu início o fim, pois suas extremidades estão enroladas. Disto decorre que o caráter visual é insuficiente para a resolução do problema desencadeador. Faz-se necessária a atividade do pensar.

A dificuldade vivenciada por Dona Baratinha está na impossibilidade de medir palmo a palmo, porque o rolo de fita (medida *A*) é muito comprido, tornando o cálculo inadequado para as condições objetivas apresentadas. É nessa limitação que surge a necessidade de utilizar outra unidade de medida, maior que a anterior (básica ou medida *B*), que permita a medição com maior agilidade e rapidez. Para tanto, a sugestão incide na introdução da unidade de medida intermediária, constituída a partir do comprimento de cada laço *C*, conforme a figura 4.

Figura 4 – Relação entre A, B e C



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Na história virtual, a quantidade de vezes que *B* cabe em *A* não está determinada, portanto, representaremos pela letra *n*. Deste modo, *B* é a unidade de medida básica; *A* é a medida de todo o rolo de fita, *n* é o total de medidas básicas que cabem no todo. *N* é, portanto, a quantidade de vezes que *B* cabe em *A*: A ÷ B = n (Figura 5).

Figura 5 – Introdução da primeira seta no esquema

$$B \xrightarrow{n} A$$

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Como já foi dito, a unidade básica (*B*) é muito pequena para a medição. Portanto, é necessária a introdução de uma unidade intermediária, formada a partir da unidade básica. Intermediária porque seu tamanho fica entre a unidade básica e o todo a ser medido. Representaremos o valor genérico da unidade de medida intermediária por *p*. A unidade de medida básica (*B*) cabe *p* vezes em *C* (unidade de medida intermediária): C ÷ B = *p*. Este consiste na quantidade de palmos de fita necessária para produção de um laço (Figura 6).

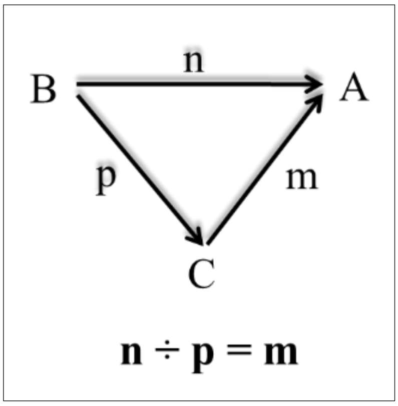
Figura 6 – Introdução da segunda seta no esquema

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "p"'] & A \\ & C \end{tikzcd}$$

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Dona Baratinha quer saber quantos laços serão confeccionados com a quantidade de palmos de fita que dispõe. Para tanto, é preciso determinar quantas vezes *p* cabe em *n*. Representaremos o resultado dessa operação pela letra *m* (Figura 7):

Figura 7 – Introdução da terceira seta



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

É importante ressaltar que as letras posicionadas nas extremidades do esquema correspondem às medidas *A*, *B* e *C*. As demais (*n*, *p* e *m*) referem-se ao resultado da comparação entre as referentes medidas. Como o valor aritmético ainda é desconhecido, utilizamos as letras representativas da relação comparativa.

A operação de divisão consiste, então, na quantidade de vezes (*m*) que a medida intermediária (*p*) cabe no todo (*n*), ou seja, quantas vezes o *divisor* (*p*) cabe no *dividendo* (*n*): n ÷ p = m. Com essa representação, concluímos o processo de redução do concreto ao abstrato. Atingimos a abstração da relação essencial, universal, do conceito de divisão.

As abstrações realizadas até o momento desempenharam o papel de revelar a relação essencial do conceito de divisão para que o compreendêssemos profundamente, além da aparência externa dos objetos em análise (rolo de fita e palmo). A partir dessa revelação atingimos, por meio das abstrações, a relação universal do conceito, sua expressão literal ou algébrica.

Em síntese, o ponto de partida foi o plano objetal, a relação quantitativa entre o comprimento do palmo e do rolo de fita. Trata-se do estágio inicial do processo de apropriação do conhecimento, marcadamente pelos elementos sensoriais relacionados às grandezas e realizações das abstrações necessárias. No entanto, vale o alerta que esse ponto de partida não é empírico, pois o valor desconhecido não está dado diretamente. Ao contrário, nesse estágio explicita-se a necessidade de revelar a relação interna dos elementos envolvidos.

Entretanto, os órgãos dos sentidos são fundamentais nessa primeira etapa, concreto ponto de partida, que reflete objetivamente os fenômenos e os objetos como uma unidade, "como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações" (KOPNIN, 1960, p. 298). Diz respeito ao processo inicial de apropriação do conhecimento, que começa pela sensação e a percepção sensível. Importa considerar que a "percepção é somente o ponto de partida do conhecimento, este não pode terminar nela [...]" (KOPNIN, 1960, p. 303), pois não é capaz de captar a essência dos objetos e fenômenos.

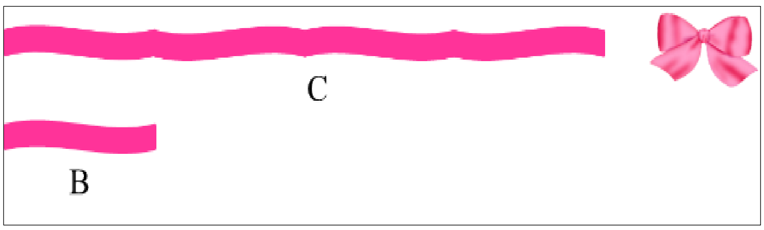
A modelação acontece após a revelação, no plano objetal, da relação essencial do conceito de divisão, que consiste na quantidade de vezes que a medida intermediária *p* cabe no todo *n*. Em outras palavras, a partir das relações entre as grandezas, o concreto sensorial conduziu a abstrações e possibilitou a revelação da relação essencial, universal do conceito. Procedemos à representação do modelo universal em níveis mais abstratos que o plano objetal: modelo gráfico (esquema de setas e de segmento) e literal (por meio de letras).

Em continuidade à resolução da história virtual, iniciamos o movimento de ascensão do abstrato ao concreto, visto que a "abstração constitui um degrau, uma via que leva ao conhecimento concreto e multilateral" (KOPNIN, 1960, p. 308). Para tanto, atribuímos um valor à unidade de medida intermediária. Tal procedimento representa o início da passagem do geral para o particular. Esta é mediada pela abstração revelada anteriormente. Isso porque o particular não "é uma simples combinação dos caracteres universais e particulares, mas o resultado do estudo do fenômeno, quando o pensamento se move do universal ao particular, destacando os traços essenciais e determinantes do particular" (STERNIN, 1960, p. 275).

A manifestação do particular está expressa no contexto dos conceitos de multiplicação e divisão a partir da delimitação do valor aritmético da unidade de medida intermediária, o divisor. A necessidade de realizar a medição por meio de agrupamentos (*três em três, quatro em quatro, cinco em cinco*...) expressa a adoção de um valor para a unidade de medida intermediária. Este é o elemento fundamental, tanto para o conceito de multiplicação quanto de divisão que, juntos, formam um sistema conceitual indissociável.

De acordo com Sternin (1960), o particular é o elemento de ligação entre o singular e o universal que, na especificidade da relação em análise, é a unidade de medida intermediária (divisor). Supomos que, em valor, seja 4. Assim, para a confecção de cada laço, serão necessários 4 palmos de fita. A partir da unidade de medida básica (palmo), cuja medida é representada pelo comprimento *B*, compomos a unidade de medida intermediária (divisor), constituída por 4 palmos (Figura 8).

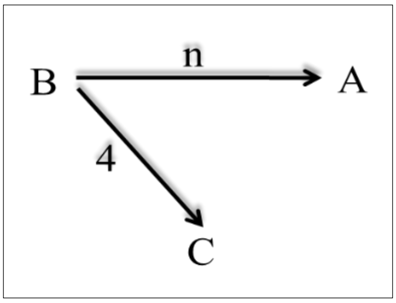
Figura 8 – Constituição da particularidade



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

A cada 4 palmos é possível produzir um laço. Ou seja, a unidade de medida básica (*B*) cabe 4 vezes na medida intermediária (*C*). Ou, ainda: C ÷ B = 4 (Figura 9).

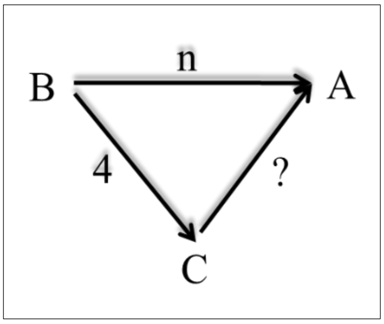
Figura 9 – Esquema parcial, representativo da unidade de medida intermediária



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Para determinar quantos laços poderão ser produzidos ao todo, com a quantidade de fita disponível, será necessário calcular quantas vezes a medida intermediária 4 cabe no todo *n*, conforme o esquema de setas a seguir (Figura 10):

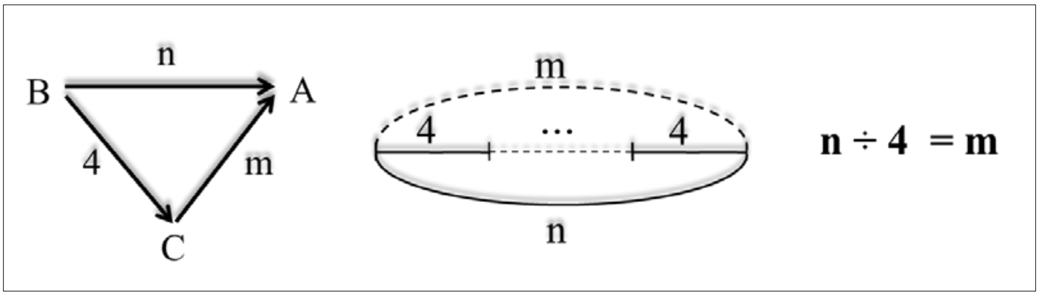
Figura 10 – Esquema de setas representativo da operação de divisão n ÷ 4 = _____



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Esse procedimento, de determinar quantas vezes o *divisor* (4) cabe no *dividendo* (*n*), consiste na operação de divisão, cujo resultado é o *quociente,* o qual será representado pela letra *m* (Figura 11).

Figura 11 – Modelo representativo da operação de divisão



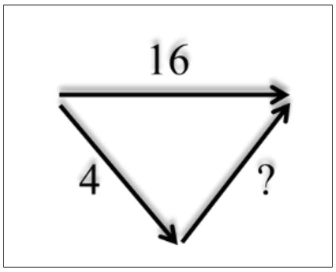
Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Esses elementos que compõem a relação essencial do conceito de divisão (unidade de medida básica, a unidade de medida intermediária e o total de ambas) representam, aqui, uma relação particular, na qual o valor da unidade de medida intermediária é 4.

A partir da revelação da relação particular e sua representação expressa geométrica e algebricamente, iniciamos as reflexões no plano aritmético. É nesse estágio que ocorre a generalização conceitual, em que o modelo universal revelado pode ser aplicado nas diversas possibilidades singulares. Então, atinge-se o concreto ponto de chegada. Esse movimento constitui a passagem do objeto, em sua representação particular em direção ao singular. A partir da relação universal do conceito de divisão, por intermédio da particularidade, procederemos à generalização da relação universal do conceito de divisão para situações singulares. Eis o processo de concretização da abstração.

Suponhamos que o rolo de fita de Dona Baratinha contenha 16 unidades básicas de comprimento, ou seja, 16 palmos, conforme o esquema apresentado na figura 12:

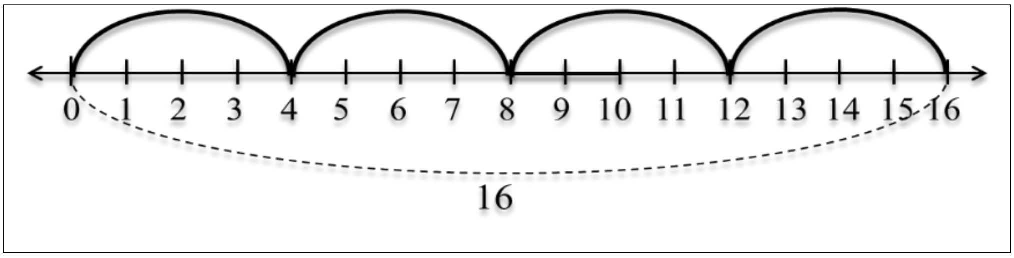
Figura 12 – 1ª tarefa, esquema de setas representativo da operação de divisão



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Como determinar a quantidade de laços com esse comprimento de fita, considerando que, para a produção de cada um, são necessários 4 palmos? De acordo com o esquema anterior, o total de medidas básicas (dividendo) consiste em 16 unidades, e o valor da medida intermediária (divisor) é 4. A quantidade de vezes que 4 cabe em 16 constitui o quociente. Para determiná-lo, a reta numérica (Figura 13) é o elemento mediador.

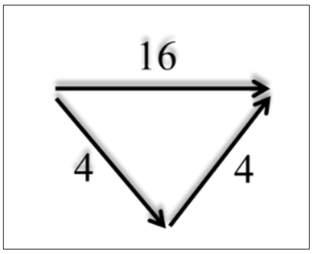
Figura 13 – 1ª tarefa, operação de divisão na reta numérica



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Na reta, formamos agrupamentos compostos por 4 unidades cada até atingir as 16 unidades. A quantidade de agrupamentos formados indica o resultado da operação da divisão: o divisor cabe 4 vezes no dividendo (Figura 14).

Figura 14 – 1ª tarefa, esquema de setas da operação 16 ÷ 4 = 4



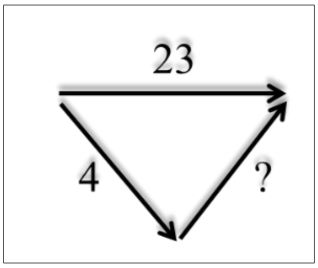
Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Ao atingir a singularidade do conceito de divisão, os elementos que constituem a relação essencial são representados aritmeticamente: 16 ÷ 4 = 4. Ou seja, com 16 palmos de fita serão produzidos 4 laços.

Outras hipóteses de singularidades podem ser objeto de reflexão. Inclusive, o professor poderá organizar os estudantes em grupos e, para cada um, disponibilizar pedaços de fita de comprimentos diversos, para que eles realizem diferentes medições. Haverá, assim, distintas singularidades. Dentre estas, poderão ocorrer sobras de pedaços de fita insuficientes para fazer um laço.

TAREFA 2: Por exemplo, se o comprimento total de fita consistir em 23 palmos, sendo 4 palmos para a produção de um laço, temos (Figura 15):

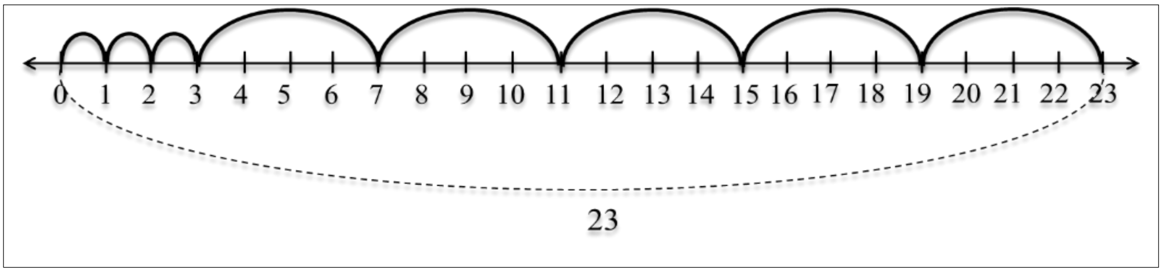
Figura 15 – 2ª tarefa, esquema de setas representativo da operação 23 ÷ 4 = _____



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

O registro dos dados no esquema possibilita a identificação da operação a ser realizada. Como o valor desconhecido refere-se à quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária se repete, trata-se da operação de divisão. O dividendo é 23 e o divisor, 4. Qual o valor do quociente? Será determinado por meio da reta numérica (Figura 16).

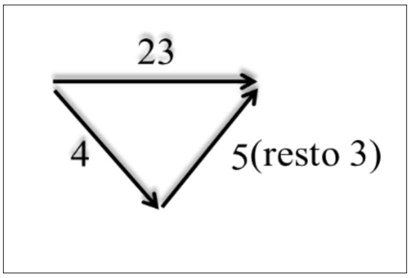
Figura 16 – 2ª tarefa, operação de divisão com resto, na reta numérica



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Com cada agrupamento, composto por 4 unidades, é possível produzir um laço. A partir do todo (23), podemos confeccionar 5 laços de mesma medida e sobram 3 unidades de medida básica (resto da divisão). A representação da operação no esquema consiste no seguinte (Figura 17):

Figura 17 – 2ª tarefa, esquema representativo da operação 23 ÷ 4 =



Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

E se o resto da divisão for 4? Isso significa que existe um novo agrupamento e não haverá resto. Disso decorre que o valor do resto, na operação da divisão, tem que ser, necessariamente, menor do que o valor divisor (medida intermediária).

Suponhamos que o rolo meça 484 palmos. Como calcular a quantidade de laços a serem produzidos? Neste caso, em virtude do elevado valor do dividendo, a utilização da reta numérica para realização da operação torna-se inviável. Faz-se necessária a operacionalização no algoritmo. Entretanto, sua sistematização requer a devida reflexão sobre sua estrutura interna relacionada ao valor posicional numérico. Por exemplo, na operação 484 ÷ 4 =___, o dividendo (484) é composto por 4 centenas, 8 dezenas e 4 unidades (Figura 18).

Figura 18 – 3ª tarefa, decomposição do dividendo

$$484 \div 4$$

$$\underbrace{4 \text{ centenas} \div 4}_{} + \underbrace{8 \text{ dezenas} \div 4}_{} + \underbrace{4 \text{ unidades} \div 4}_{}$$

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Uma centena é constituída por 100 unidades ou 10 dezenas. Assim, em 4 centenas há 400 unidades ou 40 dezenas. Em 1 dezena há 10 unidades, portanto, em 8 dezenas há 80 unidades. Para realizar a divisão, utilizaremos dividendos parciais: 4 centenas, 8 dezenas, 4 unidades. Iniciaremos com a divisão da centena: 4 centenas ÷ 4 = 1 centena (Figura 19).

Figura 19 – 3ª tarefa, representação do algoritmo: 4 centenas ÷ 4 = 1 centena

$$\begin{array}{c|l} \text{C D U} & \\ 4\;8\;4 & 4 \\ \cline{2-2} & 1 \\ & \text{C} \end{array}$$

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

O próximo dividendo parcial serão as 8 dezenas que, divididas por 4, resultarão em 2 dezenas (Figura 20).

Figura 20 – 3ª tarefa, representação do algoritmo: 8 dezenas ÷ 4 = 2 dezenas

$$\begin{array}{c|l} \text{C DU} & \\ 4\;8\;4 & 4 \\ \cline{2-2} & 1\;2 \\ & \text{C D} \end{array}$$

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

O último dividendo parcial são as 4 unidades que, divididas por 4, resultam em 1 unidade (Figura 21).

Figura 21 – 3ª tarefa, representação do algoritmo: 4 unidades ÷ 4 = 1 unidade

CDU 4 8 4	4
	1 2 1 CDU

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

Desse modo, a operação 484 ÷ 4 = ___ resulta em: 1 centena, 2 dezenas, 1 unidade (121). Os dividendos parciais, por serem maiores ou iguais ao divisor, possibilitaram a divisão parcial.

A síntese dessa tarefa consiste em: como o dividendo apresenta valores correspondentes à centena, dezena e unidade, no quociente haverá resultados referentes à centena, dezena e unidade.

Enfim, para concluir o presente artigo, a seguir, apresentaremos uma das possibilidades de respostas ao problema desencadeador.

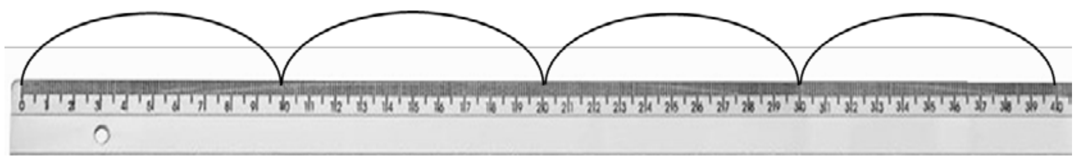
Figura 22 – Carta para Dona Baratinha

Caros estudantes,

Ao ler o relato da experiência que vocês vivenciaram no problema da produção de laços apresentado por Dona Baratinha, ficamos interessadas em ajudar, pois não é nada fácil ensinar uma baratinha a fazer medições e cálculos.

Primeiramente, alertamos que a adoção do palmo como unidade de medida, para medir comprimentos, inspira cuidados, pois cada ser apresenta palmos com comprimentos diferentes. Para resolver o problema de Dona Baratinha, sugerimos que vocês utilizem o metro como unidade de medida.

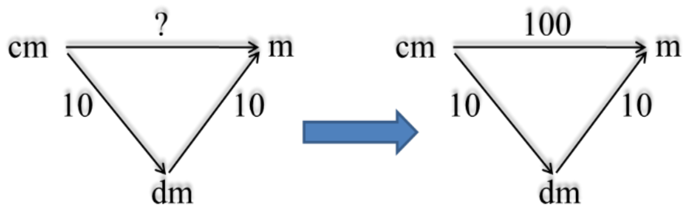
Imaginemos que o comprimento do palmo de Dona Baratinha meça aproximadamente 10 cm. Para evitar equívocos, utilizaremos o centímetro, unidade de medida já padronizada historicamente pela humanidade como submúltiplo do metro. No entanto, se não for 10 cm, basta substituí-lo pela medida correta do comprimento do palmo da personagem, pois o raciocínio matemático será o mesmo. Vale lembrar que, para a confecção de cada laço, são necessários quatro palmos. Assim, em vez de utilizar o palmo como instrumento de medida, vamos utilizar a régua, mas poderia ser o metro, fita métrica, trena, entre outros.



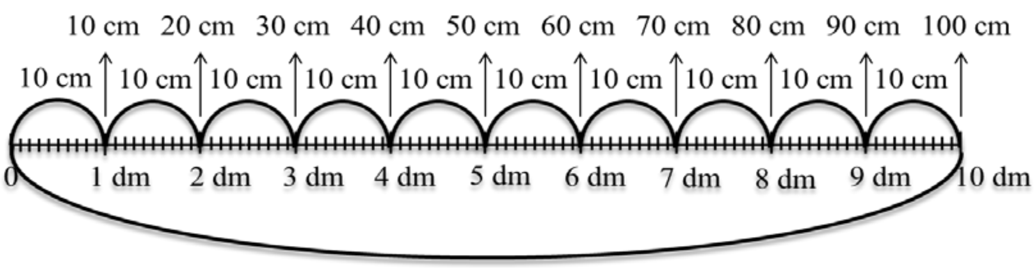
Na régua, foi representada a unidade de medida equivalente ao que supomos para o comprimento do palmo (10 cm). Esta se repetiu por 4 vezes, totalizando 40 cm, que será o comprimento de fita necessário para a produção de cada laço, conforme os esquemas a seguir:

Para a produção de cada laço, na hipótese de que o comprimento do palmo seja 10 cm, serão necessários 40 cm de fita. Suponhamos, também, que a medida do rolo de fita seja 1 metro e 20 centímetros. Primeiramente, transformaremos 1 metro em centímetros, para adotarmos a mesma unidade de medida na realização do cálculo. Então, quantos centímetros compõem um metro?

É importante esclarecer que, de acordo com a padronização realizada historicamente, a unidade de medida intermediária do metro é um decímetro, equivalente a 10 cm. Esta se repete por 10 vezes. Com base nessas informações, já é possível responder ao questionamento anterior, conforme o esquema de setas:



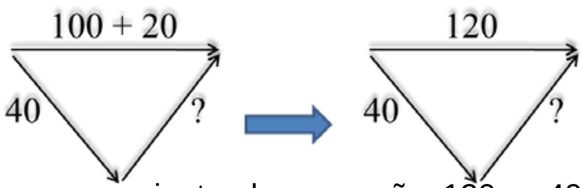
Por meio do esquema de setas, representamos a unidade de medida intermediária, 10 cm. Em 1 decímetro cabem 10 centímetros. Em 1 metro cabem 10 decímetros. A medida intermediária 10 repete-se por 10 vezes, totalizando, assim, 100 cm. Deste modo, em um metro há 100 cm, que equivale a 10 dm. No segmento de reta, a seguir, apresentamos a relação entre o metro, decímetro e centímetro, na forma de um sistema de medidas:



1 m = 10 dm = 100 cm

Como supomos anteriormente, o rolo de fita mede 1 metro e 20 centímetros. 1 metro corresponde a 100 centímetros. O dividendo é, portanto, 120 centímetros

(100 + 20). A unidade de medida intermediária, agora, refere-se ao comprimento de cada laço, 40 cm (divisor), conforme o esquema de setas.



Para determinar o quociente da operação 120 ÷ 40, a operacionalização segue:

$$\begin{array}{rrr|l} C & D & U & \\ 1 & 2 & 0 & 4\,0 \\ -0 & & & 0\;\;0\;\;3 \\ \hline 1 & 2 & & C\;\;D\;\;U \\ -0 & 0 & & \\ \hline 1 & 2 & 0 & \\ -1 & 2 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

O primeiro dividendo parcial, 1 centena, dividida por 40 unidades, resultará em nenhuma centena. 1 centena é transformada em 10 dezenas que, somadas a 2 dezenas, constituirão o segundo dividendo parcial, 12 dezenas. As 12 dezenas divididas por 40 unidades resultarão em 0 dezenas. As 12 dezenas são transformadas na ordem imediatamente inferior, 120 unidades. 120 unidades divididas por 40 unidades resultarão em 3 unidades, não sobrando resto.

Enfim, estudantes, vocês não chegaram a resultados únicos porque adotaram comprimentos de palmos diferentes como unidade de medida. Quanto à solicitação de Dona Baratinha, se o rolo de fita medir 120 cm de comprimento, e a medida do palmo for 10 cm, poderão ser confeccionados 3 laços. Porém, se essas medidas forem diferentes, basta seguir o mesmo raciocínio que adotamos no decorrer desta carta-resposta. Sempre que precisarem, contem conosco! Um grande abraço!

Fonte: Elaboração das autoras, 2015.

4 Conclusão

Em síntese, o ponto de partida das reflexões foi a relação entre as grandezas, com possibilidades de revelação dos elementos que compõem a relação universal do conceito de divisão. Trata-se da unidade de medida básica, unidade de medida intermediária e do total de ambas em interconexão. A unidade de medida intermediária é elemento essencial do conceito de divisão e de multiplicação. Ela consiste nos agrupamentos que se expressam na multiplicação, como o multiplicando; e na divisão, como divisor.

No processo de sistematização da operacionalização do conceito de divisão, na decomposição do dividendo em outros parciais e, também, na padronização das medidas, o sistema adotado por Davýdov também foi o decimal.

Além disso, no processo de sistematização da operação de divisão, o valor posicional do número foi considerado para a reflexão sobre os dividendos parciais, o que deu significação numérica ao algoritmo. Não se trata de um simples procedimento memorizável, cujos passos são seguidos sem nenhuma ou pouca explicitação do conceito em operacionalização, qual seja, o de número. Ao contrário, nossa pretensão, ao produzir a história virtual e desenvolvê-la matematicamente, é de que essa se constitua em subsídio para as reflexões sobre a organização do ensino do conceito de divisão com teor teórico, que subsidie o desenvolvimento do cálculo mental.

No decorrer deste artigo refletimos o conceito de divisão a partir da ideia de medida. Não abordamos situações de divisão como partilha. No entanto, temos como pressuposto, a ser analisado futuramente, de que a essência operacional é a mesma. Além disso, não concebemos o ensino de Matemática de forma neutra. Nessa direção, fica em aberto reflexões outras, que podem ser abordadas a partir da situação desencadeadora em análise, como por exemplo, a questão de gênero. Esta também se constitui em objeto de investigação de nosso grupo de pesquisa.

Referências

BRUNELLI, J. B. (2012) *Projeto ou atividade de ensino e de aprendizagem? Expressões da implantação da proposta curricular do estado de Santa Catarina*. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

CARAÇA, B. J. (2002) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

CRESTANI, S. (2016) *Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão*. 2016. 126f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão.

DAVÝDOV, V. V. (1982) *Tipos de generalización en la enseñanza.* 3ª edición. Habana: Editorial Pueblo y Educación.

DAVÍDOV, V. V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:* investigación teórica y experimental. Tradução de Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

HOBOLD, E. S. F. (2014) *Proposições para o Ensino da tabuada com base nas Lógicas Formal e Dialética.* 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Sul de Santa Catarina, UNISUL, Tubarão.

IFRAH, G. (1997) História universal dos algarismos. *A inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.* Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira. v. 1, 2 v.

KOPNIN, P. V. (1960) O abstrato e o concreto. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. *Categorías del Materialismo Dialéctico*. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. p. 298-323.

LANNER DE MOURA, A. R. (1995) *A Medida e a Criança Pré-Escolar.* 1995. 210 f. Tese (Doutorado na Área de Educação Matemática). Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). *Ensinar a ensinar* **-** didática para a escola fundamental e média. 1. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001. p. 143-162.

______. *Construção do signo numérico em situação de ensino.* 1992. 151 f. Tese (Doutorado)-USP, São Paulo, 1992.

MOURA, M. O. et al. *Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem*. Revista Diálogo Educ., Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010a.

______. *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: LiberLivro, 2010b.

ROSA, J. E. (2012) *Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas*. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação). Área de concentração: Educação Matemática - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

STERNIN, A. (1960) O. *O singular, o particular e o universal.* In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. Categorías del Materialismo Dialéctico. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. p. 257-297.

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. *Математика: Учебник для 4 класса нач*. школы (Система Д. Б. Эльконина - В. В. Давыдова).В 2-х кн. 8-е изд. - М.: ВИТА-ПРЕСС, 2011. - 144 с.: ил.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы. 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2009.

Josélia Euzébio da Rosa:
Licenciada em Matemática. Mestre (2006) e Doutora (2012) em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática, pela Universidade Federal do Paraná. Professora do Mestrado em Educação da UNISUL: Universidade do Sul de Santa Catarina (Tubarão). Leciona, no Mestrado em Educação, as disciplinas fundamentos da Teoria Histórico-Cultural e Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática e no curso de pedagogia a disciplina Fundamentos e Metodologias de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. joselia.euzebio@yahoo.com.br

Sandra Crestani:
Licenciada em Matemática (2010). Mestre pela Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL), em 2016. Leciona, na Rede Municipal de Criciúma, para alunos do Ensino Fundamental II. sandra_crestani@hotmail.com

Fontes financiadoras: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 204-223

El Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y la Web 2.0 como elementos integradores del conocimiento didáctico del contenido matemático

Yerikson Suárez Huz

Fecha de recepción: 18/08/2017
Fecha de aceptación: 31/08/2017

Resumen	La enseñanza y aprendizaje de la matemática han adquirido un papel cada vez más preponderante dada la relevancia de esta disciplina en la sociedad actual. Desde el campo de la educación matemática se ha procurado ofrecer respuestas a los problemas asociados, por un lado, al manejo del contenido matemático en un contexto escolar, y por otra parte, al uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en el estudio de la matemática. Por ello, se expone en este ensayo teórico la relación entre el Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y la Web 2.0 como elementos integradores del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. **Palabras clave**: Mapa de Enseñanza-Aprendizaje, Web 2.0, Conocimiento didáctico del contenido matemático, TIC.
Abstract	The teaching and learning of mathematics has acquired an increasingly preponderant role given the relevance of this discipline in today's society. From the field of mathematics education has tried to offer answers to the problems associated on the one hand, the management of mathematical content in a school context, and on the other hand, the use of Information and Communication Technologies (ICT) in the study of mathematics. For this reason, the theoretical relationship between the Teaching-Learning Map and Web 2.0 is presented as an integrating element of Didactic Knowledge of Mathematical Content. **Keywords**: Teaching-Learning Map, Web 2.0, Didactic Knowledge of mathematical content, ICT.
Resumo	O ensino e aprendizagem da matemática tem adquirido um papel cada vez mais preponderante dada a relevância dessa disciplina na sociedade atual. Com o campo da educação matemática se tem procurado oferecer respostas aos problemas associados por um lado, ao manejo do conteúdo matemático em um contexto escolar, e, por outro, ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no estudo da matemática. Por esta razão, se expõe nesse ensaio teórico a relação entre o Mapa de Ensino-Aprendizagem e a Web 2.0 como elementos integradores do Conhecimento Didático do Conteúdo Matemático. **Palavras-chave:** Mapa de ensino e aprendizagem, Web 2.0, Conhecimento Didático do Conteúdo Matemático, TIC.

1. Introducción

Desde el campo de la Educación Matemática se genera la necesidad de identificar problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, entre los que es posible mencionar aquellos asociados al conocimiento del contenido matemático que posee el profesor, en formación o en ejercicio, y los modos de presentarlo y hacer que los estudiantes se empoderen de ellos. En palabras de León (2013)

> Qué enseñar sobre un tema matemático escolar y cómo enseñarlo son referentes característicos del quehacer cotidiano del profesor que prefiguran su accionar en el aula. Ser capaces de buscar respuestas a estas interrogantes se constituye en una de las capacidades a desarrollar por el futuro docente en su proceso de formación, tanto inicial como permanente. (p. 1)

De este modo, el conocimiento del contenido le permite al docente, no solo reconocer las nociones fundamentales de la Matemática, sino que también ha de reconocer relaciones entre los conceptos e ideas, ubicar los asuntos epistemológicos subyacentes a su evolución histórica, y entender sus posibles aplicaciones a otros campos de conocimiento. En este sentido, Ball (2000), insta a que en la formación de profesores debe abordarse, no sólo en el conocimiento matemático de los futuros docentes, sino también desde la influencia de éste en la enseñanza de la Matemática, por considerarlo un elemento clave en actividades pedagógicas como el diseño de estrategias didácticas, la selección de tareas y actividades, y el empleo de metodologías de enseñanza. Pinto y González (2008) hacen mención al hecho de que

> Conocer bien el contenido de una lección incrementa la capacidad del profesor para realizar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas con el contenido y profundizar en el porqué y el para qué de la asignatura. No conocer bien el contenido es limitativo para desarrollar muchas de estas capacidades o habilidades (p.89)

Ahora surge una cuestión referida al modo de realizar un análisis del contenido matemático desde un punto de vista también didáctico, esto es, las capacidades a poner en práctica por el docente. Tanto Gómez (2005) como Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2007), señalan tres de estas. En primer lugar, la recopilación de la información que permita identificar los diversos significados del objeto matemático; en segundo, la organización de la información recopilada de manera provechosa para la planificación, y en tercer lugar, la selección del contenido que el profesor considere adecuado de acuerdo al nivel y contexto escolar donde se desenvuelve; todo esto en procura del dominio de la multiplicidad de concepciones de los contenidos asociados a un cierto tópico matemático.

Una posible herramienta para la organización de estos elementos es propuesta por Orellana (2002) con la elaboración de los Mapas de Enseñanza Aprendizaje (MEA), el cual puede ser utilizado como un recurso para la planificación y organización de los contenidos asociados a un tema matemático particular. Al respecto, Suárez (2014, 2016) viene realizando estudios que vinculan los MEA con las TIC, y ha planteado las bondades que ofrecen las herramientas digitales en la planificación docente y para el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido matemático.

La incorporación de las TIC en el contexto de la enseñanza de la Matemática ha sido un tema ampliamente abordado por un importante número de investigadores en el campo de la Educación Matemática (Borba y Villarreal, 2005), y persiste en la actualidad una nueva visión donde, gracias al uso de las TIC, se hace mayor énfasis en el trabajo colectivo, colaborativo, el aprendizaje como proceso y no como resultado, la socialización del saber y la construcción en conjunto del conocimiento. Es por ello, que el objetivo de este ensayo teórico es *vincular la organización de contenidos matemáticos a través del uso del Mapa de Enseñanza Aprendizaje (MEA) y las herramientas Web 2.0, como elementos integradores del conocimiento didáctico del contenido matemático.*

2. El Mapa de Enseñanza-Aprendizaje (MEA) y el conocimiento didáctico del contenido matemático.

Un amplio número de investigaciones en Educación Matemática han tratado el asunto del conocimiento que debe ostentar un docente de matemática. Hill, Ball y Schilling (2008) proponen un modelo denominado *conocimiento matemático para la enseñanza,* el cual es definido por los autores como el conocimiento matemático que los docentes emplean en el salón de clases para generar el aprendizaje en sus estudiantes. El mencionado modelo está constituido a su vez, por dos macro categorías o tipologías denominadas *Conocimiento del Contenido Matemático*, y el *Conocimiento Pedagógico del Contenido*, los cuales se describen brevemente a continuación.

El *Conocimiento del Contenido Matemático* está referido al conjunto de saberes que en el área de Matemática posee el profesor. El mismo está subcategorizado en tres tipos de conocimiento; (a) el *Conocimiento Común del Contenido* referido a aquel que posee cualquier sujeto y que le permite resolver un problema o responder a determinada situación o planteamiento nada más que con habilidades matemáticas básicas como contar, clasificar y ordenar; (b) el *Conocimiento Especializado del Contenido* obtenido producto de un proceso de formación sólida, y a través del cual es posible hallar relaciones entre los conceptos, generalizar y abstraer, deducir, argumentar, demostrar y evidenciar explicaciones lógicas; y (c) el *Conocimiento del Horizonte Matemático*, referido al dominio de las conexiones existentes entre los diversos tópicos matemáticos con otras disciplinas y áreas del conocimiento.

Por su parte, el *Conocimiento Pedagógico del Contenido* aborda los aspectos didácticos del objeto matemático, y está a su vez constituido por (a) el *conocimiento acerca del contenido y el estudiante*, relacionado al modo como los estudiantes aprenden y conocen acerca de determinado tema matemático, cuáles son los obstáculos, las dificultades, concepciones, errores y creencias, así como los procesos cognitivos que suelen activarse al momento en el que los aprendices comienzan su proceso de estudio, (b) el conocimiento sobre el *contenido y su enseñanza* que tanto implica saberes relativos a las metodologías de enseñanza, la selección de recursos y materiales didácticos, y el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje, y finalmente, (c) el *contenido y el curriculum*, asociado a aspectos como los objetivos que se esperan alcanzar, orden de los contenidos según diseño de programas, a quién va dirigido el proceso formativo, y tiempo de dedicación. En la Figura 1 se pueden observar los diversos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, que como se pueden apreciar, se dividen en dos grandes bloques o dominios, como los llaman los autores antes citados, y también se aprecian cada uno de los subdominios involucrados.

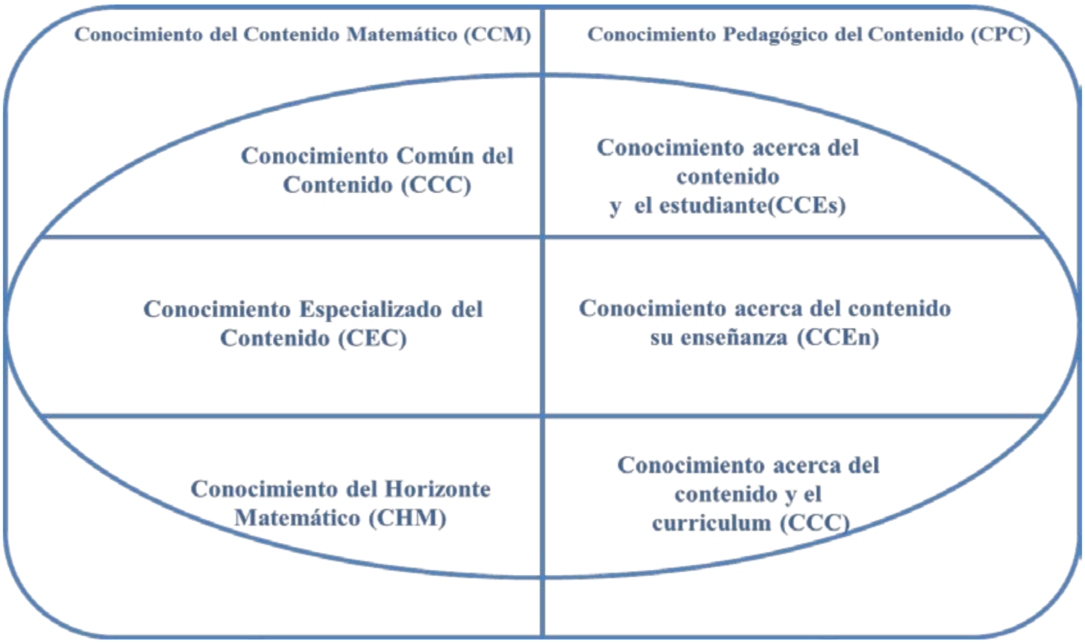


Figura 1. Esquema del conocimiento matemático para la enseñanza. Tomado y adaptado de Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teacher´s topic-specific knowledge of students. Por H. Hill, D. Ball y S. Schilling (2008), *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Ahora bien, una cuestión clave es el modo en que el docente puede exhibir estos tipos de conocimientos en su praxis, o la manera en la que puede adquirir dicho conocimiento de forma sistemática. Al respecto, postulamos el uso de los Mapas de Enseñanza-Aprendizaje (MEA) como medio para concretizar elementos asociados a dichos conocimientos. Orellana (2002) expone la posibilidad del empleo de diagramas como un recurso para la organización de los contenidos referidos a un tema o tópico matemático, denominados como MEA. Para la construcción de un MEA se ha de partir de una idea central, un contenido alrededor del cual se organizan y asocian a través de ramificaciones diversas ideas y aspectos con los cuales guarda relación el tópico matemático central.

Orellana (2002) propone como una opción para la construcción de una MEA del empleo de preguntas claves que aborden los elementos medulares del tema a desarrollar, las cuales denomina preguntas poderosas. Preguntas como ¿por qué enseñar este tema?, ¿Qué usos ya aplicaciones hay?, ¿Cómo resolver determinada situación?, ¿Qué otras formas, representaciones o significados existen?, ¿cómo se originó este concepto o idea matemática?, entre otras, pueden ser asociadas a los cuadros descrito anteriormente y sus respuestas servirían para diseñar el MEA.

Una de las posibilidades del empleo de los MEA en la organización contenidos matemáticos y planificación de clases, es que, al no estar los cuadros en secuencia, esto le permitiría al profesor ensayar diversas manera de abordar el tema en la clase. Por ejemplo, podría empezar con la fundamentación matemática, lo cual se correspondería con la enseñanza tradicional, y posteriormente ir cubriendo otros aspectos según el cuadro que seleccione. También se podría partir a través de la historia y evolución del tema, para posteriormente explorar gráfica y numéricamente, posteriormente introducir la fundamentación teórica y finalmente incorporar el uso de tecnologías. De modo tal que entonces es posible disponer de diversidad de configuraciones para la planificación de una o varias sesiones de clase.

A continuación, se describen cada de los cuadros que se reflejan la Figura 2 referido a la construcción de un MEA. El diseño y elaboración del MEA puede variar de un docente a otro, así se trate del mismo tema matemático. Además, la secuencia de los cuadros puede ser modificada a conveniencia. La numeración dada no debe ser entendida como trabajo secuencial y progresivo, además es posible suprimir y/o agregar cuadros si así lo considera pertinente el docente al momento de hacer su planificación. La organización no es jerárquica y no existe un orden único para desarrollar los cuadros en el proceso de enseñanza.

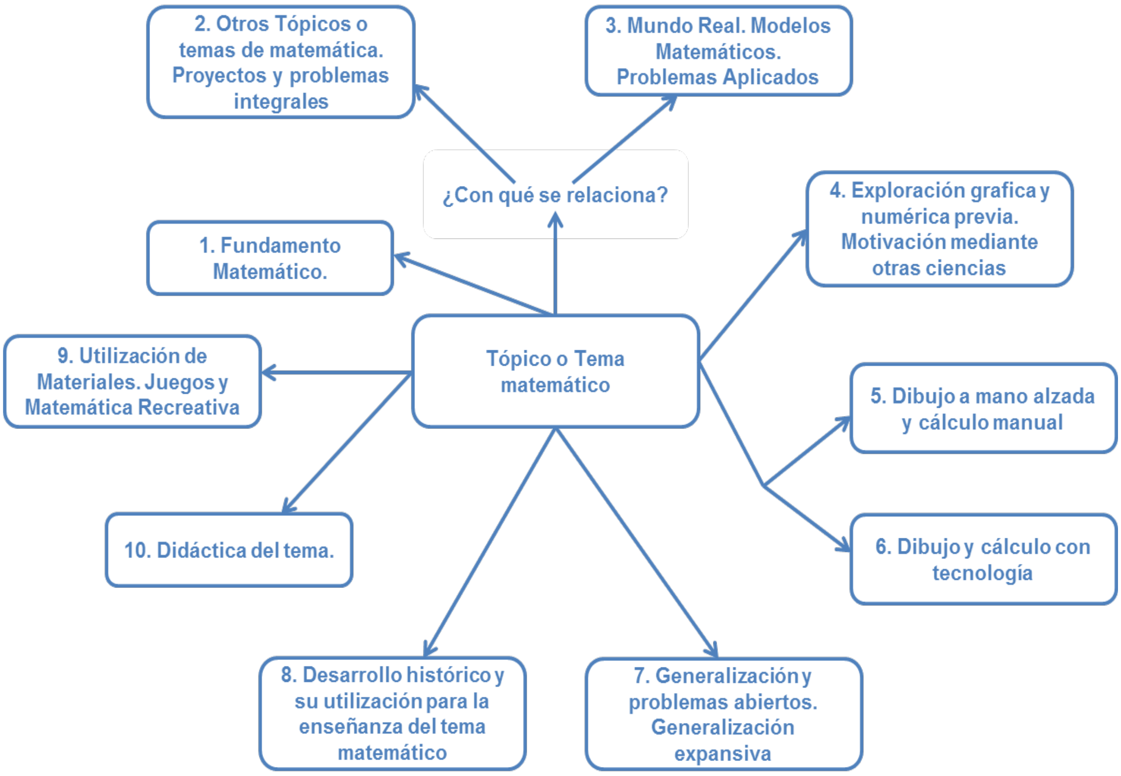


Figura 2. Modelo de Mapa de Enseñanza Aprendizaje (MEA). Tomado y Adaptado de ¿Qué enseñar de un tópico o un tema? Por M, Orellana, 2002, *Enseñanza de la Matemática* 11(2), 21-42.

Fundamento Matemático. Este cuadro es lo que generalmente se contempla en los programas de estudio. En el mismo se desglosan los conceptos, propiedades, axiomas y teoremas que forman parte del contenido Matemático a enseñar. Así mismo se pueden describir los diversos significados y definiciones asociadas, variedad de representaciones y se puede disponer de ejemplos y ejercicios ilustrativos.

Otros tópicos o temas de Matemática y el Mundo real. A pesar de que cada día se hace mayor énfasis en el estudio de una Matemática que permita resolver problemas concretos y explicar fenómenos reales dentro de contextos particulares, estos aspectos no siempre son llevados al aula de clases, por lo que el estudio de fenómenos y problemas reales debe ser germen de inspiración para que profesores de Matemática hagan énfasis en el intento por estrechar la conexión del mundo real con el conocimiento matemático.

Exploración Gráfica y Numérica previa. Motivación mediante otras Ciencias. Como una manera alternativa a presentar los contenidos matemáticos ya acabados, de manera formal y abstracta al estudiante, es posible proponer el estudio previo de algunos problemas y/o situaciones. Dicho estudio puede ser de carácter exploratorio y se puede llevar a cabo de forma gráfica o numérica (o una combinación de ambas) y deberá permitir la detección de patrones, identificación de conjeturas y la formulación de hipótesis. Además, un elemento clave que ha contribuido para ello tiene que ver con la posibilidad del empleo de la tecnología para explorar, experimentar y descubrir de un modo dinámico e interactivo. Por otra parte, es importante motivar a los estudiantes al estudio del tema matemático a abordar en el aula de clases, que lo explore, que lo experimente a través de actividades planteadas en su contexto o con áreas de conocimiento familiares o cercanas a los estudiantes.

Dibujo a mano alzada y cálculo manual; dibujo y cálculo con tecnología. El desarrollo de la destreza en el dibujo y en el cálculo manual, constituyen dos capacidades importantes que debe adquirir toda persona a la hora de aprender Matemática. Sin embargo, un factor que ha venido a modificar estas prácticas ha sido la introducción de las computadoras en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Así, han surgido programas y paquetes informáticos como los software de geometría dinámica (SGD) y los software de cálculo simbólico (SCS), por lo que no puede despreciarse de manera alguna las bondades y ventajas que pueden ofrecer estos en el acto educativo.

Generalización y problemas abiertos. La generalización y la abstracción son otro punto clave en la Matemática. Por supuesto que se trata de procesos cognitivos complejos que deben ser exhibidos por los estudiantes de esta disciplina, pero esto debe lograrse de forma progresiva, desde una posición activa del estudiante y no una contemplativa. En relación con la adquisición de destrezas para generalización de patrones matemáticos, autores como Ávila, Ruvalcaba y Luna (2010) insisten en la pertinencia de que los escolares lo lleven a cabo, pero que esto es pocas veces explorado y promovido por el docente. Así mismo Zazkis y Liljedahl (2002) sugieren que los patrones matemáticos son el alma y corazón de las matemáticas y que los profesores deberían considerar a la búsqueda de estas regularidades recursos esenciales para desdoblar el pensamiento matemático, el razonamiento inductivo y la abstracción; así como emplear los problemas abiertos como medios para estudiar el proceso de generación de teorías en distintas ramas de la matemática.

Desarrollo histórico y su utilización para la enseñanza del tópico. Actualmente mucho se ha investigado, propuesto y escrito en torno a la Historia de la Matemática y sus posibles usos, bondades y dificultades en el proceso de estudio de la Matemática. No sólo se trata de rellenar históricamente las clases con anécdotas, cuentos, biografías y notas históricas breves, sino que se implica plasmar el modo en que se originaron y evolucionaron los conceptos matemáticos. Si se toma como premisa lo anterior, el hecho de que la Matemática sea producto de la actividad humana a lo largo de muchos siglos, de complejos procesos de interacción social, de la búsqueda de respuestas y soluciones a problemas concretos enmarcados temporal, cultural, social y geográficamente; entonces estos elementos deben tomarse en consideración en la comprensión de esta ciencia. En relación al papel que desempeña la Historia de la Matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, Chaves y Salazar (2003) mencionan que (a) sirve de promotora de un cambio de actitud hacia la Matemática, (b) comprender y vencer obstáculos epistemológicos, (c) incentivar la reflexión y una actitud crítica, (d) servir como elemento integrador de la Matemática con otras disciplinas y, (e) fomentar el interés y la motivación de las personas hacia la Matemática.

Utilización de materiales. Juegos y Matemática Recreativa. Entre algunas ventajas que ofrece el uso de actividades lúdicas en contextos escolares, destacan (a) desarrollar en el estudiante una actitud positiva frente a los nuevos contenidos, (b) desarrollar destrezas en la toma de decisión y búsquedas de estrategias, y (c) promover el trabajo cooperativo y colaborativo entre pares. Groenwald y Martínez (2007) sostienen que actividades lúdicas, como juegos didácticos y curiosidades matemáticas, “constituyen un soporte metodológico importante para el logro de aprendizajes matemáticos debido a que, a través de ellas, los estudiantes pueden crear, investigar, divertirse y jugar con la Matemática” (p. 19). La utilización de materiales concretos (geoplanos, tangram, pentominos, regletas de Cuisenaire, bloques de Dienes, entre otros) brinda la posibilidad experimentar situaciones de aprendizaje de forma manipulativa, permitiendo conocer, percibir, descubrir, intuir y hasta construir las ideas y conceptos matemáticos. Segovia y Rico (2001) sostienen que se debe permitir a los estudiantes investigar actuando sobre los materiales, transformando el aula de matemáticas en taller o laboratorio donde los estudiantes tenga sus propias vivencias, explore y construya; siendo el papel del profesor el de servir de presentador, guía, promotor y organizador, pero nunca de protagonista.

Didáctica del tema en consideración. Es importante la incorporación de este tipo de cuadros en un MEA, tanto cuando son elaborados por futuros profesores de Matemática en proceso de formación, como con profesores en servicio. Pero ¿Qué aspectos reflejar en este apartado a la hora de crear el MEA? Pues esto dependerá del tema o tópico matemático a ser abordado y del conocimiento que tiene el docente. Este cuadro no solo involucra el contenido, sino que también hace referencia a aspectos relativos a la instrucción, cognición y desempeño. Aunque Orellana sugiere este cuadro como opcional, diferimos en dicha propuesta, y consideramos que es fundamental incluir este aspecto en todo MEA por involucrar aspectos claves y esenciales para la enseñanza de los cuadros tratados anteriormente.

Ahora bien, en Suárez (2014, 2016) se han identificado ciertas deficiencias y dificultades en el diseño de los MEA en el contexto de formación de profesores de

Matemática. Destaca el hecho del diseño de los MEA sin el conocimiento matemático necesario, utilizando expresiones genéricas del modelo del MEA de la figura 2 como comodines, por ejemplo escribir "Historia de la funciones" sin conocer algún hecho al respecto, escribir "uso de geoplano para la enseñanza de rectas" sin conocer cómo hacerlo, o plantear la "modelización y Geometría" sin realmente saber la relación entre el tema matemático y la situación real que se abordará por medio de la modelización.

Así mismo, de alguna manera el MEA una vez creado en papel se puede convertir en un instrumento rígido en el que puede ser difícil incluir o incorporar nuevos elementos a los cuadros, lo que podría atentar contra el dinamismo que vería caracterizar la enseñanza de la Matemática, y la búsqueda de nuevas estrategias didácticas, metodologías e incluso la misma ampliación del dominio del tema. Es en este punto donde surgen las TIC como un medio para darle vida y dinamismo a los MEA y ayudar a sortear las generalidades detectadas en su elaboración.

3. La Web 2.0 y sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

El surgimiento de la red de redes (Internet) ha establecido un nuevo entorno en el cual se desarrolla la educación, esto es debido a las variadas posibilidades de interacción que hoy en día ofrecen las TIC. La penetración de las tecnologías digitales en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática ha venido a modificar los roles de aquellos quienes tienen el compromiso de educar, y también ha trasformado la forma de aprender. Particularmente la Web 2.0 constituye un importante repositorio de recursos que pueden ser empleados en la enseñanza de la matemática y ha supuesto una notoria transformación en el manejo de Internet, dando un salto del individuo como consumidor de información, a la creación colectiva del conocimiento. Al respecto, Sánchez (2012) señala, que

> La Web 2.0 está transformando la manera en que los humanos se comunican e interactúan. La práctica de la instrucción matemática no estará exenta de dicha transformación. Está en las manos de las futuras generaciones el crear, imaginar, e implementar formas productivas de utilizar las tecnologías Web 2.0 en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Necesitamos profesores e investigadores creativos y entusiastas que lleven a la educación matemática a territorios de instrucción no explorados. Pienso que en los próximos años surgirán personas que nos muestren las posibilidades, limitaciones, y riesgos de los usos educativos de la Web 2.0 (p. 5)

O'Reilly (2005) señala que, al igual que muchos conceptos importantes, la Web 2.0 posee un núcleo gravitacional, más que una definición exacta y precisa. Cortés, (2011) señala, además, que

> La Web 2.0 se refiere a una nueva generación de Webs basadas en la creación de páginas Web donde los contenidos son compartidos y producidos por los propios usuarios del portal, herramientas y plataformas de fácil uso para la publicación de información en la red, la cual se pone a disposición de millones de personas. (p. 138)

Se sustenta en el movimiento y quehacer de un conjunto de sujetos que crean contenidos, los comparten, colaboran entre sí y se comunican por diversos medios;

de allí que sea reconocida también bajo el calificativo de Web Social. Plantea eliminar y romper con la visión del sujeto como un simple agente receptor de la información, y además se propone la construcción de saberes en colectivo, de forma colaborativa. Esto se facilita, entre otras razones, debido a la sencillez de la interface que ofrece muchos sitios web para el diseño de contenidos, así como de los espacios para publicarlos y compartirlos. En el caso particular de la Enseñanza de la Matemática, Suárez (2014) sostiene que la presentación de contenidos en formatos distintos a los textos, tales como infografías, líneas del tiempo, presentaciones animadas, libros digitales, audio y videos, representa una alternativa novedosa que motiva a los estudiantes a adentrarse, inmiscuirse y estudiar en profundidad un tópico matemática en particular.

Sánchez (2012) señalan tres características distintivas de la Web 2.0, (a) su carácter *interactivo*, referido a la facilidad con la que el usuario puede participar con otros en la creación de contenidos y al mismo tiempo compartirlos y hasta complementarlos, sin que esto requiera mayor preparación en el manejo de la informática; (b) la *interconexión*, relacionada con la posibilidad de crear redes permanentes de usuarios y/o contenidos, que pueden ser constantemente actualizados; y (c) la posibilidad de *crear y mezclar contenido,* ya que es posible transformar la información, modificarla y combinarla en diversos formatos como audio, video e imagen, entre otros.

Las herramientas Web 2.0 pueden integrarse en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática de diversos modos y con variados propósitos, que van desde servir como mediadora en la comunicación entre estudiantes y profesores, pasando por el desarrollo de destrezas en el manejo de la información, el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas matemáticos en ambientes colaborativos, el fortalecimiento de lo aprendido en el salón de clases y la construcción personal y colectiva del conocimiento matemático, así como la difusión del mismo.

3.1 Clasificación de las Herramientas Web 2.0

En este apartado se pretende organizar de manera sistemática los recursos existentes en la red, consciente de que se trata tan solo de una aproximación parcial de este inmenso mar de posibilidades. Cobo (2007) indica que “organizar el universo digital es una tarea sin fin, y por tanto un harakiri académico, cuya misión nuca se alcanzará plenamente” (p. 62) y bajo esta premisa ofrece un compendio de recursos, herramientas y aplicaciones de la Web 2.0, gratuitas y consideras útiles y fáciles de utilizar, y que al mismo tiempo hacen énfasis en el uso social de estas, por ser considerado como uno de los aspectos más relevantes de la Web 2.0. El autor propone organizar y clasificar sus recursos, desde cuatro pilares o líneas fundamentales, en primer lugar la *Social Networking (redes sociales)*, en segundo lugar los *Contenidos*, tercero la *Organización social e inteligente de la Información* y, en cuarto lugar las *Aplicaciones y servicios*, los cuales serán descritos brevemente a continuación.

Social networking- redes sociales. Se presentan en esta clasificación aquellas herramientas empleadas para el diseño de espacios que faciliten la creación de comunidades virtuales para el intercambio social de contenido, conocimiento e información. Estos recursos que en su mayoría son gratuitos y de fácil manejo, brindan un espacio virtual que permite el escribir y compartir contenidos con otras personas de intereses afines. Destacan las redes sociales *Facebook*, *SecondLife, Twiter, Instagram, Flickr,* y se podrían incluir también, los espacios para la creación de foros en línea. Las relaciones sociales virtuales en muchas ocasiones pueden llegar a ser altamente enriquecedoras, debido que facilitan la disposición de información sobre determinados asuntos de interés, a la cual sería casi imposible de acceder de otro modo.

Las redes sociales proporcionan, entre otras cosas, un ambiente creativo con diversas herramientas, contenidos y recursos, que pueden hacer que los estudiantes logren obtener conocimientos de manera activa; así mismo facilitan el contacto entre estudiantes y docentes, permitiéndoles efectuar actividades conjuntas como tutorías, aclarar dudas, diálogos para compartir ideas; todo esto sin la dificultad que puede significar en muchos casos la presencialidad. Así mismo, De Haro (2010) plantea que entre los usos educativos que se les pueden dar a las redes sociales se encuentran (a) la organización de cursos, cátedras y/o asignaturas; (b) la creación de redes sociales internas en centros educativos, o variedades de campus virtuales; y la (c) tutorización de trabajos, cuando se trata de pequeños grupos que requieren del apoyo de un profesor en la elaboración de proyectos o trabajos.

Contenidos. En esta categoría se encuentran todos aquellos recursos que permiten y facilitan la lectura y escritura de información en línea, así como su distribución e intercambio. Se toma como premisa la idea de *contenidos generados por el usuario*, la cual se refiere a toda aquella información producida por cualquier persona en espacios virtuales utilizando internet, para lo cual ya no se requiere de conocimientos tecnológicos profundos. De este modo la creación y el consumo de contenidos se transforman en un proceso unipersonal, pero al mismo tiempo colectivo. Cobo (2007) propone a su vez, una subdivisión de esta categoría, la cual es ampliada por Suárez (2014), donde es posible conseguir una descripción detallada acerca de estas subcategorías, las cuales abarcan *(a) Software de Weblogs y el Blogging, (b) Wikis, (c) Procesadores de textos, Hojas de cálculo, y presentaciones en línea, (d) Fotografía, imágenes, video, sonidos, (e) Herramientas de calendarios, (f) Elaboración y Presentación de diapositivas y publicaciones digitales, (g) Sitios web, (h) Evaluaciones en línea, y (i) Simulaciones y aplicaciones interactivas.*

Organización social e inteligente de la información. Debido al incremento de tráfico de información en la red y el crecimiento en el volumen de datos se hace necesario disponer de recursos que ayuden a optimizar la organización y búsqueda de información. Aquí se pueden encontrar herramientas digitales asociadas a las tareas de organización, ordenamiento y almacenamiento de la información a través de la creación de etiquetas, curación de contenidos, sindicación e indexación. Se hace una clasificación de estos recursos, en función de sus utilidades y potencialidades, y abarca (*a) buscadores, (b) Marcadores Sociales, y (c) Aplicaciones y Servicios* como correos electrónicos, y (d) la *curación de contenidos*.

4. Integración del MEA y la WEB 2.0 al conocimiento didáctico del contenido matemático.

En este apartado se vinculan los tres elementos descritos anteriormente; el conocimiento didáctico para la enseñanza, el MEA y la Web 2.0. En primer lugar, es posible establecer una conexión entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el MEA. Para ello, se puede observar la Figura 3, como cada uno de las dominios y subdominios del modelo pueden ser asociados con los diversos cuadros del MEA.

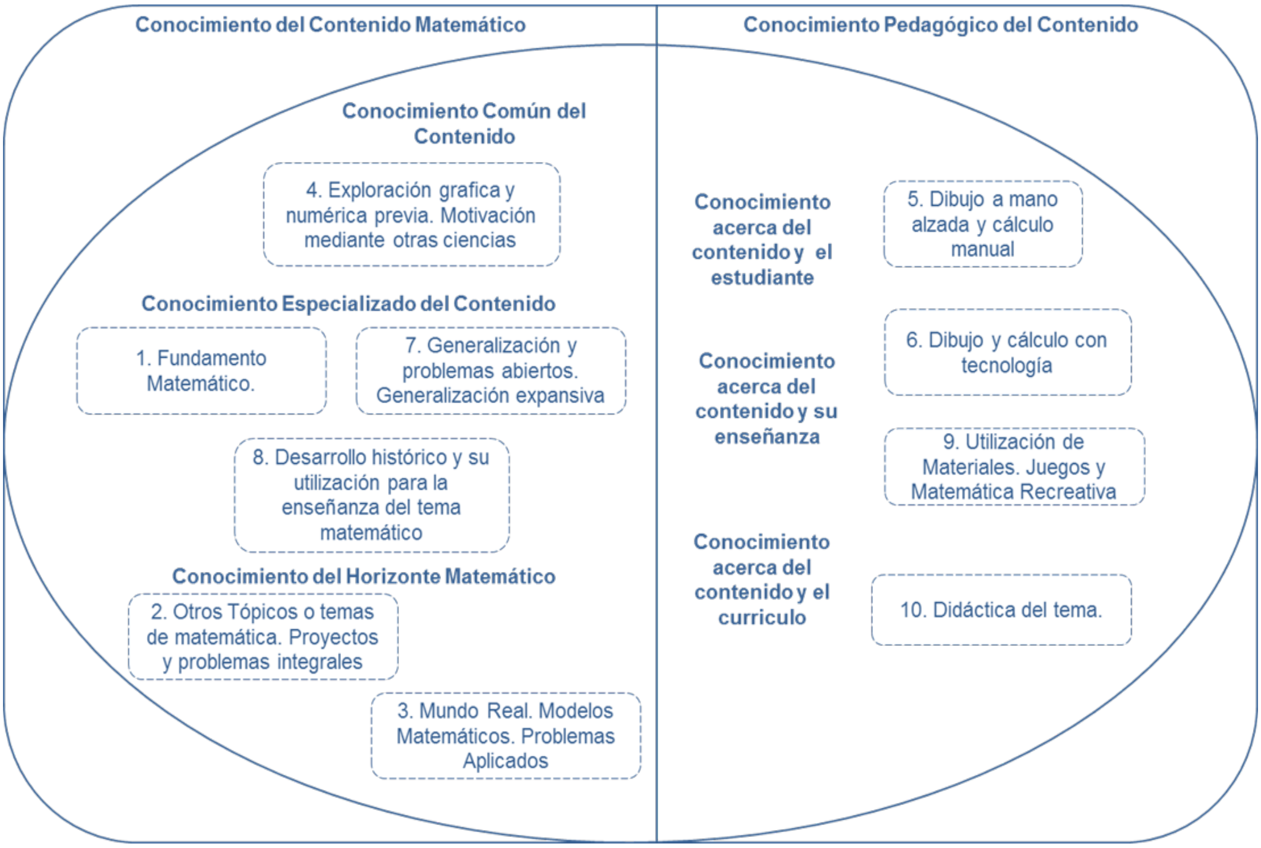


Figura 3. Interrelación entre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza y el Mapa de Enseñanza y Aprendizaje. Elaboración propia.

Vemos como el *conocimiento común del contenido* puede ser vinculado al cuadro de *exploración gráfica y numérica, así como con la motivación a través de otras ciencias*. En efecto, el desarrollo de habilidades con las operaciones aritméticas básicas, de conteo y agrupación o clasificación conforman los saberes comunes que puede poseer cualquier estudiante independientemente del tema a estudiar. Aprovechar esas nociones básicas y elementales para motivar el contenido relacionándolo con el entorno o con otros saberes, y el indagar a través de la exploración deben ser hábilmente abordados por el docente.

En relación al *conocimiento especializado del contenido matemático*, y considerando que, entre otros asuntos, es el que involucra explicaciones y/o justificaciones matemáticas concretas, entonces puede ser asociado al cuadro del MEA que aborda la *fundamentación matemática* del tópico a enseñar, ya que en este se destacan los conceptos, argumentaciones, ejemplos y contraejemplos. Por la naturaleza misma de este tipo de conocimiento, están inmersos elementos del cuadro que abordan la *generalización y la discusión de problemas aún no resueltos*, así como la búsqueda de relaciones isomorfas entre objetos matemáticos, o de ideas que puedan ser extendidas a otros dominios de esta disciplina *(generalización expansiva*). Por otra parte, para entender a profundidad un concepto matemático, se considera pertinente estudiar las ideas que subyacen a su origen y evolución, el cual no es un saber habitual en las personas, por lo que se le puede incluir dentro del conocimiento especializado el cuadro correspondiente con el *desarrollo histórico del tema*.

Con respecto al *conocimiento del horizonte matemático*, el cual guarda relación con los ámbitos intra y extramatemáticos conectados el tema en estudio, se considera que encajan dentro de esta descripción los cuadros del MEA asociados al *mundo real y la modelización matemática*, así como la *vinculación con proyectos y la relación del tópico con otras entidades matemáticas (proyectos integrales)*. Dentro de este tipo de conocimiento, se hace necesaria una visión holística de la Matemática, y de cómo se articula con otras nociones y/o con la realidad, los cual puede ser alcanzado gracias a la incorporación de estos dos cuadros.

Por otra parte, el MEA plantea qué es lo que se deba enseñar de un tópico o tema matemático, pero también toca aspectos en el cómo hacerlo, es decir, en los aspectos pedagógicos y didácticos, que podrían estar asociados al conocimiento pedagógico propuesto Hill et. al. (2008). Como el acto educativo contempla al estudiante (aprendizaje), el docente (enseñanza) y entorno (currículo escolar), los cuadros propuestos por Orellana (2002) en este punto no forman una relación uno a uno con los subdominios del conocimiento pedagógico, tal y como si se hizo con los subdominios del conocimiento del contenido matemático. En cuanto al conocimiento pedagógico, podemos incorporar el cuadro referido a la *didáctica del asunto en estudio*, así como el referido al *uso de los juegos, materiales, y recursos;* y el cuadro de *dibujo y cálculo a mano alzada y con tecnología*.

Efectivamente, al hablar el MEA de la didáctica del tema, en este asunto se podrían abordar aspectos como la comprensión, errores, y dificultades del tópico matemático por parte de los estudiantes. Además, se contempla dentro de la didáctica, lo referido a la búsqueda de estrategias de enseñanza, a la planificación de actividades pedagógicas, el diseño de recursos, a la evaluación y al modo en el cual se maneja el contenido desde el punto de vista curricular como tiempo de estudio, formas y normas de evaluación, y profundidad del tema, entre otros. También se considera dentro de este tipo de conocimiento, lo referido al dibujo y cálculo con tecnología, ya que se trata de habilidades que deben tener una intencionalidad didáctica previamente concebida por el docente, un fin y un propósito preestablecido, considerando su potencial didáctico y alcance cuando se abordan ciertos conceptos matemáticos.

Ahora bien, otro elemento importante es el que pretende lograr con estas reflexiones plantadas en este documento, es el poder vincular la Web 2.0 con el mapa de Enseñanza-Aprendizaje, y por transitividad con el conocimiento didáctico del contenido matemático. Se pretende entrelazar el diseño de los MEA, utilizado como mecanismo para la organización del contenido matemático, con algunas herramientas propias de la Web 2.0. La integración de estos permitiría a los docentes y estudiantes contribuir a la construcción del conocimiento matemático, mejorar los canales de comunicación, facilitar el intercambiar ideas, y compartir el conocimiento desde una concepción más constructivista. Tomando como referencia lo postulado en dicho trabajo, se presenta a continuación la Figura 4 en el cual se vinculan los cuadros del MEA con diversas herramientas Web 2.0.

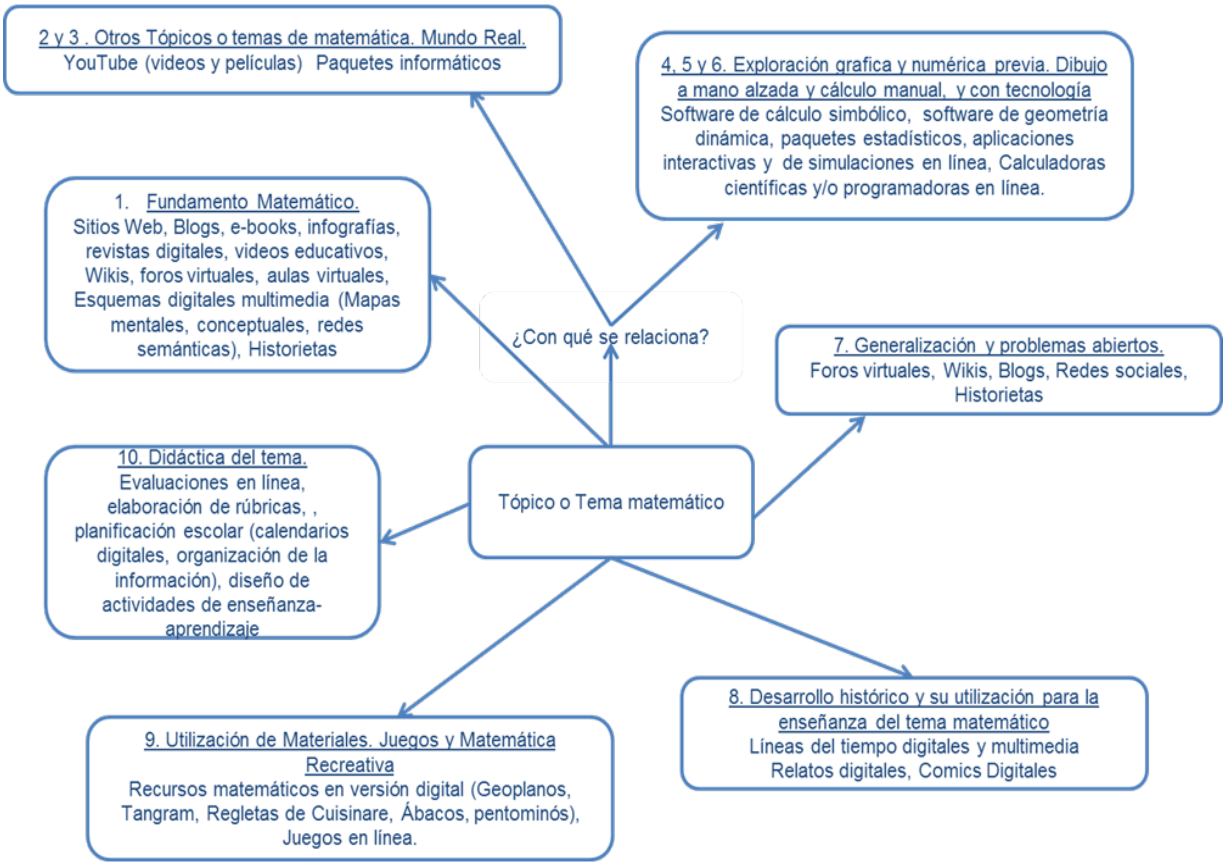


Figura 4. Herramientas Web 2.0 y su conexión con el MEA. Elaboración propia.

El *Fundamento Matemático,* sea quizás uno de los que más cuenta con una amplia gama de herramientas y recursos de la Web 2.0, para su abordaje. Los conceptos matemáticos, definiciones, propiedades y relaciones forman parte de los aspectos abordados en este apartado. Algunas de las herramientas Web 2.0 que pueden servir de apoyo para este cuadro son las plataformas para la elaboración y/o difusión de presentaciones en línea, la creación de e-books y revistas digitales. Ofrecen como importantes ventajas la incorporación de recursos multimedia como videos y audios, así como su dinamismo y creatividad a la hora de diseñarlas.

El empleo de estos recursos virtuales para el diseño de los contenidos matemáticos abordados en este cuadro no está restringido solamente al docente, ya que también es posible que los estudiantes los creen, compartan, discutan y mejoren. También es posible la incorporación de mapas mentales, mapas conceptuales y otros esquemas de representación de la información y la organización de ideas gracias al uso de recursos Web 2.0 especialmente creados para el diseño de estos elementos de carácter teórico.

El uso de infografías representa una potente herramienta para la construcción y la elaboración de los conceptos y estudio de objetos matemáticos. El aprovechamiento de la visualización como mecanismo para captar la atención y la exposición creativa, llamativa y atractiva de los conceptos ofrece un posible modo para cautivar al estudiante en el estudio del tópico matemático a abordar, haciéndolo más ameno. La utilización de videos educativos también constituye un recurso Web muy valioso en la presentación de algunos conceptuales y procedimentales asociados a un contenido matemático. Por ejemplo, los videos pueden ser empleados para explicar cómo resolver un ejercicio. Las ventajas del uso de este recurso multimedia es que es posible reproducirlo cuantas veces sea necesario, su posibilidad para compartirlo, tenerlo a disposición siempre que se desee (al descargarlo o tener el link de acceso), y la posibilidad de comentarlo y generar alguna discusión en torno al mismo.

Todos los elementos antes descritos pueden ser utilizados para el desarrollo de aspectos conceptuales y teóricos asociados a un tema matemático, y su ubicación en la red se puede hacer a través de la creación de un espacio virtual como un blog, una página web, o inclusive un grupo en una red social, o en una plataforma educativa. Además, las ventajas que ofrecen es que en su gran mayoría son gratuitas, u ofrecen alternativas gratuitas que pueden ser utilizadas sin inconveniente alguno. Son sencillas de crear y utilizar, no requieren de formación en informática o programación y muchas pueden ser empleadas de forma colaborativa en línea.

El empleo de las Wiki también se perfila como un espacio para la discusión y generación del conocimiento, basado en el colaboracionismo. Al respecto, Gómez (2014) señala que su uso contribuye al “interés de los estudiantes en la búsqueda, validación y difusión de información y conocimiento. Sin embargo, lo más significativo de su uso, es la posibilidad de fortalecer el trabajo colaborativo, mediante la construcción social de fuentes de información y conocimientos”. (p. 31). El uso de esta herramienta en la enseñanza de la Matemática ofrece una perspectiva desde la cual el estudiante es capaz de contribuir, aportar, criticar, ampliar y profundizas aspectos teóricos relevantes en un concepto matemático.

Para *Otros tópicos o temas y el Mundo Real* se pueden emplear videos ubicados en redes como Youtube. La modelización conforma el otro elemento relevante dentro de este cuadro. El uso de paquetes informáticos y estadísticos como hojas de cálculo podrían facilitar el estudio y/o la construcción de modelos matemáticos, al igual que otros softwares. Así mismo, es posible disponer de información y datos reales obtenidos de sitios web para el estudio de fenómenos matemáticos concretos.

En relación a los cuadros de *Exploración gráfica y numérica, Dibujo a mano alzada, Calculo manual, Dibujo y cálculo con tecnología,* el uso de la Web 2.0 ofrece espacios para que los estudiantes puedan desarrollar nuevas experiencias en el aprendizaje de la Matemática, a las cuales posiblemente pueda ser más difíciles de acceder a través del uso tradicional del lápiz y el cuaderno, la tiza y la pizarra o el libro de texto escolar. Con el uso de estas herramientas tecnológicas es posible la manipulación directa de objetos matemáticos mediante la utilización de software de geometría dinámica como el Geogebra, o los softwares de cálculo simbólico.

También es posible recurrir a diversas aplicaciones en línea basadas en la simulación y en el manejo de objetos matemáticos. Hoy en día existe un importante inventario de estos recursos diseminados en el internet, y en muchos casos es posible incluso diseñar y crearlos. El diseño de estrategias de enseñanza y aprendizaje, basadas en actividades interactivas por medio de las cuales el estudiante adquiere un papel protagónico y activo en la construcción del conocimiento matemático, se erige como una importante visión acerca del papel de la Web 2.0 en el estudio de los conceptos matemáticos. Las aplicaciones en línea, basadas en esta concepción de la Web, permiten que la exploración, la experimentación, la conjetura y el ensayo, procesos estos vinculados con la construcción del conocimiento matemático, y de este modo se pueden ver facilitados procesos cognitivos como la inferencia, la argumentación y la inducción, los cuales forman parte sustancial del razonamiento matemático.

Respecto a la *Generalización y problemas abiertos*, pueden ser aprovechados los foros virtuales. A través de ellos es posible la interacción asincrónica entre los estudiantes y el docente, el desarrollo del pensamiento crítico, la reflexión y la argumentación en torno a las ideas que rodean un tema o tópico matemático en especial, por lo que son excelentes espacios para promover la resolución de problemas matemáticos. Adicionalmente, se desarrolla la escritura en los estudiantes mediante explicaciones y relatos de sus ideas, opiniones y comentarios respecto a determinados asuntos de interés que giran en relación a un objeto matemático específico. El uso de los foros virtuales también podría coadyuvar a la participación de aquellos estudiantes que por alguna razón tengan miedo escénico, o que no pudieron asistir a la clase, o que no estaban suficientemente preparados para participar activamente al momento de la clase.

En lo referido a la *Historia de la Matemática*, se puede encontrar apoyo en el uso de herramientas de la Web 2.0 a través de la creación de líneas virtuales del tiempo, consideradas como representaciones gráficas de una serie de sucesos, organizados cronológicamente. Actualmente, es posible diseñar líneas de tiempo en formato digital, permitiéndose de esta manera, la incorporación de imágenes, recursos multimedia, enlaces, textos, videos y audios, entre otros. El uso de las líneas del tiempo puede variar según la intencionalidad didáctica que tenga el docente. Así, por ejemplo, puede elaborar una línea del tiempo con los principales acontecimientos relacionados con el surgimiento de un concepto o teoría matemática. Puede utilizarse para referirse a la biografía de un personaje relevante en el estudio de algún tópico matemático. Inclusive puede emplearse como calendario de actividades escolares a llevarse a cabo a lo largo de un período de tiempo.

Adicionalmente, el diseño y uso de los comics, historietas o caricaturas, en formato digital, el cual se basa en la combinación de texto y el uso de imágenes secuenciales, puede ser empleado para explicar la historia de la Matemática. A su vez, la elaboración de estas caricaturas podría influir en el desarrollo de capacidades escriturales, de lectura, y de síntesis, ya que deben abreviar y condensar aspectos más relevantes y resaltantes del tema, así como utilizar el poder de la imagen como un factor atrayente y motivacional. El empleo de las herramientas Web 2.0 en el diseño de historietas procura en aquel que las plantea, la posibilidad de potenciar su creatividad como diseñador, las habilidades para indagar e investigar, organizar ideas de modo sucesivo y continuo por medio de narraciones secuenciales que pueden obtenerse a través de textos escritos, el empleo de imágenes y audios. Se requiere acciones como la de escribir un guiñó, lo que implica procesamiento de la información, análisis de la misma, detección de ideas principales a reflejar en el comic y la creatividad para el diseño de los espacios, las imágenes y el orden y ubicación.

En relación con la *Utilización materiales, de juegos, matemática recreativa*, ya el uso de las herramientas Web 2.0 dentro de este tipo de contenidos se puede ver representado a través de aplicaciones en línea especialmente diseñadas para como juegos didácticos para la enseñanza de temas matemáticos. Villarreal (2012) señala que, en contextos educativos, el uso de recursos manipulativos concretos se devela como una invitación habitual para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Pero, además, hoy en día, es posible conseguir en Internet versiones digitales de estos juegos y recursos o materiales matemáticos concretos, como por ejemplo versiones del Tangram chino y rompecabezas o puzles similares, geoplanos, dados y fichas.

También es posible hallar juegos en línea que promueve el desarrollo del pensamiento lógico, y que incluso pueden jugarse a modo tanto individual como grupal, lo que contribuye a la cooperación y colaboración entre pares para la búsqueda del saber. El uso, tanto de juegos en línea, como de versiones digitales de recursos didácticos concretos, dependerá de lo que el docente haya planificado. Por ejemplo, pueden ser utilizados para introducir y promover el estudio de un nuevo tema, o para afianzar lo aprendido. También pueden ser empleados para promover la interacción y socialización de los estudiantes, y para la exploración y experimentación. La proliferación de sitios web con diversidad de actividades propias de la matemática recreativa, se perfilan como aliados a la labor docente. Generalmente estos pueden ser insertados en Blog, página web, plataforma educativa o espacio virtual dedicado al estudio del tema y que ha sido creado por el docente.

El empleo de las versiones digitales ofrece entre otras ventajas con relación a los materiales concretos, el hecho de que no hay desgaste de los recursos elaborados, se reducen los costos por elaboración de estos, no ocupan espacio. La disponibilidad del juego y los recursos no se limita al espacio áulico. Como desventajas o inconvenientes, hay que mencionar la necesidad del acceso a internet y la disposición de un equipo de computación con determinadas especificaciones técnicas, y que no cuenta con la opción de asesoría expedita del profesor dada la posibilidad de desarrollar estas actividades de forma asíncrona.

Finalmente, y respecto a la *Didáctica del tema*, el manejo de herramientas de la Web 2.0 ofrecen ventajas atractivas que podrían contribuir a que le docente de Matemática mejores sus funciones como planificador y evaluador de los aprendizajes. El uso de aplicaciones como calendarios en línea como Google Calendar y organizadores son recursos potentes que pueden ser utilizados por el docente para gestionar diversos aspectos relacionados con la planificación de las clases.

En relación con la evaluación de los aprendizajes, existen en internet plataformas susceptibles de ser utilizadas para el diseño de evaluaciones en línea. A través de ellas se pueden elaborar y diseñar distintas actividades de evaluación, corregir de manera automática, dar retroalimentación instantánea, contar con bancos de ítems, etc. Plataformas como Moodle ofrecen también importantes elementos que pueden ser utilizados como mecanismos de valoración del aprendizaje. Otro recurso importante dentro de la función del docente como evaluador, es el diseño de rúbricas de evaluación a través de plataformas que permiten crear instrumentos de valoración del aprendizaje, definir los parámetros a evaluar, así como los indicadores que se pueden almacenar, organizar, compartir, modificar con facilidad y adaptar según las necesidades.

5. Reflexiones finales.

El uso del Mapa de Enseñanza Aprendizaje como herramienta para la organización del contenido matemático representa una opción alternativa a la planificación escolar tradicional que se desarrolla actualmente en los diversos niveles educativos del sistema escolar, y viene a ampliar otros aspectos del contenido matemático que tradicionalmente han sido, o progresivamente eliminados, o sustituidos, o que no han sido considerados en la planificación escolar, como los aspectos históricos, los juegos, la exploración y la conjetura, las aplicaciones; ya que el énfasis se hace en los aspectos matemáticos formales.

En relación con la Web 2.0, la misma ofrece un papel protagónico a quienes se desenvuelven en ella, dándoles roles de autores o coautores de la información, ofreciéndoles la posibilidad de seleccionarla, filtrarla y compartirla. Por ello, el uso de esta filosofía alrededor de la Web social parece ofrecer interesantes ventajas en el contexto de la educación, y en particular en la enseñanza de la matemática, donde cada vez más se aboga por una posición más proactiva, crítica y constructiva de parte de los discentes. Es necesario promover nuevos roles tanto para los docentes como para los estudiantes. Los primeros han de promover un trabajo más autónomo de los estudiantes, dejando de lado la dependencia del profesor para que imparta los contenidos, otorgándole una actitud pasiva al estudiante; cuando se debe fomentar la colaboración y la construcción colectiva del conocimiento, optando para ello por las bondades que ofrecen las diversas herramientas de la Web 2.0. Para lograr esto, se requiere entonces, contar con una visión diferente del profesor que todo lo sabe y no admite reflexión y crítica, debate y nuevas visiones y/o enfoques a la hora de enseñar la Matemática; y que al posea una adecuada formación en torno al uso de la TIC dentro de su ámbito de trabajo, ofreciendo propuestas y abordajes metodológicos innovadores, novedosos y creativos.

De la vinculación entre el Mapa de Enseñanza-Aprendizaje y las herramientas Web 2.0, es posible derivar que el proceso de organización de contenidos matemáticos a través de estos dos referentes hace viable una planificación más localizada y específica por parte del profesor, lo cual podría inferirse iría a favor de los estudiantes y su proceso de aprendizaje. Asumiendo que la adquisición del conocimiento matemático no es lineal, sino que está conformado por diversos elementos interconectados entre sí, tal y como ha sido expuesto a lo largo del estudio del MEA, el uso de diversos recursos tecnológicos de la Web 2.0 ofrece la posibilidad de interactuar con esta diversidad de elementos que componen el contenido matemático y de contribuir de este modo a la adquisición del conocimiento didáctico del contenido por parte de los docentes.

Bibliografía

Ávila, M., Ruvalcaba, C. y Luna, J. (2010). La generalización de patrones cuadráticos: Un estudio con alumnos de licenciatura en Matemáticas. CULCyT Cultura Científica y Tecnológica [en línea], 7(40-41), 34-40. Recuperado el 29 de enero de 2016, de http://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/275

Ball, D. (2000). Bridging practices. Intertwining content a pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education [en línea], 51(3), 241-247. Recuperado el 13 de marzo de 2016, de https://www.merga.net.au/documents/Keynote_Ball_2000.pdf

Borba, M., y Villarreal, M. (2005). Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking. New York: Springer.

Chaves, E., Salazar, J. (2003). La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. UNICIENCIA [en línea], 20(2), 1-20. Recuperado el 02 de febrero de 2016, de: http://www.academia.edu/1332493/la_historia_de_la_matematica_como_recurso_metodologico_en_los_procesos_de_ensenanza_aprendizaje_una_experiencia_a_

Cobo,C. (2007). Mapa de Aplicaciones. Una taxonomía comentada. En Cobo, C. y Pardo, H. (Comp.). Planeta Web 2.0. Inteligencia colectiva o medios fast food [en línea]. Grup de Recerca d'interaccions digitals, Univers Vic/Flasco, Barcelona-México. Recuperado el 22 de febrero de 2016, de http://personales.unican.es/rodriguezhc/Mapa%20de%20aplicaciones.pdf

Cortés, H. (2011). Las herramientas web 2.0 en la enseñanza de la Matemática fundamental. *DIALÉCTICA* [en línea], 27. Recuperado el 08 de febrero de 2016 de http://unipanamericana.edu.co/resources/documents/9a43ee7017372d93ffbd09fe2ccf9c10.pdf

De Haro, J. J. (2010). Redes sociales en educación [en línea]. Ponencia presentada en la jornada Educar para la comunicación y la cooperación social, Universidad de Navarra. Recupero el 10 de marzo de 2016, de http://jjdeharo.blogspot.com/2010/05/redes-sociales-en-educacion.html

Gómez, N. (2014). Manual para el uso de la Wiki, dirigido a estudiantes de informática de la UPEL Maracay, como herramienta que propicia el aprendizaje colaborativo. Trabajo Especial de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro.

Gómez, P. (2005). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria [en línea]. Comunicación presentada en el Seminario de Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga. Recuperado el 17 de noviembre de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797.PDF

Groenwald C. y Martínez Padrón, O. (2007). Juegos y curiosidades en el currículo de Matemática. Entretemas [en línea], 4(7), 17-32. Recuperado el 02 de febrero de 2016, de http://www.etnomatematica.org/publica/articulos/01-Jueg-Curio-Clau-Osw-2007-Entretemas1.pdf

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education [en línea], 39, 372-400. Recuperado el 14 de Octubre de 2016, de https://pdfs.semanticscholar.org/9a72/f2765a4e0880a413f32e0a7ddc7e53046b60.pdf

León, N. (2013). Qué enseñar sobre un tema de matemática y cómo enseñarlo: elementos clave en la formación docente [en línea]. Conferencia presentada en I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. Recuperado el 22 de abril de 2016, de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/Conferencia_paralela,_Leon.pdf

Orellana, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? Enseñanza de la Matemática 11(2), 21- 42.

O'reilly, T. (2005). What Is Web 2.0. Design Patterns and Business Models for the Next Generation of Software [en línea]. Recuperado el 10 de febrero de 2016, de https://ideas.repec.org/p/pra/mprapa/4578.html

Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿Una cuestión ignorada? Educación Matemática [en línea], 20(3). 83-100. Recuperado el 20 de abril de 2016, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512064005

Rico, L., Lupiáñez, J.L., Marín, A. y Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación [en línea]. Comunicación presentada en VIII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM. Aravaca, España. Recuperado el 20 de abril de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/466/1/RicoL07-2848.PDF

Sánchez, M. (2012). Web 2.0 y Educación Matemática: posibilidades y desafíos. Revista Iberoamericana de Educación [en línea], 59(3). Recuperado el 08 de febrero de 2016, de http://www.rieoei.org/expe/4774Sanchez.pdf

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En Castro E., (Ed.), Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid: Síntesis, S.A., pp. 83-149.

Suárez, Y. (2016). Plan de formación para futuros docente de matemática en el manejo de herramientas Web 2.0. Trabajo Especial de Grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Suárez, Y. (2014). El mapa de enseñanza-aprendizaje y la web 2.0: organizadores del contenido matemático. Trabajo de Ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara", Maracay.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y Educación Matemática: Necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Virtualidad, Educación y Ciencia [en línea], 3(5).73-

94. Recuperado el 08 de febrero de 2016, de http://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3014

Zazkis R., Liljedahl P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. Educational Studies in Mathematics [en línea], 49(3), 379-402. Recuperado el 29 de enero de 2016, de http://www.sfu.ca/~zazkis/publications/PatternsESM.pdf

Autor:

Suárez Huz, Yerikson**: Magister en Enseñanza de la Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL-Maracay), Venezuela. Profesor Dpto. Matemática UPEL-Maracay. Experto en Educación Virtual. Coordinador de línea de investigación en TIC, Innovación y Educación Matemática. E-mail:** yhuz553@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 224-235

Los ejercicios de Autoevaluación en el Aula Virtual como Método de Ayuda al Aprendizaje del Alumno Universitario

Maria Carmen Lozano Gutiérrez, Maria Camino Ramón-Llorens

Fecha de recepción: 01/03/2017
Fecha de aceptación: 29/09/2017

Resumen	En el presente artículo se muestran las posibilidades que ofrece una herramienta como el Aula Virtual (Plataforma Moodle) en el aprendizaje de una materia de matemáticas aplicadas a las finanzas. Los resultados obtenidos por el alumno quedarán reflejados en un indicador de rendimiento periódico de éste en el aprendizaje de la asignatura y servirá asimismo como input de gran utilidad para el profesor, que podrá conocer el progreso de sus alumnos en la asimilación de los conocimientos requeridos en la materia y rectificar y personalizar la curva de aprendizaje, reforzando los puntos débiles según las dificultades detectadas en el alumno. **Palabras clave**: Matemática Financiera; Aula Virtual; Moodle; Métodos aprendizaje.
Abstract	This paper shows the possibilities offered by the Virtual Classroom tool(Moodle Platform) in the learning process of Financial Mathematics. The results obtained by the students will be reflected in aperformance indicatorwhich serves as a very useful input for the teacher, who can determine the individual learning progress of each student, improving the learning curve with the aim of reinforcing teaching in the students' weak-points. **Keywords**: Financial Mathematic; Virtual Clasroom; Moodle; Learning methods.
Resumo	Nesse artigo são indicadas as possibilidades que oferece uma ferramenta como a Sala de aula Virtual (Plataforma Moodle), na aprendizagem de um assunto de matemática aplicada às finanças. São apresentados os resultados obtidos pelo estudante em um indicador de rendimento periódico de sua aprendizagem sobre o assunto. Trata-se de contribuição importante ao professor, que poderá aconpanhar o progresso dos (as) estudantes na assimilação dos conhecimentos requeridos sobre o assunto, retificar e personalizar a curva de aprendizagem, reforçando os pontos fracos de acordo com as dificuldades detectadas. **Palavras-chave**:Matemática Financeira; Aula Virtual; Moodle; Métodos de aprendizagem

1. Introducción

Desde hace unos años, la incorporación de las TIC en las aulas universitarias ha tomado especial relevancia con el principal objetivo de acercarse al nuevo paradigma educativo planteado por el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), inspirado en las demandas de la sociedad del conocimiento (Sánchez Santamaría et al., 2012). En este sentido, Internet constituye una herramienta fundamental tanto para la consulta de información como para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante tutoriales, juegos, retos, etc. (Duart, 2006). Las posibilidades de interacción entre el profesor y el alumno se multiplican cuando se proyecta a un contexto online o no presencial, lo que requiere un paso evolutivo y de renovación en la figura del docente, de forma que sea capaz de utilizar herramientas nuevas y técnicas actualizadas y, si fuera posible incluso, fomente en sus alumnos competencias tales como la curiosidad, la creatividad y la iniciativa a lo largo de su proceso de aprendizaje (Cebrián, 2003).

Este profesor renovado debe ser capaz de integrar en sus materias aplicaciones web con capacidad colaborativa, comunicativa y conversacional y, a ser posible, personalizar sus enseñanzas a las necesidades específicas de cada alumno en particular. Los llamados Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA), definidos como un instrumento de mediación educativa, constituyen un recurso que permite obtener un mayor control sobre la circulación de contenidos entre los diferentes agentes que intervienen interactuando en el proceso de aprendizaje (Lara et al., 2003; Suárez, 2003), que deben haber sido elaborados para un uso intuitivo y sencillo, donde el estudiante sea capaz de encontrar la información que necesita en cada caso de forma rápida y lógica (Hassan et al., 2004).

Moodle es un paquete de software de código abierto asentado en las ideas de la pedagogía constructivista social[1] (Martínez y Fernández, 2011; Sánchez Santamaría et al., 2012), y utilizado para el desarrollo de cursos y sitios web basados en Internet. Uno de sus principales objetivos es ayudar a los educadores a crear entornos de aprendizaje virtuales (Virtual Learning Environments) que faciliten el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de favorecer el trabajo colaborativo (Correa, 2005).

De acuerdo con Baumgartner (2005), Moodle presenta tres modelos educativos de referencia:

1. Modelo de enseñanza transmisión de conocimientos: el aprendizaje del estudiante depende de los conocimientos del profesor y no hay una supervisión del proceso de aprendizaje.
2. Modelo de enseñanza basado en la adquisición, compilación y acumulación de conocimientos: la participación activa del estudiante es una condición necesaria para su aprendizaje.
3. Modelo de enseñanza basado en el desarrollo, invención y creación de conocimientos: en este modelo la función del profesor es la de facilitar el aprendizaje, siendo el propio estudiante el que debe producir y generar su conocimiento.

[1] El construccionismo hace referencia a la mejora que experimenta el aprendizaje de conceptos cuando se desarrolla un producto dirigido a los demás.

El modelo docente de referencia que seguimos en la experiencia docente descrita a continuación está basado en un modelo de transmisión de conocimientos del profesor presencial, junto a una enseñanza personalizada virtual adaptada a las necesidades y dificultades presentadas en el aprendizaje por cada alumno.

La distribución de Moodle es gratuita debido a que se trata de software libre (Open Source) sujeto a la Licencia Pública GNU (General Public License), lo cual le permite tener derechos de autor (copyright), dándole al usuario del software libertades como copiar, usar y modificar Moodle siempre que acepte proporcionar el código fuente a otros, no modificar o eliminar la licencia original y los derechos de autor, y aplicar esta misma licencia a cualquier trabajo derivado de él. El uso de esta herramienta en las aulas favorece y aumenta el grado de interactividad, y la sencillez de su manejo unida a las enormes posibilidades de usos didácticos que ofrece, lo han hecho una herramienta de gran difusión en los entornos educativos universitarios. Hay unos 24500 sitios Web que utilizan la plataforma Moodle en 175 países y está traducida a más de 75 idiomas (Sánchez, 2009).

En el presente artículo mostramos una experiencia docente en la que, a través del entorno virtual que ofrece la plataforma Moodle, el profesor propone a sus alumnos una serie de ejercicios de autoevaluación de sus conocimientos en una materia como la “Matemática de las Operaciones Financieras” que se imparte en el 1er curso del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Politécnica de Cartagena. Se trata de una asignatura de matemática aplicada a las operaciones financieras y bancarias, por lo que obviamente conlleva un aparato matemático que resulta de más fácil comprensión para el alumno al ser aplicado que si se tratara de conceptos y métodos encuadrados en la matemática más abstracta; no obstante, como toda enseñanza matemática el principal escollo o dificultad para el alumno suele ser el lograr las cotas de razonamiento necesario para comprender el concepto. En plena era de las nuevas tecnologías en la que la inmediatez y rapidez en la obtención de información es un hecho, el alumno ha ido perdiendo interés por dedicar un tiempo a razonar un problema matemático, y esto se traduce en un alto índice de suspensos y abandonos. Para el profesor de estas materias matemáticas, resulta un reto el estimular a sus estudiantes para que comprendan la materia, la estudien y la sepan aplicar a la realidad (por este orden) y como resultado final del proceso superen los requisitos para obtener los créditos que la asignatura confiere a su carrera universitaria.

El método de autoaprendizaje que mostramos en el presente artículo, nos ha demostrado en los años de experiencia que llevamos aplicándolo, que fomenta el interés del alumno, su ritmo de trabajo y por ende el resultado evaluativo final. Por lo que podemos decir que constituye una aportación a la Educación Matemática del alumno del Grado en Administración y Dirección de Empresas.

Mediante esta experiencia, hemos conseguido que a las posibilidades de auto-aprendizaje del alumno se unan los consejos del profesor particularizados a cada alumno y sus carencias específicas en conocimientos que la materia exige. Como consecuencia, por una parte, se crea un entorno favorable al aprendizaje del alumno, y por otra parte, se permite que el profesor conozca con mayor cercanía el proceso de aprendizaje de sus alumnos, pudiendo incidir en aquéllos temas o cuestiones que susciten en ellos una mayor dificultad. El fin principal de este trabajo es dar un paso hacia adelante en la mejora de la calidad educativa en la educación superior.

2.Los ejercicios de autoevaluación en el aula virtual

Esta experiencia docente ha sido desarrollada en la Plataforma Virtual basada en Moodle versión 2.9 (http:moodle.org) de la Universidad Politécnica de Cartagena; se trata de un espacio en el que se establece la comunicación entre profesorado y el alumnado de esta Universidad, y en el que se ofrecen diversas herramientas de apoyo al aprendizaje, tales como vídeos explicativos, tutoriales, ejercicios test de autoevaluación, foros, talleres, etc. La plataforma Moodle es personalizable por cada administrador, de acuerdo con las exigencias de su uso formativo; permite la creación de diversos perfiles de usuarios (administrador, tutor, alumno), la importación y exportación de datos en formato SCORM, y se trata de una Interfaz liviana, con seguimiento de las normas W3C (XHTML y CSS2). Para el profesor, esta plataforma ofrece grandes posibilidades educativas dirigidas a cualquier cantidad de alumnos, permite la creación de cursos virtuales y entornos de aprendizaje virtuales, constituye un complemento digital para cursos presenciales (blended), permite la aplicación de diversos métodos de evaluación y calificación, y resulta accesible y compatible desde cualquier navegador web, independiente del sistema operativo utilizado

En el presente artículo, vamos a mostrar las posibilidades formativas que se ofrecen, en concreto los ejercicios de autoevaluación, como un complemento docente de sencillo manejo orientado a estimular el estudio y aprendizaje de la materia por parte del alumno, contribuyendo a la vez a un perfeccionamiento docente del profesor y a una enseñanza “*a medida*” del alumno y sus dificultades.

El profesor, a lo largo del curso, realiza al menos dos ejercicios de autoevaluación a sus alumnos, el primero de ellos cuando el profesor ha explicado los cinco primeros temas del programa del curso, y el segundo ejercicio cuando ya se ha explicado la totalidad del programa, es decir los diez temas de los que consta éste. Estos ejercicios son de cumplimentación voluntaria, aunque el profesor recomienda al alumno su realización con el fin de que compruebe si su ritmo de estudio resulta adecuado o presenta deficiencias. La experiencia de más de 10 años nos ha indicado que un 93,8% de los alumnos que vienen regularmente a las clases suelen hacer los ejercicios de autoevaluación. Para el profesor, los resultados obtenidos de la realización de estos ejercicios de autoevaluación suponen una valiosa información acerca del progreso de aprendizaje del alumno, y la detección de las principales dificultades que éste presenta en determinados conceptos o cálculos contenidos en el programa de la asignatura.

La rentabilidad educativa de estos ejercicios es muy alta, ya que las ventajas de su uso superan ampliamente el trabajo del profesor, que se limita a redactar un banco de preguntas de acuerdo a unos niveles de dificultad graduales. Del mismo modo, el profesor enlaza aquellos capítulos del libro de la asignatura (elaborado por el equipo docente) con cada pregunta, de forma que ante un error en la respuesta del alumno, se produce la descarga automática de un archivo con los conceptos y ejercicios que el alumno debe repasar o estudiar. Estos ejercicios de autoevaluación se utilizan actualmente como complemento a la docencia presencial, aunque se podrían utilizar en un futuro para formar parte de la evaluación de la asignatura.

Los ejercicios que utilizamos son del tipo: completar frase, elección múltiple, respuesta múltiple y verdadero-falso. Para resolverlos es necesario que el alumno esté provisto de su calculadora, ya que la solución pasa generalmente por realizar algún cálculo financiero. El grado de dificultad es más o menos homogéneo, aunque, a medida que avanzamos en el programa, la complejidad de los ejercicios es mayor, con lo que la resolución de los mismos va aumentando también en dificultad. Es lógico que "a mayor conocimiento de la materia, el alumno sea capaz de resolver cada vez problemas más complejos". La realización de estos ejercicios proporciona al profesor una valiosa herramienta para conocer la capacidad de relación y de razonamiento de los alumnos y detectar las dificultades que estos presentan en su proceso de aprendizaje. Este tipo de exámenes auto-evaluativos permiten también que el profesor evalúe mejor el trabajo realizado por el alumno a lo largo del curso, lo que es fundamental en este tipo de asignatura de perfil práctico.

Al contestar el alumno a cada pregunta planteada, recibe un mensaje en el que indica su grado de progreso, o un consejo acerca del tema que debe repasar o estudiar de nuevo, así como un archivo con el contenido teórico-práctico que debe volver a estudiar para superar sus dudas; de esta forma, el alumno va revisando sus errores y mejorando su estudio y aprendizaje. A continuación, ofrecemos en la tabla 1 unos volcados de pantalla en los que aparece una vista previa de algunos de los cuestionarios de autoevaluación que aplicamos:

PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
El montante de invertir 1000 euros durante 4 años 2 meses y 3 días en el convenio lineal al 1,5% equivalente trimestral es de: Seleccione una: a. 3000 euros b. 1210,890 euros c. 1282,5947 euros Comprobar	Una letra fue librada el 24 de marzo de 2016, y tiene un vencimiento de 90 días. El 1 de abril de 2016 se presenta al banco para su descuento y el 3 de abril de 2016 el banco practica el descuento comercial simple y abona el efectivo. El plazo de descuento es de: Seleccione una: a. 115 días b. 105 días c. 81 días d. 100 días Comprobar	Una letra de nominal 300 euros fue descontada 6 meses. Los gastos de éste descuento comercial simple fueron de 12,92 euros. El tipo de interés y el tipo de descuento equivalentes de la operación fueron: Seleccione una: a. d= 9% ; i=9,38% b. d=7,2% ; i=8,7% c. d= 8,6% ; i=8,97% d. d= 6,5% ; i=7,2% Comprobar

Tabla 1. Cuestionarios de autoevaluación

Los ítems de los que consta cada cuestionario han sido elaborados siguiendo unos niveles de dificultad progresivos, comenzando por preguntas orientadas a identificar si el alumno ha comprendido los conceptos fundamentales para, a continuación ir introduciendo la métrica de las operaciones financieras desde las más sencillas (la Capitalización y Actualización de un solo capital) a las más complejas (Rentas Financieras).Cuando el alumno hace una respuesta incorrecta, el sistema le devuelve junto al mensaje un consejo del profesor acerca de lo que ha fallado en su aprendizaje y el capítulo del libro de la asignatura que debe consultar o volver a estudiar con más detalle, si se trata de un ejercicio, se le propone una relación de ejercicios resueltos con la misma línea de dificultad y otros propuestos para que se ejercite (en el apartado 4 de este artículo, denominado retroalimentación del alumno se muestra un ejemplo de *feedback* del profesor con el alumno que da una respuesta incorrecta al cuestionario).

3. Resultados obtenidos

Una vez que se ha cerrado el plazo para cumplimentar el formulario por parte del alumno, el administrador del curso (profesor) recibe la siguiente información general sobre el desarrollo del curso en el apartado de “Resultados” (tabla 2):

Nombre del cuestionario	Calificación media de los últimos intentos
Nombre del curso	Calificación media de los mejores intentos
Abrir cuestionario	Calificación media (de intentos con mejores calificaciones)
Cerrar cuestionario	Desviación estándar (para intentos con mejores calificaciones)
Abierto para	Asimetría de la distribución de puntuaciones (para intentos con mejores calificaciones)
Número de primeros intentos	Curtosis de la distribución de puntuaciones (para intentos con mejores calificaciones)
Número total de intentos completados	Coeficiente de consistencia interna (para intentos con mejores calificaciones)

Promedio de los primeros intentos	Ratio de error (para intentos con mejores calificaciones)
Promedio de todos los intentos	Error estándar (para intentos con mejores calificaciones)

Tabla 2. Resultados

De la contestación de los alumnos por bloques temáticos en los que se ha distribuido la materia, el profesor recibe información acerca del grado de dificultad que cada cuestión suscita en los alumnos, medida por el porcentaje de intentos y errores cometidos. En la tabla 3 mostramos un ejemplo de la información que la plataforma Moodle ofrece al profesor.

Nº PREGUNTA	DESCRIPCIÓN DE LA PREGUNTA	BLOQUE TEMÁTICO	INTENTOS	Índice de Dificultad	Desviación estándar	Calificación aleatoria estimada	Peso estimado	Peso efectivo	Indice de discrimina-ción	Eficiencia discrimina-tiva
1-13		1-10	31	96.77%	17.96%	25.00%	8%	5.89%	27.31%	29.55%

Tabla 3. Información que proporciona Moodle al profesor

A partir de esta información, el profesor puede analizar el grado de dificultad de cada concepto o cálculo matemático referido a cada parte temática en la que se divide el programa de la asignatura.

4. Retroalimentación al alumno

El profesor recibe un cuadro completo con la calificación obtenida por el alumno en cada pregunta de la que consta el cuestionario, y el alumno recibe un comentario de aquél o aquellos conceptos que debe repasar en las cuestiones a las que no ha respondido correctamente. En la tabla 4 se muestra un ejemplo del informe de resultados que recibe el alumno:

FOTO DEL ALUMNO	NOMBRE Y APELLIDOS DEL ALUMNO	CORREO ELECTRÓNICO	NÚMERO DE INTENTOS	FECHA DEL ÚLTIMO INTENTO	TIEMPO EMPLEADO	CALIFICACIÓN	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
			5	7 de enero de 2014 21:21	-	-	✓ 1	✓ 0	✗ 0	✓ 0	✗ 0	✓ 0	✗ 0	✓ 0	✓ 1	✓ 0

Tabla 4. Información que proporciona Moodle al alumno

En el momento que el alumno recibe el mensaje de respuesta incorrecta se genera un mensaje en el que se le indica el concepto o cálculo que debe repasar, un ejemplo de este *feedback* lo mostramos a continuación:

	XXXXXXXX
Cuestionario	Ejercicio tipo test de repaso temas 1-10
Pregunta	Convenio exponencial y lineal
Finalizado en	sábado, 13 de febrero de 2016, 15:55

Pregunta 2
Incorrecta Retroalimentación Debes estudiar de nuevo los convenios de capitalización compuesta para operaciones financieras de más de un año que comprenden tiempos fraccionarios. Información contenida en el tema 5 “demostración de la comparativa entre convenio lineal y exponencial” La respuesta correcta es: El convenio exponencial produce menores intereses que el convenio lineal
Incorrecta
Puntos para este envío: 0/1.

Tabla 5. Información que proporciona Moodle al alumno sobre la materia a repasar

Finalmente, el alumno recibe en su correo electrónico un archivo en formato pdf que contiene conceptos teóricos que debe repasar, así como una relación de ejercicios resueltos y propuestos por el profesor con el fin de mejorar su nivel de conocimiento, y solventar dudas o dificultades que presente en su proceso de aprendizaje.

Por su parte, el profesor recibe de cada alumno el historial de respuestas hasta llegar a la correcta, tal y como muestra la tabla 6, con lo que puede se puede apreciar el grado de dificultad presentado por el alumno en cada cuestión planteada (tabla 6).

Paso	Hora	Acción	Estado	Puntos
1	9/12/2013 12:49	Iniciado/a	Sin finalizar	
2	9/12/2013 18:57	Guardada: al 7% nominal cuatrimestral	Sin finalizar	
3	9/12/2013 18:58	Enviar: al 7% nominal cuatrimestral	Incorrecta	0,00
4	9/12/2013 18:59	Intento finalizado	Incorrecta	0,00

Tabla 6. Resumen de intentos por alumno

5. Resultados

La metodología docente que les mostramos fue desarrollada por las profesoras (autoras del presente artículo) en el curso académico 2010/2011 aunque hemos añadido a efectos comparativos el resultado correspondiente al curso académico 2009/2010 en que todavía no habíamos puesto en marcha esta experiencia docente con el fin de que se aprecie el "*salto*" cualitativo en los niveles de satisfacción y motivación del alumno; así la apreciación del alumno acerca de la calidad de la enseñanza recibida es más alta desde que se ha implantado este método de autoaprendizaje (en el curso académico 2010/2011 y siguientes), el grado de dificultad en el aprendizaje de la materia ha disminuido progresivamente en los cursos de implantación de esta mejora formativa, y la percepción del alumno acerca del grado de dedicación del profesor al alumno en el proceso de aprendizaje, ha mejorado sensiblemente calificándola mayoritariamente de satisfactoria a excelente. Todos estos indicadores de calidad contenidos en los controles de calidad, se muestran englobados en la figura 1 en la que se aprecia la evolución en la valoración global de profesor por parte del alumno y el grado de motivación manifestado por el alumno en el aprendizaje. Con el fin de ilustrar la mejora en los indicadores de calidad, se incluyen los datos del curso 2009/2010 en el que todavía no se había implantado el método de autoaprendizaje.

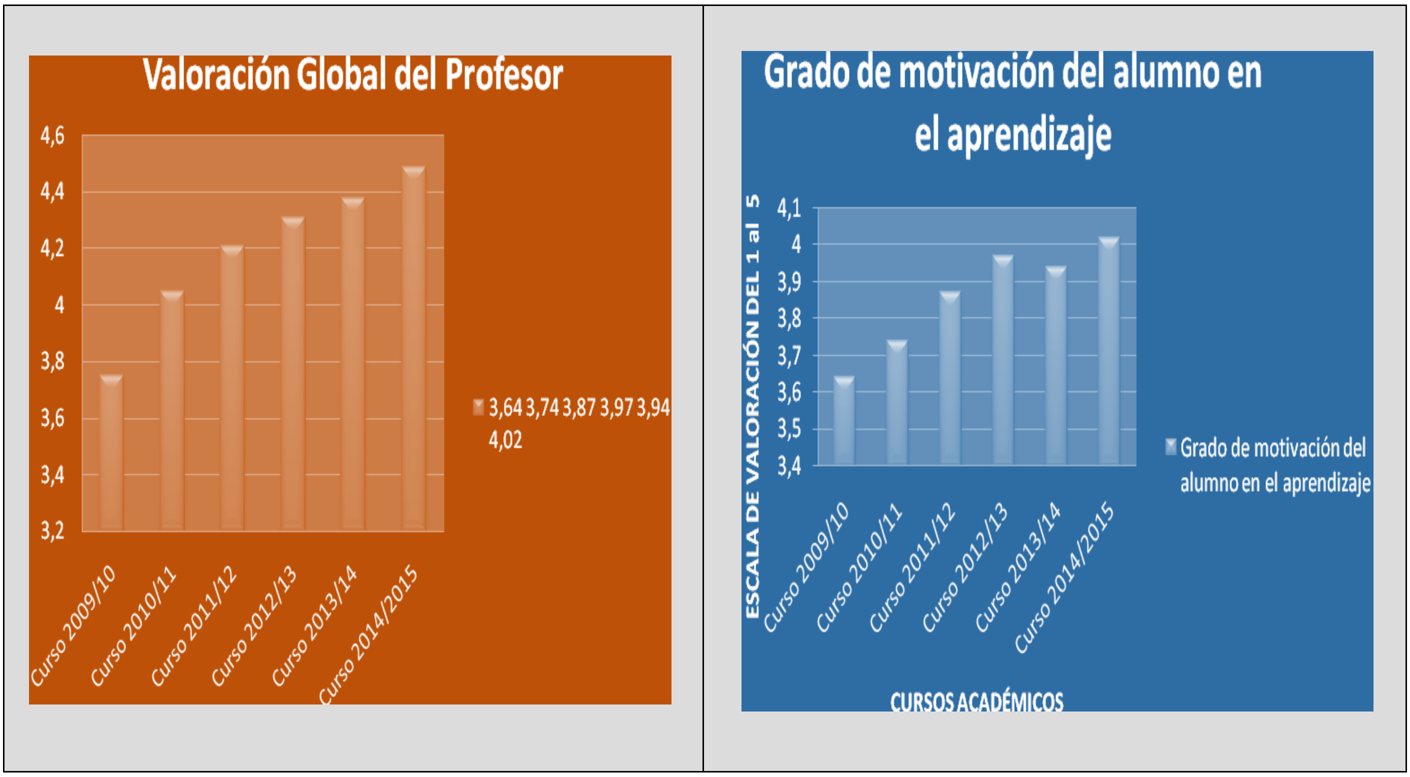


Figura 1: resultados de la experiencia según la opinión de los alumnos. Elaboración propia a partir de los test de evaluación de la calidad realizados por el Servicio de Calidad de la Universidad Politécnica de Cartagena

En las gráficas se aprecia un claro incremento en la valoración global del profesor y en la motivación del alumno en el curso 2010/11 respecto al curso 2009/2010 en el que todavía no se había implantado esta metodología docente. Se observa la tendencia de crecimiento en la motivación del alumno por el aprendizaje de la asignatura, en paralelo a una mejor consideración de la labor docente desempeñada por el profesor. El alumno ha incrementado positivamente la valoración global del profesor en aspectos tales como la dedicación y atención al alumno, la percepción de que la formación recibida es útil y se adapta mejor a la práctica profesional, así como consideran como factores muy favorables en su aprendizaje la participación en los ejercicios de autoevaluación propuestos por el profesor. En general, los estudiantes se muestran satisfechos con la experiencia y consideran que ha sido altamente positiva. En cuanto a los factores negativos de la experiencia que los alumnos describen, se encuentra el incremento en la carga de trabajo de la asignatura desde que se implantó la experiencia, aunque reconocen su utilidad como un instrumento facilitador de su estudio.

Para el profesorado implicado en la experiencia, el inconveniente mayor es el incremento en la carga de trabajo que supone, ya que supone un trabajo añadido a la lección magistral convencional. Sin embargo, la percepción de satisfacción del profesor con la experiencia docente ha crecido desde que se implantó la misma, así como el sentimiento de estar contribuyendo a un mejor aprendizaje de sus alumnos.

6. Conclusiones

La experiencia docente descrita, resulta beneficiosa para el alumno ya que le permite llevar un control del progreso de su aprendizaje, detectando aquellos conceptos o cálculos financieros que no maneja adecuadamente y recibiendo una orientación personalizada del contenido teórico o los ejercicios prácticos que debe volver a estudiar o repasar, lo que posibilita la autonomía en el estudio (al tratarse de un medio no presencial) y la autodirección del alumno en el estudio (puede acceder a la aplicación a cualquier hora de cualquier día)con lo que se le otorga al alumno una mayor capacidad para organizar y planificar su trabajo de forma autónoma.

La respuesta del sistema ante una respuesta incorrecta siempre es constructiva, ya que guía y orienta al alumno acerca de aquello que debe volver a estudiar o aclarar con lo que supone para el alumno una reducción en los tiempos de búsqueda de la información. Los cuestionarios de autoevaluación permiten que el alumno mida en cada momento su progreso en el proceso de aprendizaje, con lo que aumenta su motivación hacia la asignatura ya que al dedicarle más tiempo tiene menos incentivo para abandonarla.

Para el profesor, la experiencia docente basada en la realización de ejercicios de autoevaluación online resulta muy útil, ya que le permite controlar el progreso de aprendizaje de sus alumnos, así como detectar las dificultades de éstos a la hora de comprender y asimilar algunos conceptos (con lo que puede incidir más en las explicaciones de esos temas para resolver mejor las dudas o facilitar la comprensión). En definitiva, el método didáctico expuesto forma parte de un proyecto de enseñanza universitaria más cercana al alumno y acorde a las necesidades que en el proceso de aprendizaje de éste puedan surgir, de una forma sencilla y práctica. La carga de trabajo que supone la realización de esta experiencia no es demasiado gravosa, si se tiene en cuenta de que simplemente hay que elaborar un banco de preguntas y enlazar cada respuesta fallida del alumno a un archivo con el contenido teórico-práctico que se le recomienda que repase, así como un comentario del profesor aconsejando al alumno sobre la forma de enfocar su estudio y mejorar su comprensión.

La materia en la que se aplica la metodología docente descrita en el presente artículo es de matemáticas aplicadas y por tanto, resulta imprescindible que el alumno comprenda los conceptos, para, a continuación, ser capaz de acometer el razonamiento necesario en la resolución de los problemas planteados. Esta es la principal dificultad con la que nos encontramos los profesores de matemáticas, la de conseguir que nuestros alumnos no perciban con desinterés el tiempo necesario para razonar un problema matemático, y para ello, resulta necesario "*guiar*" a nuestros alumnos para que trabajen su aprendizaje de la forma más eficiente, y de éste modo revertir el alto índice de suspensos y abandonos que las asignaturas matemáticas han tenido de forma tradicional. En resumen, nuestra línea de pensamiento docente se resume en una frase "*lo que no se comprende no gusta*", ayudemos a nuestros alumnos a que comprendan y conseguiremos nuestro reto, que aprendan y sean capaces de aplicar lo que aprenden en su futuro profesional.

De todas las razones anteriormente expuestas concluimos con que el sistema de autoevaluación del aprendizaje propuesto, mejora la calidad de la enseñanza del docente, y constituye una útil estrategia de complemento a la enseñanza presencial, al atender a la diversidad de intereses, necesidades y ritmos de aprendizaje del alumnado.

Bibliografía

Baumgartner, P. (2005). *Cómo elegir una herramienta de gestión de contenido en función de un modelo de aprendizaje*. Elearningeuropa.info: Dirección General de Educación y Cultura de la Comisión Europea.

Cebrián,M.(Coord.)(2003). *Enseñanza Virtual para la Innovación Universitaria*. Edit. Narcea, Madrid.

Correa, J. M (2005): *La integración de plataformas de e-learning en la docencia universitaria: Enseñanza, aprendizaje e investigación con Moodle en la formación inicial del profesorado*. Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 4 (1); 37-48.

Duart, J.M. (2006). *Internet y aprendizaje: una estrecha relación*. RUSC. Universities and KnowledgeSocietyJournal, vol. 3, núm. 2.

Hassan-Montero, Y., Martín-Fernández, F.J., Hassan-Montero, D. y Martín-Rodríguez, O. *Arquitectura de la información en los entornos virtuales de aprendizaje. Aplicación de la técnica cardsorting y análisis cuantitativo de los resultados*. El profesional de la información, 13 (2), pp. 93-99.

Lara, P., Saigí, F. yDuart, J. M. (2003). *Gestión de Información en el Diseño de Contenidos Educativos On-Line*. Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología, Sociedad e Innovación, 6.

Martínez, C.,Fernández, M.S. (2011). *El uso del Moodle como entorno virtual de apoyo a la enseñanza presencial. La práctica educativa en la Sociedad de la Información: Innovación a través de la investigación.* Coord.porRosabel Roig Vila, CosimoLaneve, 2011,ISBN978-84-268-1563-7,pp.291-300.

Sánchez, J. (2009). *Plataformas de Enseñanza Virtual para Entornos Educativos.* Revista de Medios y Educación, 34, pp. 217-233

Sánchez Santamaría, J., Sánchez Antolín, P. y Ramos Pardo, F.J. (2012). *Usos pedagógicos de Moodle en la docencia universitaria desde la perspectiva de los estudiantes.* Revista Iberoamericana de Educación, 60, pp. 15-38 (1022-6508).

Suárez, C. (2003). *Los entornos virtuales de aprendizaje como instrumento de mediación.* Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información (4)

Autores:

Lozano Gutierrez, Mª Carmen**: es doctora en Administración y Dirección de Empresas por la Universidad Politécnica de Cartagena y profesora Titular de Universidad desde hace 30 años en el Departamento de Economía Financiera y Contabilidad de esa misma Universidad. Ponente habitual en Congresos Internacionales de Innovación Docente, autora de diversos libros docentes y con más de un centenar de publicaciones en revistas científicas nacionales e internacionales**
Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad.
C/ Real, 3, 30201, Cartagena, Murcia.
Tfno. 968325611
Fax: 968325782
Email.carmen.lozano@upct.es

Ramón-Llorens, Mª Camino **es doctora en Administración y Dirección de Empresas por la Universidad Politécnica de Cartagena y profesora en el Departamento de Economía Financiera y Contabilidad de esa misma Universidad. Ponente habitual en diversos Congresos Internacionales de Innovación Docente. Autora de varios libros docentes y de diversas publicaciones en revistas científicas nacionales e internacionales.**
Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad.
C/ Real, 3, 30201, Cartagena, Murcia.
Tfno. 868071045
Fax: 968325782
Email.camino.ramon@upct.es

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 236-249

Una Imagen vale más que Mil Datos: Las Representaciones Gráficas en la Enseñanza de la Estadística

Hugo Granchetti, Christiane Ponteville, Myriam Nuñez

Fecha de recepción: 25/08/2017
Fecha de aceptación: 17/10/2017

Resumen	El diluvio de datos nos desborda, y la Estadística ofrece innumerables formas de dilucidar las historias que los datos tienen para contar. Ya sean gráficos de barras, sectores circulares o histogramas, esta disciplina nunca escatima en variedad. Este trabajo pretende abordar la utilidad de las representaciones gráficas en la enseñanza de la estadística, obtenidas a partir de una búsqueda bibliográfica en diversas áreas disciplinares. Dicho instrumento propone transmitir el impacto que tiene la visualización de la información en nuestras decisiones cotidianas y profesionales. Una imagen vale más que mil palabras. De la misma manera, una imagen vale más que mil datos. **Palabras clave**: estadística, representación gráfica, visualización de datos, propuesta didáctica
Abstract	Data deluge overwhelms us, and Statistics offer innumerable ways for elucidating the stories behind the numbers. Whether it be bar charts, pie charts or histograms, this discipline never lacks variety. The present work aims to analyze the utility of graphical representations for teaching statistics, obtained from a literature search throughout many disciplinary areas. Such instrument was designed to transmit the impact that data visualization has on our daily and professional decisions. A picture is worth a thousand words. Similarly, a picture is worth a thousand data points. **Keywords**: statistics, graphical representation, data visualization, didactic proposal
Resumo	A enxurrada de dados é esmagadora, e a Estatística oferece inúmeráveis formas de elucidar as histórias que os dados têm para contar. Quer sejam gráficos de barras, histogramas ou setores circulares, essa disciplina sempre tem variedades. Este trabalho pretende abordar a utilidade das representações gráficas no ensino da estatística, obtidas a partir de uma busca bibliográfica em diversas áreas disciplinares. Esse instrumento propõe transmitir o impacto que tem a visualização da informação em nossas decisões cotidianas e profissionais. Uma imagem vale mais que mil palavras. Da mesma maneira, uma imagem vale mais que mil dados. **Palavras-chave:** estatística, representação gráfica, visualização de dados, proposta didática

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es describir y fundamentar la utilización de las representaciones gráficas como herramienta en la enseñanza de la estadística. El creciente acceso a la información nos exige estar atentos, cada vez más, a la forma de transmitir los patrones escondidos detrás de los números.

Desde los originales gráficos de área polar de Florence Nightingale hasta las dinámicas presentaciones de la fundación *Gapminder*, hemos sido testigos del desarrollo de innovadoras figuras, esquemas y mapas cuyo impacto no puede ser subestimado. Para ello, la Estadística nos ofrece diversas representaciones gráficas que nos ayudan a dilucidar las historias que los datos tienen para contar, como, por ejemplo, gráficos de barras, sectores circulares, diagramas de dispersión, histogramas, cajas y bigotes, entre otros.

2. Marco de referencia

El abordaje elegido se sustenta en las innumerables evidencias que ha ofrecido la investigación didáctica en las últimas décadas, sobre aquellas estrategias que han demostrado efectividad para la enseñanza de conceptos, procedimientos y actitudes en un mundo de constantes cambios.

Howard Gardner (1983) sugiere, a partir de su Teoría de Inteligencias Múltiples, el abordaje de los contenidos de un currículum a través de diversas puertas de acceso al conocimiento, como la visual, la espacial, la lingüística y la intra e inter personal. Además, propone hacer foco en la formación de las “cinco mentes para el futuro” (Gardner, 2008): Disciplinada, Sintética, Creativa, Respetuosa y Ética. Estas abarcan la incorporación de formas de pensar asociadas a profesiones y empleos, la selección y el ordenamiento de la información que tengan sentido para uno y para los demás, el desarrollo de nuevas formas de pensar, el trabajo desde la tolerancia entre individuos y grupos, y la identificación de las características cruciales del propio rol como trabajador y como ciudadano.

Por otra parte, David Perkins (1992) nos desafía a pensar en lo que considera la pregunta pedagógica más importante: “¿qué enseñamos?”. Con este tono, nos invita a poner en el centro de la escena a aquellos temas generadores que den lugar a la enseñanza para la comprensión, que sean de trascendencia contextual para nuestros alumnos. Asimismo, sugiere que estos temas se aborden en forma interdisciplinaria e involucren no sólo los llamados “problemas bien estructurados”, típicos de las simulaciones educativas, sino también -y más aún- los “problemas mal estructurados”, típicos del mundo real. Estas situaciones deben formar parte de la formación de nuestros alumnos ya que ellas podrán lograr el desarrollo de prácticas asociadas a la visualización de datos, evitando caer en la mera reproducción de contenidos (Cantoral, 2013).

Tras sus investigaciones a lo largo de 20 años, tanto Ken Bain (2004, 2012) como Ron Ritchhart (2015) publicaron una serie de patrones y conclusiones sobre las prácticas de enseñanza y aprendizaje de aquellos docentes y alumnos que demostraron resultados ejemplares, medidos no por la obtención de altas calificaciones en exámenes estandarizados, sino por la trascendencia de su impacto en sus respectivos y diversos ámbitos de desempeño. Curiosamente, a pesar de la diversidad disciplinar implicada en estos estudios, los patrones eran siempre similares: la comunidad de aprendizaje conformada por estos docentes y alumnos se caracterizaba por una “cultura de pensamiento” creada en el aula, en la que se fomentaba y respetaba la participación, el debate y la construcción conjunta del conocimiento, en contraposición con la mera transmisión de conceptos.

Teniendo en cuenta esta nueva visión, la formación estadística de los estudiantes en todos los niveles educativos queda presente en la discusión didáctica. Uno de los planteos tiene que ver con la presencia de fenómenos aleatorios en diversos aspectos. De esta forma, para valorar el rol de la estadística, es fundamental acercarse a problemas del mundo biológico, histórico, físico, social y político: las características genéticas, la previsión climática, el resultado de las actos eleccionarios, el crecimiento de la población, la extinción de las especies, el efecto de los hábitos alimenticios o las drogas sobre la salud, la extensión de enfermedades, los resultados deportivos, el índice de precios o el censo de la población son claras evidencias del mundo que los rodea (Ponteville, 2014). Gran parte de esta información nos llega en forma de gráficos estadísticos y tablas, por lo que una persona estadísticamente culta debiera ser capaz de comprender e interpretar las distintas formas de presentación de datos estadísticos para aprender e informarse sobre los temas más variados (Arteaga, 2010). Para que este proceso sea efectivo deberá estar inmerso en un desarrollo del razonamiento crítico apoyado en la toma de valor de la evidencia existente que dé respuestas a situaciones de decisión y permita realizar predicciones junto con los procesos de resolución de problemas, el planteo de conjeturas en aspectos matemáticos, y la institucionalización como un acuerdo social en la construcción de conocimiento. (Ponteville, Núñez, Granchetti, Reynoso & Seifert, 2014).

3. Desarrollo de la propuesta didáctica

Con el objetivo de crear una cultura de pensamiento en torno a un tema concreto como la visualización de datos en la Estadística Descriptiva, diseñamos actividades que involucran disciplinas diversas y abordan las siguientes preguntas: ¿Qué herramientas nos ofrece la Estadística para generar imágenes a partir de los datos? ¿Cuántas formas de representarlos existen hoy en día? ¿Ante qué estrategias de manipulación y tergiversación visual debemos estar atentos? Estos interrogantes fueron los generadores de las actividades disparadoras utilizadas en la secuencia didáctica.

Teniendo en cuenta esta visión que considera múltiples perspectivas, hemos abordado diversas áreas como las Ciencias de la Salud, Historia, Tecnología, Ciencias de la Comunicación y Salud Global. Estos materiales fueron implementados como herramientas pedagógicas en diversos contextos: una clase sobre Estadística Descriptiva en un curso de Bioestadística para estudiantes de las carreras de

Farmacia y Bioquímica (Universidad de Buenos Aires) y un taller en las “Quintas Jornadas del Departamento de Matemática” del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, dirigido a profesores de matemática y alumnos del profesorado de Matemática. En ambos casos, el aula taller se utilizó como metodología buscando el debate con los alumnos a través de preguntas disparadoras para invitar a compartir sus opiniones y argumentaciones, potenciando los recursos de los participantes.

A continuación, se detallan las actividades y contenidos de la propuesta, así como las razones didácticas que han llevado a su selección. Cabe destacar que, según el contexto de implementación, el recorte y orden de actividades pueden ser planificados en base a los contenidos que representen el mayor potencial generador para la audiencia destinataria, así como el tiempo disponible para su desarrollo.

3.1 Actividad 1 (área: Epidemiología)

Como caso emblemático en la historia de la visualización de datos, en el siglo XIX Florence Nightingale impactó a los generales británicos de la Guerra de Crimea resaltando las causas mayoritarias de muerte de los soldados. A través de sus gráficos de área polar, demostró que las infecciones prevenibles eran el principal enemigo en combate, superando ampliamente a las heridas de guerra. Con este ejemplo, acercamos a los alumnos a formas de visualización no convencionales como estrategias de comunicación (Mente Creativa), en contraste con la mera exposición de tablas numéricas, lo cual facilita la detección de las tendencias detrás de los datos, con el consiguiente impacto de la importancia que tienen estos gráficos para la toma de decisiones en salud (Mente Disciplinada y Mente Ética).

Tanto la siguiente tabla como el gráfico de área polar muestran la misma información, sobre las muertes relevadas por la enfermera Florence Nightingale durante la Guerra de Crimea entre los años 1854 y 1856.

a) ¿Qué conclusiones generales pueden extraer?

b) ¿De dónde les resultó más fácil extraer sus conclusiones: de la tabla o del gráfico? ¿Por qué?

c) ¿Cuál de los dos, tabla o gráfico, les parece que tiene mayor impacto para comunicar la información relevada?

TABLE K.—Figure 1.

TABLE SHOWING the ESTIMATED AVERAGE MONTHLY STRENGTH of the ARMY; and the Deaths and Annual Rate of Mortality per 1,000, in each Month, from April, 1854, to March, 1856, (inclusive), in the Hospitals of the Army in the East.

Months	Estimated Average Monthly Strength of the Army.	DEATHS.			ANNUAL RATE OF MORTALITY PER 1,000.		
		Zymotic Diseases.	Wounds and Injuries.	All other Causes.	Zymotic Diseases.	Wounds and Injuries.	All other Causes.
1854 April	8,571	1	..	5	1·4	..	7·0
May	23,333	12	..	9	6·2	..	4·6
June..	28,333	11	..	6	4·7	..	2·5
July..	28,722	359	..	23	150·0	..	9·6
August	30,246	828	1	30	328·5	·4	11·9
September ..	30,290	788	81	70	312·2	32·1	27·7
October	30,643	503	132	128	197·0	51·7	50·1
November ..	29,736	844	287	106	340·6	115·8	42·8
December ..	32,779	1,725	114	131	631·5	41·7	48·0
1855 January	32,393	2,761	83	324	1022·8	30·7	120·0
February.. ..	30,919	2,120	42	361	822·8	16·3	140·1
March	30,107	1,205	32	172	480·3	12·8	68·6
April	32,252	477	48	57	177·5	17·9	21·2
May..	35,473	508	49	37	171·8	16.6	12·5
June..	38,863	802	209	31	247·6	64·5	9·6
July..	42,647	382	134	33	107·5	37·7	9·3
August	44,614	483	164	25	129·9	44·1	6·7
September ..	47,751	189	276	20	47·5	69·4	5·0
October	46,852	128	53	18	32·8	13·6	4·6
November ..	37,853	178	33	32	56·4	10·5	10·1
December ..	43,217	91	18	28	25·3	5·0	7·8
1856 January	44,212	42	2	48	11·4	·5	13·0
February	43,485	24	..	19	6·6	..	5·2
March	46,140	15	..	35	3·9	..	9·1

The Deaths under the head of "Wounds and Injuries," comprise the following causes:—Luxatio, Sub-Luxatio, Vulnus Sclopitorum, Vulnus Incisum, Contusio, Fractura, Ambustio, and Concussio Cerebri.

Figura 1. Tabla original con los datos recolectados por Florence Nightingale (1856).

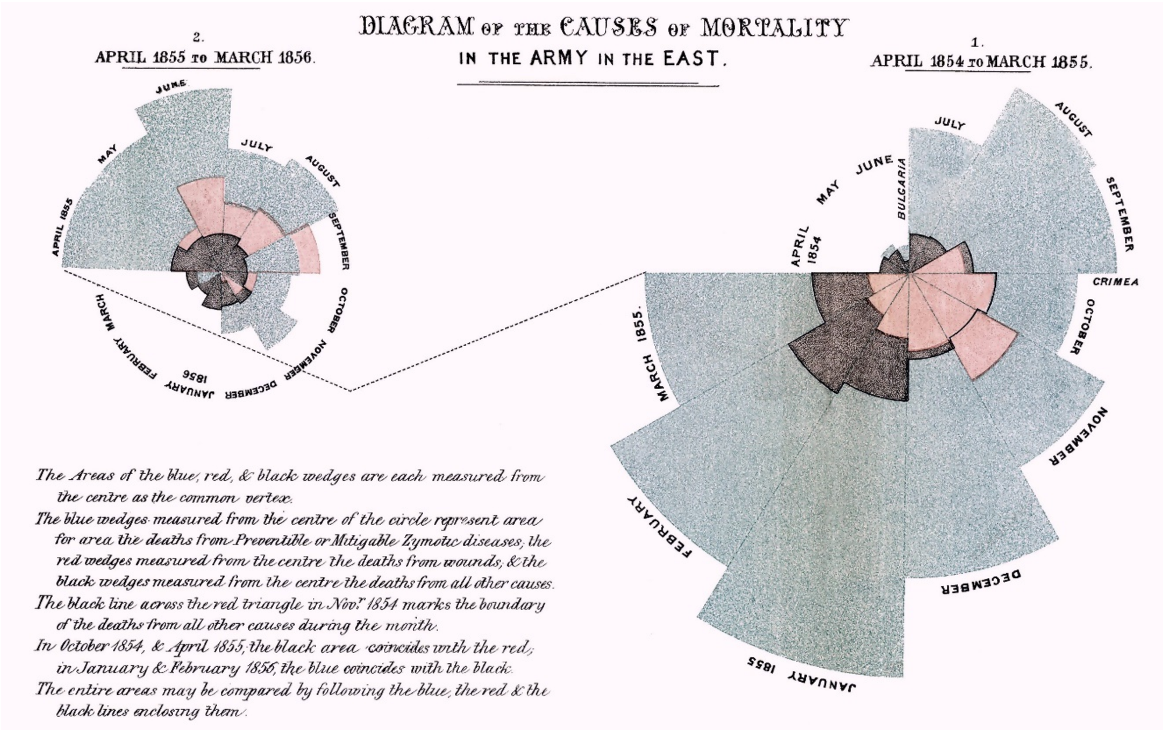


Figura 2. Gráficos de área polar de Florence Nightingale (1856).

3.2 Actividad 2 (área: Epidemiología)

El siguiente mapa es un famoso esquema realizado por el Dr. John Snow durante una epidemia de cólera en el distrito de Soho, Londres, en el año 1854. En él se representa la distribución espacial de las muertes (rectángulos negros) y las fuentes de agua (círculos negros, "pumps").

a) ¿Cuál creen que era la intención de John Snow al esquematizar estos datos?

b) ¿Observan algún patrón en esta distribución espacial de dichos datos?

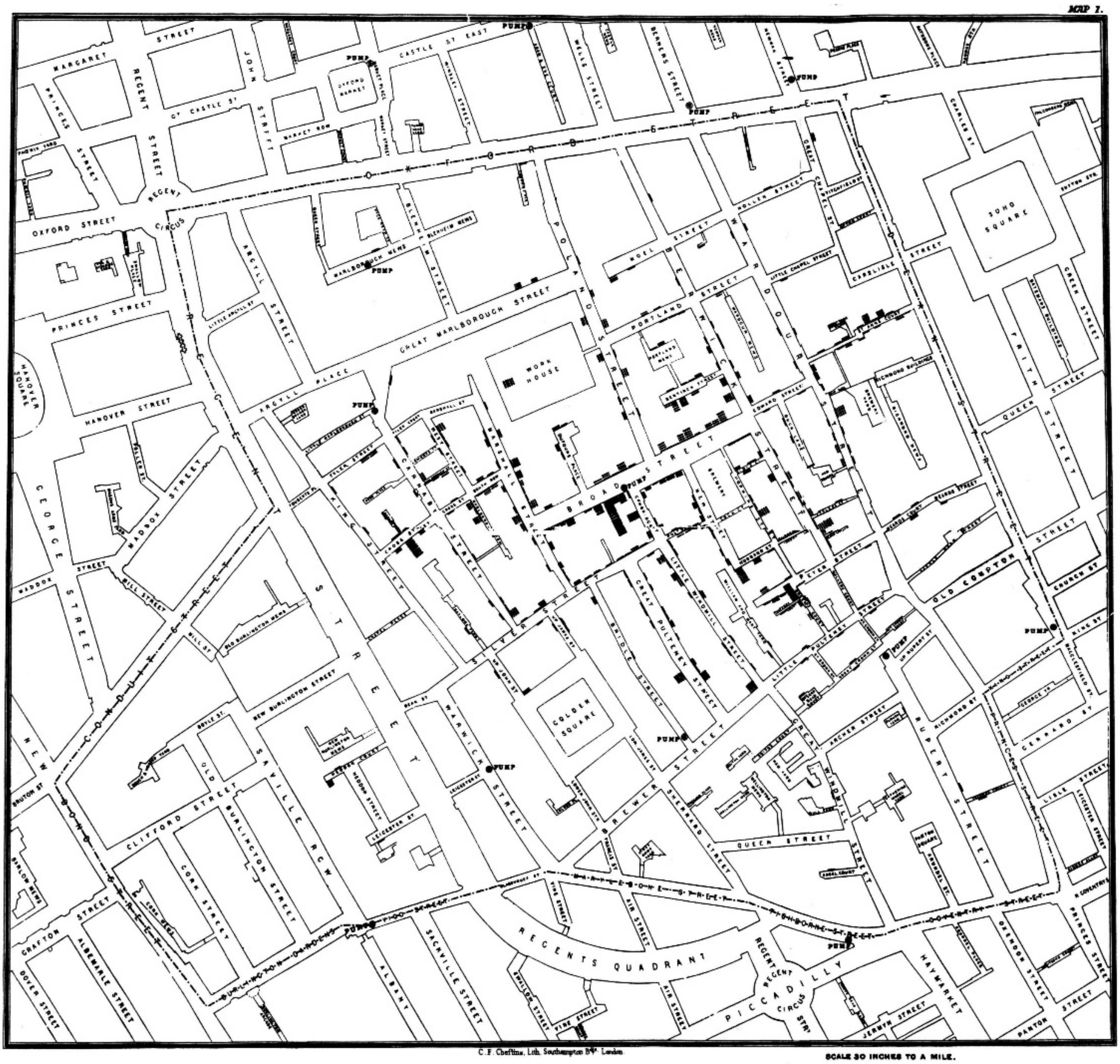


Figura 3. Mapa de mortalidad por el cólera de Jon Snow, en el distrito de Soho, Londres (1854).

Continuando con otro ejemplo que forma parte de la historia de la Epidemiología, proponemos un recorrido por el bucle iterativo de la investigación (Mente Disciplinada) a través de la famosa historia del Dr. John Snow: la determinación de un problema (muertes por cólera en el distrito de Soho, Londres); la búsqueda de potenciales causas (fuente del consumo de agua); el diseño de una intervención (suspensión de la fuente de agua en la calle donde se concentraba la mayor cantidad de muertes); y evaluación de resultados (disminución de la incidencia de mortalidad en el distrito tras la intervención). Incluso sin siquiera imaginar los fundamentos microbiológicos que se descubrirían décadas después, John Snow aplicó un proceso lógico de inferencia a partir de la observación atenta del patrón de distribución de los datos.

3.3 Actividad 3 (área: Tecnología)

El siguiente mapa muestra el consumo eléctrico promedio (kilowatts por hora) en diferentes regiones alrededor de la ciudad de los Ángeles, en 2011.

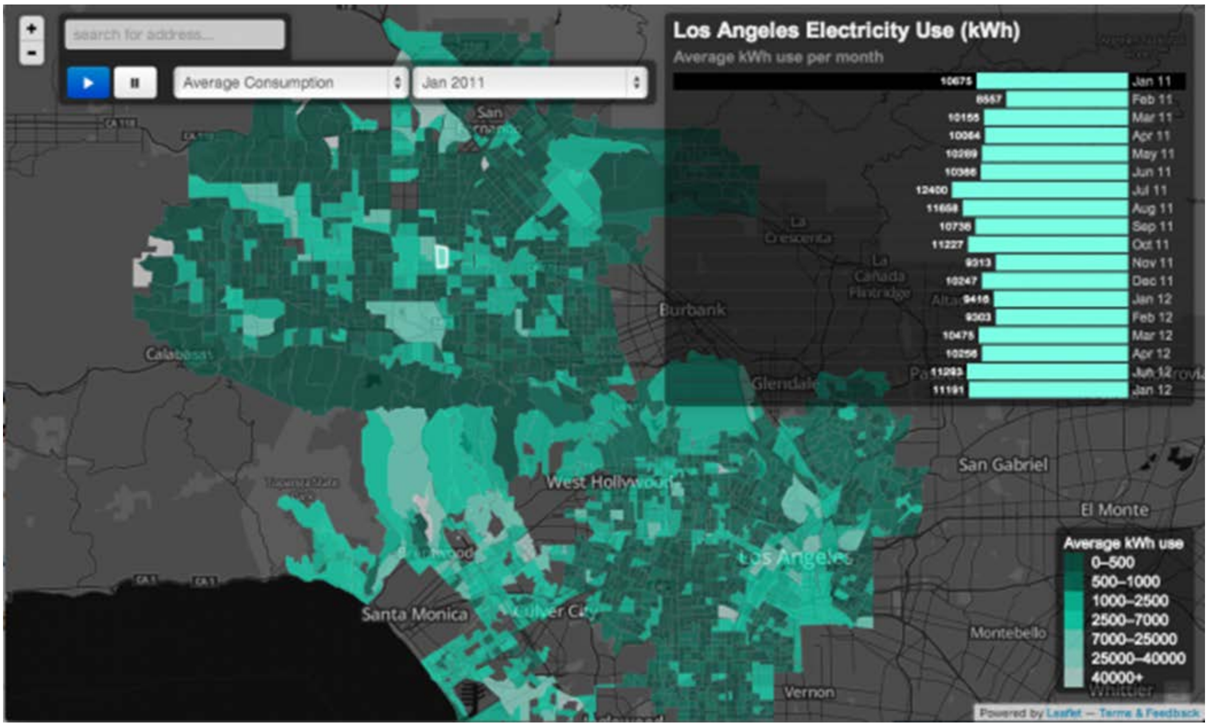
a) ¿Qué relación consideran que existe entre este mapa y la estadística?

b) ¿Qué utilidad les parece que pueden tener este mapa y otros similares? ¿Conocen alguna forma parecida de visualizar información?

c) ¿Cómo les parece que ha impactado el desarrollo tecnológico en el manejo y visualización de datos?

Figura 4. Mapa digital del consumo eléctrico de Los Angeles, California (enero de 2011).

Como ejemplo de una aplicación directa de la visualización de datos en un



aspecto netamente pragmático, como lo es un servicio de suministro eléctrico, invitamos a los alumnos a reflexionar sobre el abanico de opciones que abrió el desarrollo computacional en relación con las representaciones gráficas (Mente Creativa). Más aún, la posibilidad del análisis en tiempo real aumenta la velocidad en la toma de decisiones y resolución de eventos imprevistos, a la vez que alimenta la demanda social de soluciones inmediatas.

3.4 Actividad 4 (área: Historia)

Teniendo en cuenta, aspectos de la historia universal, si se analizan los posibles motivos del fracaso de las campañas napoleónicas hacia Rusia, el ingeniero civil Charles Maynard incorpora ingeniosamente cuatro variables en una única representación visual (Mente Sintética), publicada en 1869. En este gráfico poco convencional y multifacético podemos inferir que la mayor tasa de reducción en la cantidad de tropas es previa al impacto de la variable climática, contrario a la hipótesis dominante de la época de que el crudo invierno había sido la crucial causa de la derrota. De esta forma, mostramos a los estudiantes que la astuta integración visual de múltiples datos es más potente que la mera suma de las partes, lo cual puede sugerir hipótesis inesperadas, basadas en la evidencia (Mente Disciplinada).

El siguiente esquema fue realizado por el ingeniero civil Charles Minard en 1861, y representa las campañas de Napoleón Bonaparte hacia Rusia en los años 1812-1813.

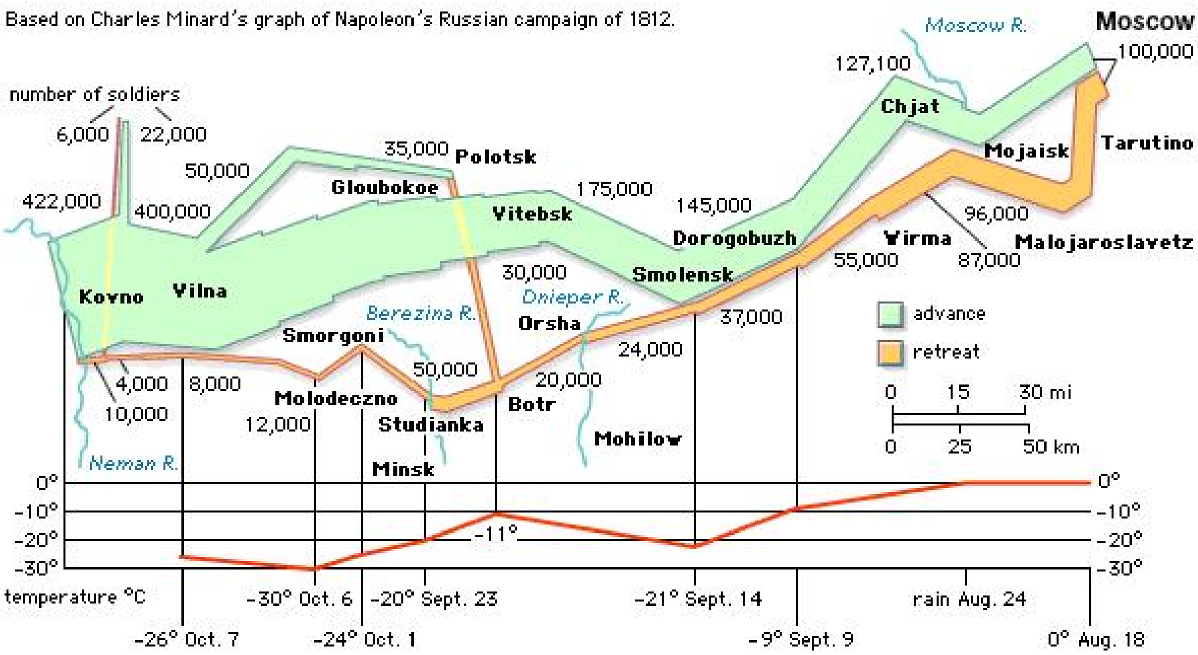
a) Según los conocimientos previos que ustedes tienen, ¿qué le sucedió a Napoleón y su Gran Armada en esta famosa campaña?

b) ¿Qué les parece que intenta comunicar Charles Minard a través de este gráfico informativo?

Figura 5. Adaptación del gráfico de Charles Minard (1861), sobre las campañas napoleónicas hacia Rusia.

3.5 Actividad 5 (área: Salud Global)

Miremos con atención el siguiente extracto del documental The Joy of Stats (BBC, 2010), en el que Hans Rosling nos muestra "las estadísticas en movimiento".



a) ¿Qué semejanzas y diferencias encuentran entre esta representación y aquella de Nightingale?

b) ¿Qué impacto creen que ha tenido el desarrollo de las tecnologías en las formas de representar y visualizar "las historias que los números tienen para contar"?

Figura 6. Captura de un extracto del documental *The Joy of Stats* (2010), por Hans Rosling. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=jbkSRLYSojo

En conjunto con su equipo técnico de la fundación *Gapminder*, el profesor Hans Rosling nos presenta estadísticas públicas en movimiento a través del tiempo, potenciando la comprensión de tendencias del desarrollo de los países de todas las regiones del mundo. A través de este instrumento interactivo (Mente Creativa),

abordamos con los alumnos temáticas de trascendencia para el campo de la Estadística: la influencia de la tecnología en el análisis y comunicación de las historias detrás de los números, las implicancias de los gráficos como resumen -y por ende pérdida- de información, y el acceso libre y global a los datos (Mente Ética y Mente Respetuosa).

3.6 Actividad 6 (área: Ciencias de la Comunicación)

En este caso presentamos dos situaciones posibles:

El siguiente recorte proviene de un artículo en The Daily Telegraph (julio de 2005) que intenta comparar las ventas de este diario frente a su principal competidor, The Times.

¿Pueden advertir cuál es la tergiversación en este gráfico? ¿Qué efecto/impacto tiene en los lectores?

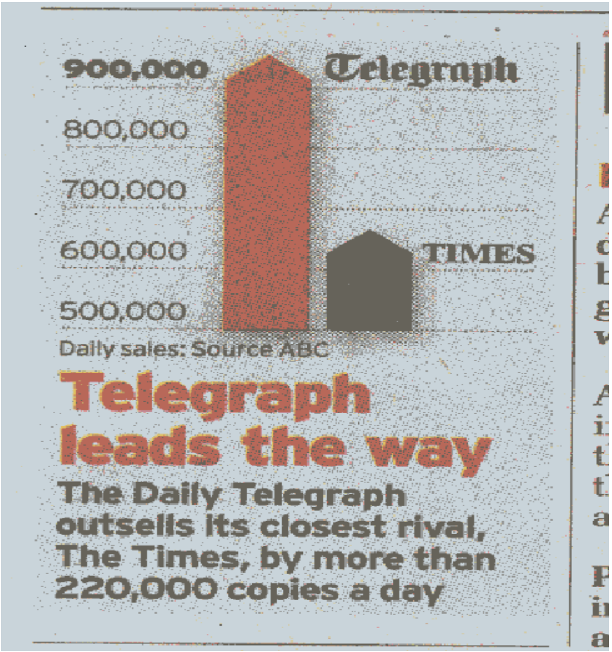


Figura 7. Recorte de un artículo periodístico de *The Daily Telegraph* (2005).

El siguiente recorte proviene de un artículo en Los Ángeles Times (agosto de 1979) que intenta mostrar la reducción del porcentaje de médicos dedicados a la medicina familiar, junto con una proyección hacia el futuro de la tendencia.

¿Pueden advertir cuál es la tergiversación en este gráfico? ¿Qué efecto/impacto tiene en los lectores?

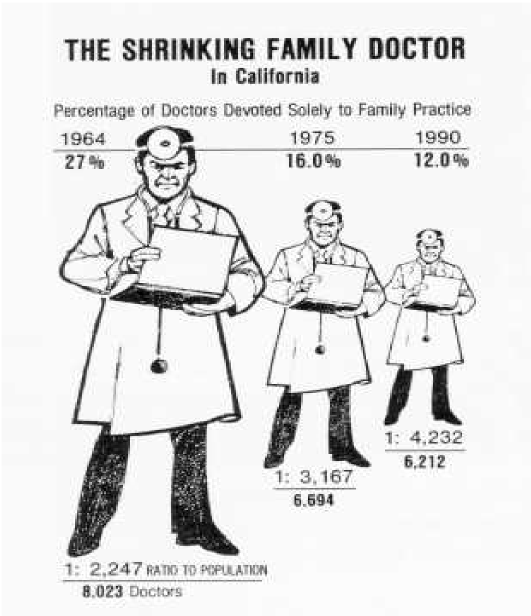
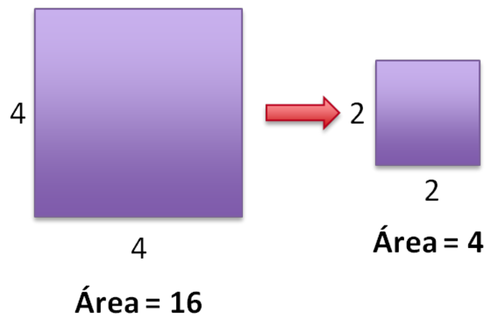


Figura 8. Recorte de un artículo periodístico de *Los Angeles Times* (1979).

En esta última parte de la secuencia didáctica discutimos con los alumnos algunos casos de tergiversación visual, tomando dos ejemplos de los medios masivos de comunicación escrita. En el primer artículo de 2005 del *Daily Telegraph*, se intenta comparar las ventas de este diario frente a su principal competidor, *The Times*, empleando un gráfico que posee un eje truncado que exagera la diferencia. En el segundo artículo de 1979 de *Los Ángeles Times*, se muestra la reducción del porcentaje de médicos dedicados a la medicina familiar, junto con una proyección hacia el futuro de la tendencia. Aquí la tergiversación es más sutil, pues se intenta demostrar la reducción de una única dimensión ("porcentaje") a través de una reducción proporcional de una imagen en dos dimensiones (representación del médico). Al representarse una reducción de una única dimensión en una imagen de dos dimensiones, la variación se torna mucho más impactante a los ojos del lector, como muestra el siguiente esquema:



Mediante estos casos podemos acercar a los estudiantes a un concepto cada vez más presente en la Estadística: la ética en la recolección y transmisión de datos (Mente Ética y Mente Respetuosa).

4. Resultados y Conclusiones

Al llevar adelante esta propuesta en el aula, los participantes se mostraron predispuestos a participar y debatir en base a las preguntas disparadoras alrededor de cada uno de los casos presentados. En el curso de grado de Bioestadística, más de la mitad se animó a compartir sus impresiones y reflexiones en torno a las visualizaciones y tergiversaciones mostradas en secuencia. Los alumnos debatieron sobre las propuestas realizadas bajo una modalidad de aula-taller, mostrando interés en la discusión sobre temas ajenos a la currícula. La secuencia didáctica fue introducida durante el desarrollo de la unidad sobre estadística descriptiva, que comprende representaciones gráficas y estimación puntual, y se encuentra en la transición entre la teoría de distribuciones y la estadística inferencial.

En las "Quintas Jornadas del Departamento de Matemática" del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", la totalidad de ellos debatió cada una de las representaciones e incluso transfirieron sus conclusiones a otros ejemplos y contextos disciplinares como la geografía, la política y la economía. En esta ocasión, la modalidad fue también de aula-taller. Al comienzo, los participantes se mostraron escépticos ante una propuesta diferente a las que estaban habituados, pero en el transcurso de la actividad mencionada, fueron modificando su visión en relación con la utilidad de este tipo de metodología y análisis de datos. Finalmente, estas diversas visiones les permitieron identificar la importancia y aplicabilidad de estas competencias en el marco de una cultura estadística en el siglo XXI.

En ambas situaciones la duración de la actividad fue de una hora, con breves minutos previos a la discusión de cada caso para que los participantes lo analizaran solos o de a pares. Consideramos que este tipo de estrategias pedagógicas abordan el contenido con un foco en los objetivos de aprendizaje que intentamos alcanzar para nuestros estudiantes: que logren una mirada crítica tanto desde la utilización como desde la interpretación de las representaciones gráficas en la Estadística Descriptiva. Sumadas a otras estrategias similares a lo largo del curso, puede ayudar a construir lo que Ron Ritchhart (2015) llama una “cultura de pensamiento” en el aula, haciendo visibles y transparentes las reflexiones que surgen en tal contexto.

En conclusión, la secuencia didáctica presentada en este trabajo resulta de utilidad para transmitir a los alumnos el impacto que puede tener la visualización de la información en nuestras opiniones y decisiones cotidianas y profesionales. La importancia cada vez mayor de la tecnología, de la ciencia y de los medios de comunicación en las sociedades modernas ha favorecido el desarrollo de la comunicación visual en forma vertiginosa. Una imagen vale más que mil palabras. De la misma manera, una imagen vale más que mil datos.

Bibliografía

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, M. (2011). *Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales*. *Números*, 76 (1), 55–67.

Bain, K. (2004). *What the best college teachers do*. Primera edición, Harvard University Press. Estados Unidos.

Bain, K. (2012). *What the best college students do*. Primera edición, Harvard University Press. Estados Unidos.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Primera Edición, Gedisa. Barcelona.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Tercera edición (2011), Basic Books. Estados Unidos.

Gardner, H. (2008). *Five minds for the future*. Primera edición, Harvard Business Press. Estados Unidos.

Perkins, D. (1992). *Smart schools*. Primera edición, The Free Press. Estados Unidos.

Ponteville, C. (2014) *¿Para qué enseñamos Estadística? Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27(1) 517-525.

Ponteville, C., Núñez, M., Granchetti, H., Reynoso, M., Seifert, E. (2014). *Enseñar Bioestadística en carreras de Ciencias de la Salud*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27(1), 1265-1271.

Ritchhart, R. (2015). *Creating cultures of thinking*. Primera edición, Jossey-Bass. Estados Unidos.

Autores:

Granchetti, Hugo. Farmacéutico (Universidad de Buenos Aires). Ayudante de Primera, Cátedra de Matemática, Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires. hgranchetti@ffyb.uba.ar

Ponteville, Christiane. Magister en Ciencias en Matemática Educativa (Instituto Politécnico Nacional, México). Profesora Adjunta, Cátedra de Matemática, Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires.

Nuñez, Myriam. Licenciada en Matemática. Doctora en Farmacia y Bioquímica (Universidad de Buenos Aires). Profesora Titular, Cátedra de Matemática, Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 250-262

La Geometría en la Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática

Cinthia del Carmen Humbría Burgo, Fredy Enrique González

Resumen	El presente artículo tiene como propósito analizar el tratamiento dado a la geometría en los libros de texto que son editados y usados como material de apoyo en los cursos dictados en la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Estudio documental, de carácter no experimental. Se identificaron las características didácticas predominantes en los libros de texto analizados, encontrándose que los libros son escritos por los autores siempre buscando trasmitir lo sencillo, bonito y las diversas aplicaciones del tópico de Geometría, sin olvidar el espíritu de la enseñanza de la Matemática. **Palabras clave**: Libros de texto, Geometría, Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática
Abstract	This article aims to analyze the treatment given to geometry in textbooks that are edited and used as support material in the courses taught at the Venezuelan School for Teaching Mathematics. Documentary study, non-experimental. The didactic characteristics predominant in the analyzed textbooks were found, and the books are written by the authors, always seeking to transmit the simple, beautiful and diverse applications of the topic of Geometry, without forgetting the spirit of the teaching of mathematics. **Keywords**: Textbooks, Geometry, Venezuelan School for Teaching Mathematics
Resumo	Este artigo tem como objetivo analisar o tratamento dado livros de geometria que são editadas e usadas como material de apoio em cursos na Escola Venezuelana de Educação Matemática. Estudo documental, não numa base experimental. as características didáticas predominantes foram identificados nos livros didáticos analisados, descobrindo que os livros são escritos por autores sempre à procura transmitir as aplicações simples, belas e diversificadas da Geometria tópica, sem esquecer o espírito do ensino de matemática. Palavras-chave: Livros didáticos, Geometria, Escola Venezuelana de Educação Matemática

1. Introducción

La Escuela Venezolana de Enseñanza de la Matemática (en lo adelante, EVEM) es un evento de carácter científico que anualmente, durante el mes de septiembre, se realiza en Venezuela; su primera edición tuvo lugar en 1997, en Mérida, capital del estado andino del mismo nombre; es promovido por miembros de la comunidad venezolana de educadores matemáticos adscritos a la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA), situada en la ciudad antes mencionada.

La EVEM surgió con el propósito buscar mecanismos alternativos de transformación de la educación venezolana, emergentes a partir de la acción de los propios educadores, desarrollando una dinámica creativa y renovadora; con miras a mejorar la formación de los docentes de matemática, tanto en Matemática como en su didáctica; suscribiendo la premisa según la cual, para mejorar la formación matemática de los ciudadanos venezolanos, es imprescindible el mejoramiento, tanto disciplinar como académico, de los docentes que enseñan esta asignatura en los niveles primario y secundario del sistema educativo nacional. Para ello, es necesario reflexionar sobre los mecanismos que permitan la integración de la matemática en las actividades de la vida cotidiana, el desarrollo de competencias para la resolución de problemas en diferentes campos, la realización de actividades de motivación, y la capacitación de los profesores que enseñanza matemática en los diferentes niveles educativos, particularmente en la educación básica y preuniversitaria.

Hasta 2017 se han llevado a cabo veinte (20) ediciones de la EVEM; desde su génesis misma, ha sido un escenario propicio para el encuentro, fraternal y mutuamente enriquecedor, entre los profesores de Matemática de diversas procedencias geográficas, organizacionales e institucionales que cuentan con una profunda formación académica y una amplia trayectoria profesional, y sus pares más jóvenes, docentes que recién inician su desempeño laboral, y estudiantes para profesor de Matemática, tanto de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) como de las escuelas de educación de diversas universidades venezolanas, públicas y privadas.

Así, la EVEM se ha convertido en un espacio para el intercambio de ideas, opiniones y pareceres relacionados con aspectos cognitivos y epistemológicos de la más variada naturaleza, relativos a las diversas áreas de la Matemática y su correspondiente didáctica.

Las principales actividades que propician la interacción entre los asistentes a la EVEM son Conferencias Inaugurales, Charlas a cargo de invitados especiales, talleres y cursos; estos últimos constituyen su aspecto central y esencial. Para cada uno de los cursos que se ofrecen en la EVEM, el docente encargado de facilitarlo debe producir un libro de texto que sirva de guía y soporte a su desarrollo.

Los textos que sirven de base a los cursos dictados en la EVEM abarcan prácticamente la totalidad de las áreas fundamentales de la Matemática y se han convertido en un valioso material, útil no sólo para los participantes en las actividades de la EVEM, sino también para los demás profesores de Matemática (tanto quienes están en servicio como los que están estudiando para serlo) que tienen acceso a los mismos; entre sus características más relevantes se pueden mencionar las siguientes:

- Son elaborados ad hoc, es decir, son producidos especialmente para el curso en el cual serán usados
- Sus autores son docentes que gozan de reconocido prestigio y autoridad académica en el seno de la comunidad venezolana de educadores matemáticos
- Constituyen el material didáctico esencial sobre el cual se sustentan los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en los cursos, puesto que incluyen tanto el contenido disciplinar previsto en el curso como las tareas, ejercicios y problemas que los participantes han de llevar a cabo durante el mismo.

Cada curso se dicta durante dos ediciones consecutivas de la EVEM y, en caso de ser solicitado por los participantes, se puede dictar una vez más; por ello, de algunos de los libros se cuenta con dos o tres ediciones; es conveniente anotar que las ediciones más recientes incluyen mejoras en relación con las ediciones anteriores.

Así que, teniendo en cuenta que en Venezuela, una de las áreas de la Matemática que más deficiencias, en cuanto a rendimiento, que presentan los estudiantes de los niveles primario y secundario, es Geometría, de los ciento trece (113) libros que, desde 1997, han sido editados por la EVEM, veinte (20, 18%) han sido dedicados a Geometría (Ver Tabla 1).

Año	Título	Autor	Institución de Adscripción
1997	Trigonometría.	Olga Porras	Universidad de los Andes, ULA
2000	Trigonometría.	Diomedes Bárcenas	ULA
2001	Trigonometría.	Diomedes Bárcenas	ULA
2001	Geometría.	Darío Durán	La Universidad del Zulia, LUZ
2002	Geometría.	Darío Durán	LUZ
2003	Temas de Geometría.	Darío Durán	LUZ
2006	Inteligencias Múltiples y Enseñanza de Geometría.	Yamilet Quintana	Universidad Simón Bolívar (USB)
2007	Inteligencias Múltiples y Enseñanza de Geometría.	Yamilet Quintana	Universidad Simón Bolívar (USB)
2007	Geometría: Problemas Olímpicos.	Darío Durán	LUZ
2008	Geometría con Regla y Compás.	José Soto	ULA
2009	Geometría con Regla y Compás.	José Soto	ULA
2010	Trigonometría	Heber Nieto	LUZ
2010	Teorema de Pitágoras.	Bladismir Leal	ULA
2011	Trigonometría	Heber Nieto	LUZ
2013	Geometría: Aplicaciones.	Tomás Guardia	Universidad Central de Venezuela, UCV

2013	Pitágoras: Su Escuela.	Douglas Jiménez	Universidad Experimental Politécnica, UNEXPO-Lara
2013	Semejanza en Geometría.	Bladismir Leal	ULA
2014	Pitágoras: Su Escuela.	Douglas Jiménez	Universidad Experimental Politécnica, UNEXPO-Lara
2014.	Geometría	Darío Durán	LUZ
2015	Aula Geométrica	Yazmary Rondón	ULA
2016	Aula Geométrica	Yazmary Rondón	ULA

Fuente: Datos de la Investigación. Obsérvese la reiterada presencia del Dr. Darío Durán

Tabla 1. Libros dedicados a Geometría producidos en la EVEM

En el estudio aquí reportado, el interés se centró en el tratamiento que se da a la Geometría en los libros de texto editados en la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática en el lapso 1997-2016, mostrados en la Tabla 1, tomando en cuenta los siguientes aspectos:

1. Características físicas de tipo educativo y motivacional;
2. Criterios pedagógicos y didácticos tomados en cuenta en su edición;
3. Uso de la resolución de problemas;
4. Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en función de los siguientes elementos:
   4.1. Elementos que se han tomado en cuenta;
   4.2. Aspectos necesarios en su desenvolvimiento;
   4.3. Direccionalidad de la enseñanza
   4.4. Aportes al estudiantado.

2. Marco Conceptual

Los libros de texto se caracterizan por ser un apoyo sobre el cual se sustenta lo aprendido en clase; se acude a este material didáctico impreso como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para complementar lo estudiado o realizar una tarea asignada; de igual forma, el docente lo usa como guía en su planificación diaria acorde a los programas educativos, de ahí la importancia que se les atribuye como elemento integrante de dichos procesos.

Además, se considera que estas publicaciones señalan las soluciones inherentes al tema; sugieren diferentes actividades y, a su vez, posibles formas de evaluar el contenido correspondiente. Son un recurso al que se puede acceder tanto en el aula como fuera de ella, realizando estudios independientes, donde no se cuente con las correcciones inmediatas de un docente; por esto, deben manejar cuidadosamente, la información y evitar dar paso a definiciones ambiguas, sin calidad formativa.

Pinto (2013) sostiene que:

> El libro de texto debe presentar los contenidos organizados, partiendo de los conocimientos previos, que se deban adquirir y permitan la incorporación de saberes más complejos. Así mismo, hace posible ver diferentes vías para la comprensión del objeto matemático en estudio. Además, promover la capacidad inventiva; también, captar la atención a través de su modelo estructural; la interacción con otros recursos de apoyo educativo y, finalmente, proponer asignaciones que generen en el alumno la retroalimentación en su proceso de adquisición de conocimiento. (p. 9)

Se puede afirmar que, el libro de texto constituye un recurso de apoyo básico para el docente, quien recurre a este medio como una herramienta fundamental en su desempeño en el aula. Por tal motivo, sus contenidos deben ser fidedignos, precisos, claros, didácticos y con un alto valor pedagógico, de modo que sean accesibles al análisis, comprensión y entendimiento por parte del alumnado, como lo afirma Restrepo (1999):

> El éxito de la relación texto-alumno, se da en la medida que los contenidos que el texto involucra sean accesibles desde la didáctica al lector o usuario, el cual debe interrelacionar de manera individual con el texto. De ahí la importancia de conocer algunos conceptos de didáctica. (Restrepo, 1999, p. 74).

Por lo tanto, en un libro de texto la disposición de los objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, materiales y recursos, debe atender y estar en concordancia con las necesidades de cada nivel educativo y, al mismo tiempo, crear oportunidades para que el estudiante/lector pueda desarrollar su pensamiento crítico y tenga opción para formular preguntas y analizar diferentes puntos de vista.

En el análisis de los libros de textos utilizados en los Cursos de Geometría desarrollados en la EVEM, fueron considerados: (a) sus aspectos formales, tomando en cuenta los planteamientos Ballesta (1995); y (b) el tratamiento dado a los problemas en función de lo que al respecto plantea González (1995).

En relación con las características formales que debe poseer un libro de texto, Ballesta (1995) señala las siguientes:

1. Secuenciar adecuadamente los contenidos:
2. Favorecer la reversibilidad del pensamiento:
3. Estimular la creatividad del lector:
4. Poseer un diseño atractivo:
5. Posibilitar su uso en combinación con otros materiales curriculares:
6. Contener actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes, potenciando la autoevaluación por los usuarios

En cuanto a la noción de Problema, se adoptó la que expone González (1995), quien afirma que el término problema puede concebirse como sinónimo de la dificultad que se le presenta a alguien cuando se le plantea una interrogante, una tarea, o alguna otra exigencia y, al mismo tiempo la persona, en ese momento, no posee la respuesta o el procedimiento que le permitiría responder la pregunta o realizar con éxito la tarea.

Según este autor las características que deben estar presentes en la resolución de problemas en los libros de texto, son las siguientes: (a) los planteamientos deben estar bien especificados; (b) el proceso de búsqueda de su solución debe propiciar la vinculación con las experiencias y conocimientos previos del potencial resolutor, así como también, estimular su creatividad, intuición, capacidad analítica y la transferencia de aprendizaje.

3. Marco Metodológico

El estudio consistió en un análisis de parte de la producción científica generada en el marco de la EVEM, un evento orientado a la formación complementaria de profesores que enseñan Matemática, o estudiantes para profesor de esta asignatura, que se realiza en Venezuela desde 1997, por ello, su diseño contempló dos elementos: (a) Selección del Corpus Analítico, y (b) Definición del Procedimiento para efectuar el análisis.

Corpus Analítico

Como se indicó en la Tabla 1, a lo largo de su existencia (1997-2016), en las veinte ediciones de la EVEM se han producido 113 libros de texto, de éstos 20 están dedicados a Geometría; los investigadores tuvieron acceso directo a nueve de estos últimos, los cuales constituyeron el corpus de análisis del presente estudio.

Procedimiento Analítico

Para realizar el análisis de los nueve libros constituyentes del Corpus, se tomaron en cuenta las categorías propuesta por Pinto y González (2013), quienes consideran que el análisis de un libro de texto debe incluir los siguientes aspectos:

1) **Fenomenológico**: fenómenos intra o extra matemáticos (sociales, culturales, históricos, entre otros); a los cuales, directa o indirectamente, se hace referencia en el texto.
2) **Representacional**: tiene que ver con los modos expresivos (textual, icónico, gráfico, tabular, ideográfico, simbólico, conjuntista, diagramas, ilustraciones, esquemas y mapas). que son usados para denotar, designar a las entidades (objetos o procesos) matemáticas que son aludidas en el libro.
3) **Cognitivo**: este aspecto hace referencia a los procesos de pensamiento (básicos, intermedios o globales) generales o matemáticos específicos (deducción, inducción, demostración, inferencia) que han de ser puestos en juego para llevar a cabo las actividades contempladas en el libro: ejercicios, problemas, o tareas de cualquier otra naturaleza
4) **Contextual:** Remite a las situaciones, sociales o naturales, en cuyo seno tienen lugar las acciones a las que se hace referencia en los planteamientos de problemas o ejercicios incluidos en el libro, y que han

de ser tratadas con alguna noción matemática, lo cual podría asumirse como indicio de su comprensión o interpretación:

5) **Histórico:** Hace alusión a las circunstancias, intra o extra matemáticas, en las que se ha producido el surgimiento, evolución, desarrollo y situación actual de los objetos matemáticos mencionados en el libro.
6) **Conceptual**: tiene que ver con la modalidad utilizada para la introducción de las entidades matemática tratadas en el libro: *Definición Sustantiva* (se refiere al qué de la entidad); *Definición Procedimental* (hace referencia a las operaciones que hay que ejecutar para obtenerla); Definición Icónica: imágenes, ideogramas, o símbolos usados para referirse a la entidad.

Instrumentos

Para el registro de la información se diseñaron y aplicaron:

a) *Listas de Cotejo*, para indicar la presencia o ausencia de los rasgos, considerados de interés, manifiestos en los libros de texto analizados
b) *Fichas*, elaboradas *ad hoc* para el presente estudio. En este sentido, se diseñó un tipo de ficha que recogiera los datos fundamentales del libro de texto, así como: Código/ Portada/ Datos de Referencia/ Número de Ediciones/ Dimensiones/ Número de Páginas

Fases del Estudio

1. Revisión documental: permitió el conocimiento de los aspectos históricos relacionados con los protagonistas de la fundación de la EVEM, así como también aspectos generales de su desarrollo, evolución y consolidación
2. Conformación del Corpus del Estudio: se obtuvieron sendos ejemplares de nueve de los veinte libros de texto, relativos a Geometría, utilizados en la EVEM.
3. Aplicación de los instrumentos a los nueve libros constitutivos del Corpus
4. Análisis de Información: revisión de la información registrada tanto en las listas de cotejo como en las fichas, a los fines de precisar la presencia o ausencia de las características que, según Ballesta (1995) deben poseer los libros de texto.
5. Elaboración de Conclusiones y Recomendaciones.

4. Resultados

4.1 Corpus del Estudio

Los libros que conforman el Corpus son los que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Libros constitutivos del Corpus de análisis del Estudio

Código	Portada	Datos de Referencia	Dimensiones / Nº de Págs.
L1		Olga Porra, (1998) Trigonometría Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	21cm.x 15.2cm./65
L2		Darío Durán, (2004) Temas de Geometría. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.	25.9cm.x 20.5cm./108
L3		Yamilet Quintana y Malatesta Sista, (2006) Inteligencias Múltiples y Enseñanza de Geometría. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	25.9cm.x 20.5cm./64
L4		Darío Durán, (2007) Geometría. Problemas Olímpicos Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	25.9cm.x 20.5cm./112
L5		José Soto, (2008) Geometría con Regla y Compás. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	25.9cm.x 20.5cm./111
L6		Heber Nieto, (2010) Trigonometría. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	21cm.x 15.2cm./97
L7		Bladismir Leal, (2010) Teorema de Pitágoras. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	21cm.x 15.2cm./94
L8		Tomás Guardia, (2013) Geometría: Aplicaciones. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	21cm.x 15.2cm./89

Tabla 2: Libros constitutivos del Corpus de análisis del Estudio (continuación)

Código	Portada	Datos de Referencia	Dimensiones / Nº de Págs.
L9		Yazmary Rondón, (2016) Aula Geometría. Mérida – Venezuela Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática	21cm.x 15.2cm./54

Fuente Datos de esta Investigación, 2017.

4.2 Características Didácticas de los libros de texto

Para identificar las características didácticas predominantes en los libros de texto se consideraron los criterios de Ballesta (1995) y los resultados se muestran en la Tabla 3

Tabla 3: Características Didácticas de los libros constitutivos del corpus (Ballesta, 1995)

N°	Características Formales	Libros de Texto								
	Características Didácticas	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9
1	Secuenciar los contenidos	S	S	S	S	S	S	S	S	S
2	Reversibilidad del pensamiento	S	S	S	S	S	S	S	S	S
3	Creatividad	N	S	S	S	S	S	S	S	S
4	Diseño atractivo	N	S	S	S	S	S	S	S	S
5	Combinación con otros materiales Curriculares	N	N	S	N	S	N	N	N	S
6	Actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes.	N	S	S	N	S	N	N	N	S

Fuente: Datos de esta Investigación, 2017. S = Presencia; N = Ausencia

4.3 Tratamiento dado a problemas en los libros de texto

Tabla 4 Caracterización de la presencia de la resolución de problemas (González, 1995)

N°	Características Formales	Libros de Texto								
	Resolución de Problemas									
1	Planteamiento del Problema	S	S	N	S	N	N	S	N	S
2	Transferencia de Aprendizaje	S	S	N	S	S	N	S	N	S
3	Capacidad Analítica	S	S	N	S	S	N	S	N	S

Nota. Datos de esta Investigación, 2017. S = Presencia; N = Ausencia

4.4 Análisis de los libros de texto según el Modelo de Pinto y González (2013)

Los resultados de la aplicación del Modelo de Pinto y González (2013) se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5: Análisis de los libros de texto según Modelo Pinto y González (2013)

N°		Libros de Texto								
	Aspecto	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9
1	Fenomenológico	S	S	S	S	S	S	S	S	S
2	Representacional	S	S	S	S	S	S	S	S	S
3	Cognitivo	N	S	S	S	S	S	S	S	S
5	Contextual	N	N	S	N	S	N	N	N	S
6	Histórico	N	S	S	N	S	N	N	N	S
7	Conceptual	S	S	S	S	S	S	S	S	S

Fuente: Datos de esta Investigación, 2017. S = Presencia; N = Ausencia

5. Hallazgos

Estructura de los Libros de Texto

Básicamente la estructura que siguen los libros de la escuela son:

1) Comienzan con un resumen o introducción la cual procura involucrar al participante en las actividades y en el contenido del libro.

2) Algunos de los libros presentan el contenido desglosado en un índice general; incluyendo también un prefacio.

3) Posteriormente el contenido es separado por capítulos, presentan entre sus actividades problemas matemáticos ya resueltos y algunos de demostración, así como también un cúmulo de problemas propuestos, para que el participante complemente su aprendizaje, con la resolución de dichos problemas.

Cabe mencionar que los libros de texto poseen un contenido sustancioso y provechoso para su uso como material de apoyo para aquel docente que lo quisiera utilizar en su labor.

Aspectos Formales de los Libros de Texto

Respecto a los aspectos formales, empleados en los libros de texto, se tiene que:

1) Predomina la definición, los ejemplos, los problemas y los ejercicios; de igual manera, se determinaron que carecen de conceptos, teoremas y corolarios. Sin embargo, se tienen detalles de lenguaje.
2) Es escasa la relación con otras áreas.
3) La relación con el mundo real, son eventos ficticios, debe mejorarse al respecto, para que así sean producto de su contexto, como una propuesta de parte del libro texto, bajo una orientación, donde en el aula, se induzca al surgimiento de situaciones reales.
4) Hay gran diversidad de exploración gráfica y numérica.
5) No hay presencia de dibujos a mano alzada en los libros de Geometría, sin embargo en algunos de los libros se visualizan dibujos con el uso de programas tecnológicos para contenido geométrico.
6) En relación al desarrollo histórico del tema, hay libros donde es muy escaso el espacio que se dedica al respecto, lo cual parece un aspecto deficiente de dichos libros; ya que es importante acentuar la trascendencia de un contenido matemático, sin embargo el libro (L9) es dedicado gran parte al tema de la Historia de la Geometría.
7) La utilización de materiales didácticos, se observó en pocas situaciones, es importante tener en cuenta este aspecto que permite llegar, aún más, hacia el propósito del contenido de una manera creativa y motivadora.

Acciones Didácticas

En cuanto a las acciones didácticas que predominan en los libros de texto, se observó que:

1) Predomina la secuencia en los contenidos, permitiendo así, la continuidad en los temas a estudiar.
2) Poseen creatividad en su estructura, presentando actividades de evaluación de conocimientos, procedimientos y actitudes, a través de problemas propuestos por él autor.

Fundamentos Históricos

En cuanto a los fundamentos históricos los autores de los libros, hacen mención a la forma como la Geometría ha evolucionado a través de los tiempos; las situaciones y problemas que originaron su estudio y desarrollo, y fundamentalmente la discusión didáctica de los procesos involucrados y resultados obtenidos. Esto con el objetivo, de presentar una visión más cercana de la realidad de los matemáticos de la antigüedad y promover su valoración como recurso no memorístico que puede llevarse al aula de clases y brindar la oportunidad de descubrir las propiedades de las figuras geométricas y que durante mucho tiempo han atraído a distintas civilizaciones.

6. Reflexiones Finales

- ✓ Con base en todo lo antes expuesto, se cuenta con indicios que permiten sostener, con relativa firmeza, la afirmación de acuerdo con la cual la Educación Matemática en Venezuela está en tránsito hacia su consolidación como campo disciplinario; la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática (EVEM) es uno de los indicios de esa consolidación.
- ✓ La EVEM es un espacio para la Educación Matemática venezolana, dedicado a la Matemática, en el que se dan cita los docentes con sus experiencias en el aula, sus inquietudes por conocer más y sus preocupaciones por la didáctica, tanto a nivel básico como universitario, es un evento educativo que año tras año cobra mayor fuerza y en donde se reúnen todos docentes de todo el país interesados en mejorar la formación en Matemática de los ciudadanos venezolanos.
- ✓ Asimismo, la EVEM brinda oportunidades de formación complementaria a los educadores matemáticos venezolanos, puesto que comprende la función del docente en el aula y su necesidad de educar con base en una buena preparación matemática, por ello ofrece a la comunidad de educadores matemáticos un espacio permanente para la innovación de ideas y procesos de enseñanza, incentivando siempre su papel protagónico y participativo en la enseñanza de la matemática para aquellos que se interesan por mejorarse académicamente y por actualizarse para estar a la par en su labor docente. Sin duda es un modelo a seguir y valdría la pena que más universidades nacionales pensaran que es a este tipo de esfuerzo al que deben estar dirigidos los recursos.
- ✓ Año tras año la EVEM ha organizado este tipo de evento siempre con el sumo cuidado de cada detalle, entre ellos la edición de los libros de texto siendo el material de apoyo de cada curso que la escuela ofrece. Se puede mencionar que los libros de texto editados y usados en la EVEM son el resultado de varios años de reflexión de sus autores como docentes; orientando los libros en dos direcciones, una en la formación de futuros profesores de Matemática y la otra en la formación complementaria de los docentes de Matemática en ejercicio, es por ello que cada libro se edita de forma tal, que el lector pueda ir tomando herramientas y razonando sobre los fundamentos históricos, didácticos y curriculares de la Geometría.
- ✓ En el caso particular de los autores de los libros de texto de Geometría, editados por la EVEM, se busca rescatar el valor histórico y didáctico de las construcciones de regla y compás, como medio de comprensión y comprobación de propiedades geométricas, además de la interacción (estudiante – objeto geométrico) mediante diversos recursos tangibles (regla y compás) o digitales (uso de software), donde la Geometría dinámica se convierta en una fortaleza para la construcción de conceptos, establecimiento de relaciones y visualización de los cambios que ocurren en las figuras geométricas al modificar alguna de sus condiciones iniciales.

Bibliografía

Ballesta, J. (1995). *Función Didáctica de los Materiales Curriculares*. [En línea]. Recuperado el 13 de octubre de 2013, de http://dewey.uab.es/pmarques/EVTE/matcurri.doc.

González, F. (1995). *El Corazón de la Matemática.* Serie Temas de Educación Matemática. Parte Tres. Maracay: Copiher.

Maletta, H. (2009). *Epistemología Aplicada: Metodología y Técnica de la Producción Científica.* Lima: Consorcio de Investigación Económica y Social (CIES), Centro Peruano de Estudios Sociales (CEPES), Universidad del Pacífico Centro de Investigación.

Pinto, E. & González. F. (2013). Tratamiento Didáctico dado a las Ecuaciones Lineales en los Libros de Texto de Matemática de Séptimo Grado: 1987-2007. *Revista UNION, 35; 177 – 201.* [En Línea]*. Recuperado el 01 de enero de 2015, de* http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo15.pdf.

Autores:

Primer autor: Cinthia del Carmen Humbría Burgos. Ingeniero Civil. Docente adscrita al Departamento de Física y Matemática de la Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda (UNEFM) desde 1999. Especialista en Enseñanza de la Matemática egresada de esta casa de estudios desde el 2008. Participante del Doctorado en Educación Matemática de la UPEL-Maracay. Conferencista/Ponente/ Participante en eventos regionales, nacionales e internacionales. Jurado/Tutora de Trabajos de Grado en la Especialización en Enseñanza de la Matemática de la UNEFM. cindyjoce@gmail.com

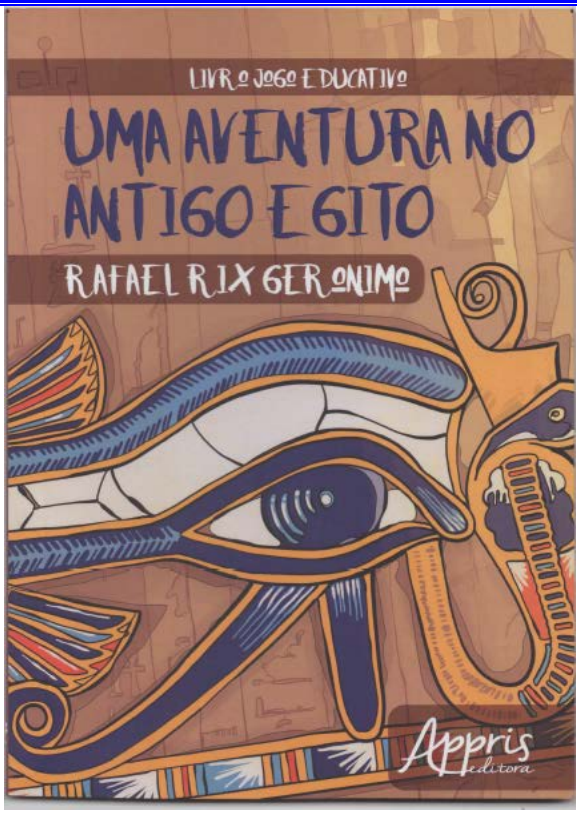
Segundo autor: González, Fredy Enrique. Doctor en Educación, Master en Matemática, y Profesor de Matemática y Contabilidad; (Instituto Pedagógico de Caracas, 1974); formador de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador; Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM); coordinador del Proyecto de Historia Social de la Educación Matemática en América Latina (HISOEM-AL). Ha sido profesor invitado en diferentes universidades latinoamericanas; ha publicado artículos y libros dedicados a la Educación Matemática, publicados en Estados Unidos, Italia, y Brasil; y dictado conferencias, cursos, y talleres sobre enseñanza de la Matemática en SA y varios países **máximo)**latinoamericanos y europeos. fredygonzalezdem@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 263-264

Reseña del Libro: Uma Aventura no Egito

Antonio Carlos Brolezzi



Geronimo, Rafael Rix. Uma aventura no antigo Egito.
Curitiba: Appris, 2017

Uma aventura no antigo Egito é um livro que traz, além de um interessante jogo em forma de RPG – Role Playing Game, uma importante reflexão acerca do ensino de matemática, com ênfase no papel da história da matemática e do uso de jogos em sala de aula.

Baseado na experiência que gerou a dissertação de mestrado do autor, apresentada na PUC-SP em 2011, o livro traz um jogo completo, em que o personagem principal, jovem estudante da cidade de Gisé, no Egito, em torno do ano 1500 a.C., se envolve em aventuras por construções subterrâneas cheias de armadilhas e perigos. Para enfrentar cada desafio a sua frente, ele precisa resolver problemas matemáticos. A questão interessante aqui é que a proposta do jogo é que o participante utilize a técnica matemática da época, em que ainda não havia álgebra como hoje em dia se aprende nas escolas, com equações e incógnitas. Encontrar a quantidade desconhecida, aqui, está contextualizada na técnica matemática antiga, já conhecida no Egito Antigo, que hoje em dia se chama de método da falsa posição.

O método se encontra na lista de problemas e respectivas soluções que foram encontrados no papiro Rhind, documento histórico que se encontra no museu de Londres e que teria sido compilado pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a. C.

Embora o jogador possa utilizar qualquer técnica que deseje, o fato de o personagem ter acabado de sair de uma aula em que o método da falsa posição é explicado, de certo modo induz o raciocínio a seguir por este método. Ou seja, para entrar no personagem, o jogador se vê sugestionado a tentar pensar como ele pensaria com os conhecimentos da época.

Hoje em dia, nos anos finais do ensino fundamental, a álgebra costuma aparecer como um conjunto de regras para resolver equações, em que a quantidade desconhecida, a incógnita, é representada pela letra x e resolver problemas algébricos acaba se resumindo a encontrar o valor de x. Não é incomum que os alunos encontram valores para a incógnita que não tem nada a ver com o enunciado do problema, mas mesmo assim acreditam que o valor é correto pois foi obtido segundo as regras aprendidas, muitas vezes, com pouca reflexão.

Já pelo método da falsa posição, utilizado pelos antigos egípcios, deve-se passar inicialmente pela fase da conjectura, na qual se supõe que o problema tenha sido resolvido e tenha sido encontrada uma solução. A questão é verificar se essa solução é válida, dada para uma equação, e então corrigi-la até que se encontre a solução verdadeira. Desse modo, o pensamento algébrico é mais mobilizado, e trabalha-se com a capacidade de conjecturar e fazer estimativas.

No jogo, esse método fica dado desde o início, de modo que se o aluno ainda não viu álgebra, pode participar do jogo por esse método, mas se já viu, pode optar por um dos dois métodos, ou ainda comparar as soluções dos dois métodos, o que é bastante interessante para o ensino de matemática.

Desse modo, o livro constitui-se em exemplo prático de como se pode trabalhar em sala de aula de matemática com jogos e com a história da matemática, de modo a tornar as aulas mais interessantes e divertidas. Afinal, aprender pode também ser uma aventura encantadora.

Antonio Carlos Brolezzi

Professor associado do Departamento de Matemática do IME-USP e orientador do programa de pós-graduação em Ensino de Matemática do IME.
brolezzi@ime.usp.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 265-271

Construcción de una caja rectangular de volumen máximo: Indagaciones geométricas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Zoila tiene una lámina rectangular de 36 cm por 27 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), de máximo volumen, que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la lámina? (No considerar solapas para las uniones)

Este problema surgió en un taller de creación de problemas con profesores de secundaria de la especialidad de matemáticas, pero se origina en un taller similar con profesores de primaria, teniendo como situación inicial únicamente el hecho de disponer de una lámina rectangular de las dimensiones dadas.

Como se verá en este artículo, se llega a proponer este problema luego de indagaciones geométricas que llevaron a otros problemas, partiendo de la situación inicial. Las socializaciones de los trabajos en grupo fueron fuente de nuevas indagaciones constructivas, tanto para llegar a la formulación del problema, como para las reflexiones sobre las soluciones que se iban encontrando.

Cabe mencionar que si bien estamos ante un problema de optimización que puede resolverse usando cálculo diferencial, inclusive considerando una función de tres variables y el método de los multiplicadores de Lagrange, las indagaciones no solo llevaron a una solución muy aproximada a la que se obtiene por tal método, sino que – como se muestra – llevaron a otra solución, que es fuente para nuevas indagaciones, preguntas y conjeturas.

Situación inicial y creación de problemas

Una de las formas de crear problemas es “dejando volar la imaginación matemática” a partir de una situación dada. En nuestro enfoque de creación de problemas, esta es una forma de crear problemas que llamamos “*por elaboración*”; en este caso, por elaboración libre. Ciertamente, la creación de problemas a partir de una situación dada, está muy relacionada con la indagación en matemáticas, pues ambas actividades conllevan el plantearse preguntas.

La situación que se propuso en un taller de creación de problemas, con profesores de primaria, fue la siguiente:

> *Zoila dispone de una lámina de cartulina en la cual está representado un rectángulo de 27 cm de ancho y 36 cm de largo.*

A continuación, algunos de los problemas que crearon los profesores de primaria, trabajando en parejas:

Prob. 1

Si la región rectangular dibujada representa el piso de un patio, en una escala de 1/100, ¿cuáles serán las dimensiones de las losas cuadradas más grandes que se usen sin partir, para embaldosar el patio?

Prob. 2

¿Cuánto debo aumentar al ancho y disminuir al largo del rectángulo representado para obtener un cuadrado del mismo perímetro que tal rectángulo?

Prob. 3

¿Cuánto debo añadir al ancho y quitar al largo del rectángulo dibujado para obtener un cuadrado cuya área sea la misma que la de tal rectángulo?

Prob. 4

¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la región rectangular mostrada en la lámina?

El problema 4 está muy relacionado con el problema propuesto al inicio de este artículo y le prestamos especial atención. En la sesión con profesores de primaria, la primera idea que surgió para resolverlo fue la de formar un cubo, e hicieron su diseño, como se muestra en la figura 1

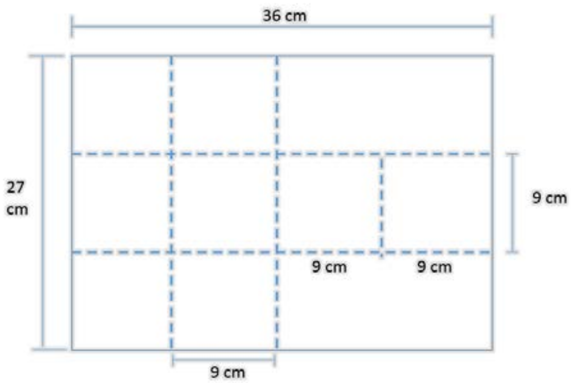


Figura 1

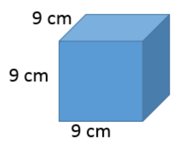


Figura 2

Tal diseño corresponde al cubo que mostraron en un dibujo como el de la figura 2. Resulta evidente que el volumen de tal cubo es

$$(9\text{cm})^3 = 729\ \text{cm}^3.$$

Indagaciones geométricas

Indagando otras posibilidades de construcción de la caja con tapa, en trabajo intergrupal propusieron otro diseño, como el que se muestra en la figura 3, que corresponde a la caja mostrada en la figura 4, cuyo volumen es

$$(19 \text{ cm})\text{x}(14 \text{ cm})\text{x}(4 \text{ cm}) = 1064 \text{ cm}^3$$

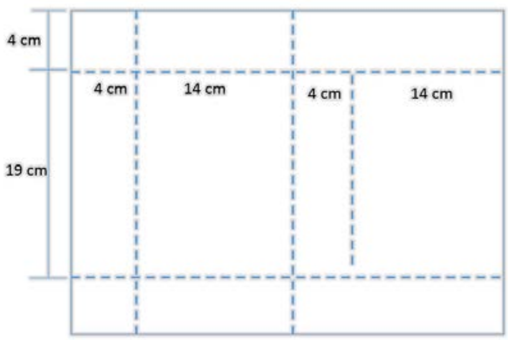


Figura 3

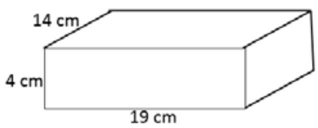


Figura 4

Al advertir, en la socialización amplia, que el volumen de esta caja es mayor que el volumen del cubo, surgió la pregunta: ¿será posible construir otra caja con mayor volumen? Se pasó entonces a la búsqueda del diseño y un grupo obtuvo el que se muestra en la figura 5, que corresponde a una caja cuyo volumen es

$$(17 \text{ cm})\text{x } (13 \text{ cm}) \text{ x } (5 \text{ cm}) = 1105 \text{ cm}^3$$

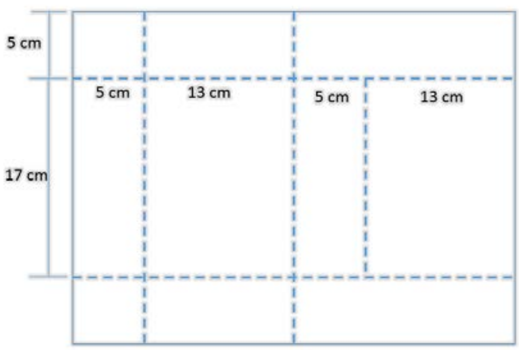


Figura 5

Entonces, de manera natural, surgió la pregunta sobre la existencia de otro diseño sobre la misma lámina rectangular, con el cual se pudiera construir otra caja de mayor volumen. Los intentos no tuvieron éxito.

Quedó claro que no había una respuesta única a la pregunta formulada en el Prob. 4. La respuesta podría ser única si se pide la construcción de la caja con tapa de máximo volumen. Hice notar que todos los intentos para diseñar esa caja fueron considerando solo números enteros (obviamente positivos) y que no había razón para descartar los números racionales; y en una perspectiva matemática, considerar inclusive los números irracionales. Una profesora usó el diseño de la figura 5 y propuso las dimensiones 18 cm y 13,5 cm para la base rectangular y 4,5 cm para la altura, pero se verificó que el volumen correspondiente es 1093.5 cm^3, que no es mayor que el obtenido. También comenté que así tenemos ya un problema de optimización matemática y que hay formas de resolverlo usando el cálculo diferencial. Así, se puede considerar una función objetivo de tres variables – el volumen del paralelepípedo – y dos restricciones, dadas por las dimensiones de la lámina rectangular. Ciertamente este enfoque está fuera del conjunto de conocimientos que normalmente se imparten a los profesores de primaria, inclusive a los de secundaria.

Un taller con profesores de secundaria

En un trabajo similar, con profesores de secundaria, ante la misma situación, se crearon diversos problemas. A continuación, dos de los problemas creados en este taller, diferentes a los propuestos en el taller con profesores de primaria

Prob. A

> *¿En qué porcentajes se podrían modificar las longitudes del ancho y el largo del rectángulo dibujado para que el área de la región rectangular aumente en 20%?*

Prob. B

> *¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede construir con la lámina rectangular de 27 cm de ancho por 36 cm de largo?*

Luego de la socialización de estos problemas, sobre todo del Prob. B, surgió el problema de optimización que hemos comentado, a partir del Prob.4 y quedó formulado como lo hemos presentado al inicio de este artículo.

Prob. C

> *Zoila tiene una lámina rectangular de 36 cm por 27 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), de máximo volumen, que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la lámina? (No considerar solapas para las uniones)*

En los trabajos en parejas y en la socialización amplia, se tuvo propuestas y discusiones similares a las del taller con profesores de primaria. Considerando su mayor conocimiento de las matemáticas, formulé el problema de optimización matemática, considerando un diseño similar a los que ya hemos visto, pero considerando variables en lugar de números por ensayo y error, como se muestra en la figura 6

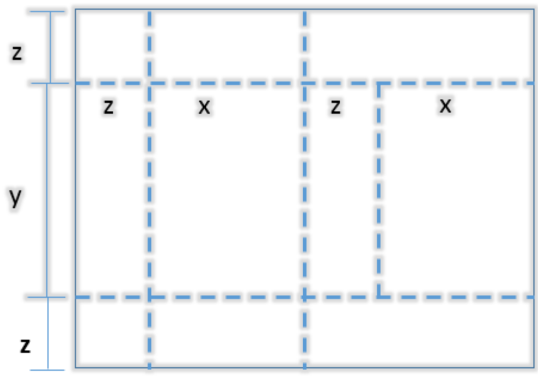


Figura 6

Así, el volumen de la caja diseñada es

$$V = xyz,$$

que es la función objetivo del problema de optimización.

Las restricciones en este problema están dadas por la longitud del ancho y del largo del rectángulo presentado en la situación inicial, y observando la figura 6, debe cumplirse que:

$$y + 2z = 27 \quad y \quad 2z + 2x = 36 \qquad (1)$$

Una restricción adicional, que parece obvia, pero que es importante hacerla explícita en estos problemas, es la no negatividad de las variables.

Tenemos entonces el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar } xyz \qquad (2)$$

$$\text{Sujeto a: } y + 2z = 27$$

$$2z + 2x = 36$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

Es un problema de optimización con tres variables y dos restricciones. Parece natural resolverlo empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, pero también puede resolverse llevándolo a un problema de optimización de una función cúbica de una variable. Si la variable que elegimos es x, entonces su valor óptimo se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 15x + 27 = 0$ y en consecuencia es un número irracional, cuya aproximación racional con dos cifras decimales es 12,91.

Una vez hallado el valor óptimo de x, es fácil hallar los valores óptimos de y y de z, usando las restricciones dadas en (1). En consecuencia, y considerando aproximaciones racionales a los números irracionales resultantes, decimos que las dimensiones de la caja de volumen máximo son

Ancho de la base rectangular (x): 12,91 cm

Largo de la base rectangular (y): 16,82 cm

Altura (z): 5,09 cm

Curiosamente, el volumen correspondiente (máximo) es 1105,27 cm^3, que es bastante cercano al obtenido por ensayo y error en el taller con profesores de primaria.

Nuevas indagaciones

Comentando este problema con el colega Sergio Petrozzi, con quien creamos y resolvimos muchos problemas de optimización cuando compartimos cátedra impartiendo el curso de Matemática para Economistas, surgió el reto de indagar en torno a la pregunta *¿habrá otra forma de construir la caja, con un diseño diferente al usado para resolver el problema (2), que tenga volumen mayor que 1105,27 cm^3?*

A los pocos días, Sergio me llevó el diseño de la figura 7, que corresponde a la caja que se muestra en la figura 8.

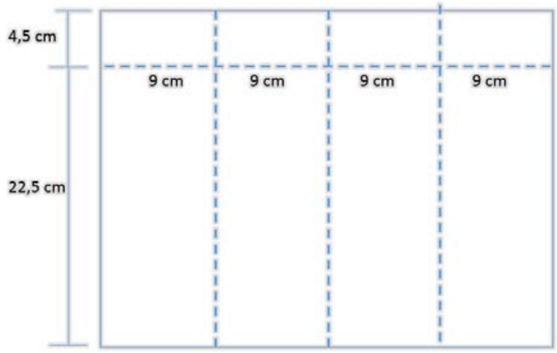


Figura 7

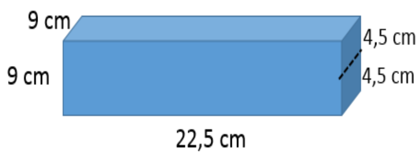


Figura 8

Así, la caja con tapa diseñada tiene el volumen

$$(22{,}5 \text{ cm}) \times (9 \text{ cm}) \times (9\text{cm}) = 1822{,}5 \text{ cm}^3$$

que evidentemente es mayor al obtenido antes y que además tiene la ventaja de no desperdiciar material, pues se usan los 972 cm^2 de la lámina rectangular de 27cm x 36 cm.

Quedan entonces preguntas para indagar y con ellas conjeturar, para demostrar o rechazar tales conjeturas. A continuación cuatro de tales preguntas:

- ¿La caja con tapa mostrada en las figuras 7 y 8 es la de volumen máximo que se puede construir a partir de una lámina rectangular de 27 cm de ancho por 36 cm de largo?
- ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo si la lámina rectangular que se dispone es de 30 cm de ancho por 40 cm de largo?
- ¿Existe algún programa computacional para uso práctico en talleres de construcción de cajas de madera o metal?

- ¿Cuál es el modo racional de obtener la caja de volumen máximo, partiendo de una lámina rectangular, de dimensiones a cm y b cm, de modo que no se desperdicie el material?

Comentarios

1. Es muy importante cultivar y estimular el aprendizaje de la matemática mediante la indagación. En este artículo y las experiencias narradas se hacen evidentes relaciones de la indagación con la creación y resolución de problemas, y con las conjeturas y demostración o rechazo de ellas. Diseñar y concretar experiencias didácticas – con profesores y alumnos – que estimulen el desarrollo de estas relaciones, contribuirá a cultivar el pensamiento matemático y científico en general.

2. Hemos transcrito algunos de los otros problemas creados en los talleres con profesores de primaria y de secundaria y no nos hemos detenido en ellos ni hecho comentarios, pero, ciertamente, son interesantes y también se relacionan con el aprendizaje de la matemática mediante la indagación. El lector queda invitado a analizarlos, a hacer comentarios y a usarlos como problemas iniciales para crear otros por variación de estos.