UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 19 – Septiembre de 2009

Índice

Septiembre de 2009, Número 19, página 2-3
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*****.**

Evaluadores

Colabora

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, página 4-5
ISSN: 1815-0640

Editorial

“...**La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir** ...”

Dr. Luis Antonio Santaló.
Matemático, Científico, Educador.
(1911-2001).

Estimados colegas y amigos

Nuevamente tenemos la satisfacción de presentarles en este número de la Revista UNIÓN, artículos de excelencia con temáticas variadas de investigación y propuesta didácticas originales que invitan a la aplicación y verificación de resultados.

Los artículos seleccionados han sido evaluados por prestigiosas personalidades, a los que agradecemos su desinteresada colaboración, que son especialistas en distintas áreas, ellos aportan sus sugerencias y correcciones a los autores para que envíen el artículo final al Comité Editor.

En este número incluimos las reseñas de dos colegas que han vivenciado una jornada plena de emoción, recuerdos y sueños logrados en la entrega a Luis Balbuena Castellano del VI Premio “Gonzalo Sánchez Vásquez” a los valores humanos. El acto fue realizado en el marco de las XIV JAEM (Jornadas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) en la ciudad de de Girona, España. Ellas son Etda Rodriguez, Presidente de SEMUR (Sociedad de Educación Matemática Uruguaya) y Lola de La Coba García, excelente docente, colaboradora y amiga de Luis.

Como en los números anteriores, agradecemos a los responsables de las Secciones fijas y también a los autores de los artículos editados.

Deseamos continuar con una publicación de calidad acorde con los objetivos de sus creadores, esperamos que este número 19, cubra las expectativas de ustedes, queridos lectores.

Cordiales saludos.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.

Editorial

“....A missão dos educadores é preparar
às novas gerações para o mundo
em que terão que viver....”

Dr. Luis Antonio Santaló.
Matemático, Cientista, Educador.
(1911-2001).

Estimados colegas e amigos

Novamente temos a satisfação de apresentar-lhes neste número de revista UNION, artigos de excelencia com temáticas variadas de investigação e proposta didácticas originais que convidam à aplicação e verificación de resultados.

Os artigos seleccionados foram avaliados por prestigiosas personalidades, aos que agradecemos seu desinteresada colaboração, que são especialistas em diferentes áreas eles contribuem suas sugestões e correcções aos autores para que enviem o artigo final ao Comité Editor.

Neste número incluímos as reseñas de dois colegas que têm vivenciado uma jornada plena de emoção, lembranças e sonhos conseguidos na entrega a Luis Balbuena Castellano do VI Prêmio “Gonzalo Sánchez Vásquez” aos valores humanos. O acto foi realizado no marco das XIV JAEM (Jornadas para o ensino e a aprendizagem das matemáticas) na cidade de Girona, Espanha. Elas são Etda Rodriguez, Presidente de SEMUR (Sociedade de Educação Matemática Uruguaia) e Lola de La Coba García, excelente docente, colaboradora e amiga de Luis.

Como nos números anteriores, agradecemos aos responsáveis das Secções fixas e também aos autores dos artigos editados.

Desejamos continuar com uma publicação de qualidade conforme com os objectivos de seus criadores, esperamos que este número 19, cubra as expectativas de vocês, queridos leitores.

Cordiais saludos.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 6-15
ISSN: 1815-0640

D. Luis Balbuena Castellano, VI Premio "Gonzalo Sánchez Vázquez" a los valores humanos

Lola de la Coba Garcia

Resumen

Reseña del acto de entrega del VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez a los valores humanos al profesor D. Luis Balbuena Castellano, en las XIV JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, celebradas en Girona, España, durante los días del 1 al 4 de julio de 2009.

Abstract

Out line of the hand in event of the VI Prize "Gonzalo Sánchez Vázquez" to the human values, to the teacher D. Luis Balbuena Castellano, on the XIV JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, celebrated in Girona, España, from the first to the fourth of july, 2009.

Resumo

Revisão do ato da entrega do VI premio Gonzalo Sanchez Vázquez aos valores humanos ao professor D. Luis Balbuena Castellano, no XIV JAEM, Jornadas para a Aprendizagem e a Instrução das Matemática, comemorada em Girona, Espanha, durante os dias do 1 aos 4 julho de 2009.

Introducción

Recuerdo muy bien lo que pensé, hace algunos años, cuando leí las bases del Premio "Gonzalo Sánchez Vázquez" a los Valores Humanos, que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas acababa de instituir. Incluso, la conversación que mantuve ese mismo día con un profesor de mi departamento. Los dos habíamos llegado a la misma conclusión: Luis, nuestro jefe, compañero y amigo, era el candidato perfecto para dicho premio, aunque eso jamás se lo dijimos a él (yo no lo hice y creo que Luis Cutillas tampoco). Durante años, fueron muchas las personas que insistieron para que la Sociedad Isaac Newton lo presentara como candidato, pero por una razón u otra se iba

D. Gonzalo Sánchez Vázquez con D. Luis Balbuena Castellano

posponiendo.

La Presidenta de la Sociedad Canaria "*Isaac Newton*" de Profesores de Matemáticas, Ana Alicia Pérez Hernández, en nombre de esta Sociedad, presentó a D. Luis Balbuena Castellano como candidato al premio. No hizo falta buscar avales pues, casi inmediatamente de difundida la noticia, empezaron a llegar escritos de adhesión de compañeros, amigos, alumnos e Instituciones y desde todos los rincones por donde Luis ha pasado.

El 14 de febrero (curiosamente, el día del Amor y la Amistad) de 2009, la Junta de Gobierno de la Federación, en reunión celebrada ese día, acordó, por unanimidad, concederle el VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez a los Valores Humanos al Profesor Luis Balbuena Castellano.

El día 3 de julio, en un acto programado para las XIV JAEM (Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas) en Girona, se le haría entrega del premio y la Sociedad Isaac Newton me encomendó hacer la glosa de D. Luis Balbuena en dicho acto, posiblemente por ser la persona que más tiempo ha trabajado con él de forma directa. He tenido el privilegio de que me hiciera partícipe de sus ideas y disfrutado de su amistad y apoyo incondicional al mismo tiempo que compartía y colaboraba en muchos de sus innovadores proyectos.

Acto de entrega del VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez

Se celebró en el Auditori-Palau de Congresos de Girona, con gran afluencia de público asistente a las Jornadas. Luis Balbuena estuvo acompañado también de familiares y amigos que se desplazaron expresamente, desde Canarias, para asistir a dicho acto.

La mesa estaba constituida por D. Serapio García Cuesta y D. Francisco Martín Casalderrey, Presidente y Secretario respectivos de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, Doña Ana Alicia Pérez Hernández, Presidenta de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas y

Lola de la Coba, ostentando la Presidencia D. Antonio Pérez Sanz, Director del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el profesorado.

Inició el acto D. Serapio García Cuesta que dirigió unas emotivas palabras a Luis Balbuena destacando su satisfacción como Presidente de la FESPM y como amigo por poder dirigirse a él como Premio Gonzalo Sánchez Vázquez.

Y llegó el momento en que me correspondía dirigirme a los asistentes pero, sobre todo, a Luis y a su familia. En una presentación de PowerPoint pretendí añadir imágenes que complementaran mis palabras y hacer presentes en el acto, con la trascripción de sus palabras, a muchas personas que no habían podido asistir.

Palabras de Lola de la Coba

Sr. D. Antonio Pérez Sanz, Director del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el profesorado
Sr. Presidente y Sr. Secretario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
Señora Presidenta de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas
Familiares, amigos y compañeros de Don Luis Balbuena Castellano
Señoras y señores:

Cuando la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas instituyó el Premio Gonzalo Sánchez Vázquez a los valores humanos, fuimos muchos en la Sociedad Isaac Newton los que pensamos en Luis Balbuena Castellano como el candidato perfecto y muchas las personas que insistieron para que fuera presentado. Y, si la Sociedad Isaac Newton no lo hubiera presentado en esta convocatoria, nos consta que antes o después habría sido propuesto y no necesariamente por nosotros.

Para todas las cosas existe un tiempo y ese tiempo ha llegado. Ha llegado la hora de concederle a D. Luis Balbuena Castellano un nuevo premio y, muy poco lo conocería, si no fuera cierto lo que voy a afirmar: es el premio que más alegría le proporcionará y también mayor preocupación. **Alegría** por todo lo que el premio significa para él y para todos nosotros y **preocupación**, porque desde su humildad todavía cree que hay otras personas que se lo merecen más que él.

Sin duda, repartidos por toda la geografía española, hay muchas profesoras y profesores de matemáticas que merecen justamente este reconocimiento pero, si conocieran o conocen al profesor Balbuena, estoy segura de que ellos también estarían de acuerdo en que Luis reúne, con creces, todos los valores que el premio demanda. Mi misión aquí sería la de destacar, no los méritos docentes de mi querido amigo y compañero de trabajo Luis, sino sus valores humanos. ¿Por donde empezar? ¿Seré capaz de decir algo que ninguno de ustedes ya conozca? ¿Podría, no ya fundamentar, sino sólo enumerar todos sus valores? ¿Tendría tiempo y ustedes paciencia?

Adelina Flores y Luis Balbuena, dos premiados canarios

La mejor manera, aunque en el poco tiempo de que dispongo no podré hacerlo, sería dándole voz a las miles de personas que en algún momento han tenido alguna relación con él. Alumnos, compañeros de trabajo, vecinos, amigos, familiares,… Personas anónimas que sólo lo conocen por sus ideas divulgadoras a través de la radio o la televisión. Personas a las que ha ayudado desinteresadamente y sigue ayudando. No en vano ha sido el impulsor y promotor de Asociaciones y Fundaciones que nacieron con vocación de ayuda a los demás. Algunas de ellas, muy pocas, estarán presentes en el PowerPoint que acompaña mis palabras.

Para los que no conocen a D. Luis Balbuena Castellano, permítanme que haga una pequeña semblanza.

El profesor Balbuena, así le llaman sus alumnos, nace en Fontanales, (para él, la capital del mundo) bello paraje en los altos del municipio de Moya, en la isla de Gran Canaria.

Allí aprende las primeras letras de la mano de sus padres, D. Manuel Balbuena Pedraza y Dña. Regina Castellano Hernández. A D. Manuel lo conocí a través de las vivencias que me contaba Luis y seguro fue un gran maestro al que Luis, como buen hijo, supo engrandecer. El colegio D. Manuel Balbuena Pedraza, en Fontanales, hace posible que su recuerdo siga vivo en la memoria colectiva.

A Doña Regina la recuerdo con mucho cariño, siempre quitándole importancia a los méritos de su hijo pero sin poder disimular que se sentía muy orgullosa de él. De Doña Regina le tiene que venir a Luis uno de sus valores más destacados: en cualquier tarea colectiva en la que se involucra siempre minimiza sus méritos y, también siempre, maximiza los de sus colaboradores. Te da la idea, te anima, te ayuda a superar los miedos, a desarrollarla, a realizarla y al final te felicita por lo bien que lo has hecho. ¿Yo? ¡Pero si yo no he hecho nada! Colaborar con Luis es un lujo.

Tercero de una familia numerosa, quiso seguir los pasos de su padre y empezó a estudiar magisterio. Su profesor, D. Francisco Hernández, hizo con Luis lo que después él haría con sus alumnos, infundirle la confianza en sí mismo para realizar

los estudios de Bachillerato Superior y Universitarios. Luego vendría el Selectivo de Ciencias en La Laguna y a continuación Matemáticas en Santiago de Compostela.

Recién licenciado, en un encuentro casual en La Laguna con su profesor de Selectivo, fue fichado inmediatamente para la incipiente Facultad de Matemáticas pasando a engrosar el plantel de profesores PNNs que fortalecieron la Facultad, dando clases también en Medicina, Agrícolas y Aparejadores. Los tiempos no eran buenos para los PNNs y se presenta a las oposiciones de cátedra.

La Universidad de La Laguna pierde un buen profesor, pero las Enseñanzas Medias ganan un flamante Catedrático de Matemáticas, que lleno de ilusión y de ganas de trabajar, se incorpora a su primer destino en Huelva, un Instituto Femenino.

Paralelamente a su crecimiento profesional, crecía su familia. Desde 1971, en que se casó, Ofelia Artiles Suárez, inteligente, serena y siempre sonriente, ha sido su mano derecha, (por otro lado el complemento perfecto para un zurdo). Los hijos, primero sería Ofelia, y luego Raúl y Víctor.

En 1977, en plena efervescencia pre-democrática, regresa a las islas, incorporándose al Instituto "Antonio González" de Tejina, donde continúa su fecunda andadura profesional, a la que nos ha arrastrado a muchos con su especial hacer, su implicación y sus dotes para iniciar tareas colectivas en las que todos tenemos cabida. En Tejina, fue director, conformando en poco tiempo un centro vivo y muy activo.

En el salón de su casa, sentó un día alrededor de una mesa, a un puñado de compañeros y les propuso trabajar para, entre todos, mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Así se gestó la Sociedad Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, la primera sociedad de profesores de Matemáticas de este país y germen de las que, poco después, fueron surgiendo y comenzó su relación con otros profesores, nacionales e internacionales, con los que compartía el mismo interés.

El perfil del Profesor

Llega al Viera y Clavijo en 1982, en una época importante para nuestras islas, porque se estrenaba Estatuto de Autonomía. Quienes conocían sus cualidades, propusieron su nombre para configurar la Consejería de Educación en el marco de las competencias que iban a ser asumidas: Primero como Delegado Provincial del Ministerio de Educación y Ciencia y luego como Consejero de Educación. Y fue un excelente Consejero de Educación. El primero y el mejor. Allí se ganó el respeto de todos, incluso, de sus adversarios políticos por su talante dialogante y conciliador.

Cuando deja la Consejería, en el año 1987, la enseñanza vuelve a ganar al profesor de a pie, como le gusta llamarse. Por voluntad propia, vuelve a coger la tiza en el Instituto Viera y Clavijo, como uno más. Así empieza otro periodo de especial fecundidad como profesor de Matemáticas.

Su trayectoria docente le ha hecho acreedor de innumerables distinciones y su buen hacer, en el que siempre hace participar a sus alumnos y colegas, se traduce en múltiples premios. En este sentido, lo más encomiable es la forma en que lleva a cabo los proyectos y el grado de satisfacción de sus alumnos, para quienes el premio es sólo el colofón de un trabajo bien hecho.

El Premio de Innovación e Inventiva de 1994, de la Consejería de Educación, a "Las Celosías: una geometría alcanzable" es el primero. Luego vinieron otros alumnos, otros proyectos y otros premios.

El mejor de los premios: el reconocimiento de sus compañeros y alumnos y en especial de aquellos alumnos que presentaban una mayor dificultad en el aprendizaje y precisaban de una mayor atención, y por supuesto no sólo en matemática.

Sus alumnos del “Proyecto Atlántico” hacían excursiones nunca imaginadas tanto físicas como intelectuales. Recogiendo materiales que luego miraban a través del microscopio, utilizando todo tipo de recursos para abrir sus mentes (música, celosías, calados canarios, banderas,…)






De todos sus proyectos deja siempre una huella constatable para recuerdo y orgullo de quienes participaron en él. Una exposición, una plaza con reloj de sol, una superficie reglada en forma de escultura,…

Se vuelve a dedicar a la Sociedad Isaac Newton y de sus contactos con otras Sociedades impulsa la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, de nuevo única en su género.

Siempre con afán aglutinador y compartiendo con Gonzalo Sánchez Vázquez un sueño: el conectar y profundizar en las relaciones con el mundo iberoamericano. El sueño de una comunidad iberoamericana de Educación Matemáticas que se puso de manifiesto, quizá por primera vez, en el último y más grandioso de los proyectos de Gonzalo: el ICME'8 ó, como dice Luis, el ICME de Gonzalo. Allí acudieron centenares de ibero-hablantes y dejaron claro que existía un deseo de conseguir que la Educación Matemática se hablara también en nuestras lenguas.

Hoy la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática es una fructífera realidad entre otras cosas gracias a su dedicación. Prueba de ello es que ha sido nombrado

Socio de Honor de las Sociedades de Educación Matemática uruguaya, argentina y peruana y también los cariñosos comunicados de adhesión que se han recibido desde la noticia de su candidatura.

Todo su ingente trabajo ha dado como resultado libros, artículos y una red de comunicación de experiencias con conferencias, ponencias, exposiciones y uso de los medios de comunicación de masas, prensa, radio y televisión,… con los que Luis ha conseguido ganar adeptos para la causa de enseñar efectiva y afectivamente Matemáticas, a lo largo de nuestro país y en Sudamérica.

Pero no sólo reúne colegas en torno a las matemáticas, también se compromete y colabora en diferentes parcelas sociales y culturales: **Funcasor** (Fundación canaria de ayuda al sordo),

¡Cómo no! **Carpe Diem**, "disfruta del momento". El especial modo que Luis tiene, y nos contagia, de aprovechar el tiempo disfrutando de las cosas pequeñas y el amor a la música de otro Luis, propiciaron la creación del coro de profesores Carpe Diem que tantos beneficios positivos reporta a sus componentes. Ya hemos visto y oído a Luis[1] haciendo de gomero muy afinado[2].

Su más reciente obra, que seguro no será la última, el impulso dado a la creación de **La Fundación Carlos Salvador y Beatriz** que no sólo ha servido para amarrar a la vida a Salvador y Aurora, unos padres que desearon morir al mismo tiempo que sus dos hijos, también para unir Canarias con Iberoamérica, pero haciéndolo de una manera real y efectiva, con ayudas directas a las escuelas de las zonas más deprimidas. El proyecto que Luis bautizó con el nombre de "**Ayúdale a cruzar el río**" es ya realidad a través de esta Fundación: le ha cedido los derechos de autor de su último libro publicado en Asunción, Paraguay "*El ñandutí y las matemáticas*" con el propósito de que sirva para la construcción de una escuela.

Esta Fundación, de la que es Vicepresidente, nació con un único objetivo: honrar la memoria de dos buenos muchachos de la mejor forma posible: dedicando todos los esfuerzos y todo su trabajo a ayudar a mejorar la educación y la cultura en aquellos lugares donde era más necesario.

Las personas como Luis producen, como la tierra de Fontanales que lo vio nacer, ricos y abundantes frutos, sin alardear ni destacar entre los demás.

[1] En un vídeo se apreciaba una de las muchas habilidades de Luis Balbuena: silbando una canción junto al Coro Carpe Diem.
[2] En la isla de La Gomera, una de las más escarpadas del archipiélago toda ella atravesada por profundos barrancos, sus habitantes han desarrollado una forma de comunicarse a través del silbo que es un auténtico idioma y reconocido por el Gobierno Canario desde 1999 como patrimonio etnográfico de Canarias.
En la actualidad se encuentra en trámites para que sea Declarado por la UNESCO "Obra Maestra del Patrimonio Inmaterial y Oral de La Humanidad.






Luis, por encima de las distinciones y premios, sobresale por ser una persona que reparte generosamente los frutos de sus innumerables valores humanos, enriqueciendo día a día a los que tenemos la suerte de tener contacto con él.

Estoy segura de que en estos momentos D. Gonzalo Sánchez Vázquez, D. Manuel Balbuena y Doña Regina Castellano, en la nubecita que comparten con otros amigos tuyos y nuestros, están sonriendo felices.

Felicito a toda su familia y quiero terminar como creo que lo haría D. Claudi Alsina, felicitando a todos los matemáticos buenos porque D. Luis Balbuena Castellano es sexto Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez* a los Valores Humanos.

Gracias Luis por tu inconmensurable amistad.

Conclusiones

No me es posible transmitir aquí las muchas emociones que, desde mi posición, captaba entre el público y, sobre todo en Luis Balbuena mientras se sucedían las imágenes, pero puedo asegurar que todo el cariño, respeto y reconocimiento hacia el premiado fue expresado efusivamente en el mismo instante en que terminó mi intervención: el público puesto en pie aplaudió largo y cálidamente.

A continuación el secretario leyó el acta de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas en la que se le concedía el VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez y se le hizo subir al estrado para hacerle entrega de una placa y una escultura.

Cerró el acto el Presidente de la Mesa felicitando y manifestando su respeto y reconocimiento hacia D. Luis Balbuena que, profundamente emocionado, dirigió unas palabras cariñosas y agradecidas a todos los asistentes, sin olvidar a nadie, presentes y ausentes y, haciendo gala de su gran humanidad y cercanía, contó algunas anécdotas sencillas y curiosas que se ganaron el rotundo aplauso final.

Lola de la Coba Garcia, es profesora de Matemáticas en el Instituto de Enseñanza Secundaria “Viera y Clavijo” de La Laguna, Tenerife, desde 1981 y desde el 82 ha trabajado con Luis Balbuena en numerosos proyectos. Vinculada a La Sociedad Isaac Newton desde sus comienzos como enseñante.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 16-19
ISSN: 1815-0640

PREMIO GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Etda Rodríguez
Presidenta de SEMUR

El viernes 3 de julio, a las 13:00 horas, en la ciudad catalana de Girona, durante la realización de las XIV JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, a las que tuve oportunidad de asistir por invitación de la FESPM[1] pude vivir una experiencia única e inolvidable, ya que nuestro querido profesor ***Luis Balbuena Castellano***, ante un auditorio colmado por colegas, familiares y amigos, recibió el ***"VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez"***.

Este galardón, que se entrega cada dos años, lo concede la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Con el mismo *"se trata de premiar la labor docente y los valores humanos: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio."* [2]

Fue una ceremonia ágil y sencilla, cargada de momentos muy emotivos. Todos lo que hicieron uso de la palabra destacaron la dedicación de Luis a la enseñanza de la matemática, sus virtudes y valores humanos, lo que justifica ampliamente este homenaje. Inició la oratoria Serapio García, quien en su carácter de Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas reseñó brevemente algunas de las razones por las que Luis se hizo merecedor de tan alta distinción.

Luego, Francisco Martín Casalderrey, el Secretario General de la FESPM, leyó el acta de la reunión en la que se concedió el Premio. A continuación Ana Alicia Pérez, Presidenta de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, que es la Sociedad a la que pertenece el Prof. Balbuena, enumeró algunos de los argumentos que fundamentaron la presentación de la candidatura de Luis a la Federación.

---

[1] Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática
[2] Convocatoria del VI Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez.*

Enseguida Lola de la Coba, compañera de trabajo de Luis durante muchos años, y también miembro de la Sociedad Canaria, fue la encargada de dar una síntesis de la trayectoria de Luis: su dedicación a la enseñanza de la Matemática, su tolerancia, su entrega a los demás, su buen talante, su espíritu de diálogo, el respeto a los compañeros y alumnos, poniendo de manifiesto los altos valores humanos del homenajeado. Acompañando esta oratoria y proyectadas sobre una pantalla gigante, fue posible ver una selección de fotos que ilustraban momentos importantes de la vida de Luis, tanto profesionales como de su vida familiar, entre ellas se destacaron aquellas en las que Luis estaba en compañía de Gonzalo.

Finalmente Antonio Pérez Sanz, Director General del Ministerio de Educación de España fue quien hizo entrega del premio, un hermoso objeto artístico. El premio consiste también en el nombramiento de Socio de Honor de la FESPM.

Entonces, Luis, muy emocionado y con la modestia que lo caracteriza, inició su intervención agradeciendo a todos y felicitando a los miembros de la FEEMCAT[3], organizadores de las XIV JAEM.

Dijo que sentía una alegría especial porque el premio le fuera entregado en Cataluña, una tierra tan querida y admirada por él, "…*Cataluña tiene para mí varios referentes que me han iluminado como faros en la noche:* ***Luis Antonio Santaló*** *en cuya cuna nos encontramos y a quien tuve el privilegio no sólo de conocerle primero en Canarias cuando fue invitado a las JAEM del 83 y después visitarle en Buenos Aires, sino sobre todo al oír hablar de él a los argentinos con una gran veneración y respeto." … "Otro de mis referentes de esta tierra es* ***Marta Mata****. Una mujer brillante, comprometida con la educación y con la sociedad…"…* "*Y otra persona también de Girona que brilla como un faro inagotable es* ***María Antonia Canals****. Ya le dije cuando la abracé el primer día el orgullo y el honor que representa para mí ingresar en su club de premiados con el Gonzalo Sánchez Vázquez."*

Agradeció a toda la Junta de Gobierno de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemática y en particular a la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática por haberle concedido el premio.

Señaló que este premio tiene aspectos que para él lo hacen muy especial en primer lugar por el nombre que lleva ya que "…*Tuve la suerte y el privilegio de conocer y trabajar estrechamente con él. Gonzalo Sánchez Vázquez es un personaje mítico y estoy seguro que desde ese cielo de los matemáticos buenos que creara para él la imaginación desbordante de Claudi Alsina, desde allí, estará mirando a este profesor de a pie, como a él gustaba llamar a los que trabajamos en*

[3] Federación de Entidades para la Enseñanza de la Matemática de Cataluña

el aula día a día, y guiñándome el ojo me estará diciendo ¡enhorabuena! ¡Cuánto me enorgullece haber recibido este premio solo por eso!" y agrega "*Pero hay aún un importante valor añadido y es que considero de manera especial que sean mis propios compañeros y compañeras quienes me lo han dado. Tenemos un vínculo común que es la docencia y me resulta satisfactorio porque es como si en la asignatura del ejercicio de mi profesión me hubieran dado buena nota."*

Nos dijo que le puso ilusión a su trabajo y eso lo ha hecho feliz como docente.

También reconoció que le dedicó muchas horas a la causa y a extender el trabajo cooperativo a ambos lados del Atlántico.

Mereció un espacio especial su mención al trabajo que realizan los docentes de matemática de iberoamérica y aprovechando mi presencia en este evento me encomendó que transmitiera al profesorado iberoamericano *"…la admiración y el respeto que me inspira el trabajo que desarrollan en esos países nuestros colegas. El afán que muestran por aprender y cómo, a pesar de las condiciones adversas en las que trabaja la mayoría con más de 40 horas semanales, encima sacan tiempo para formarse, para asistir a talleres, a cursos y más aún, para organizar congresos como los CIBEM en cuya creación tanto tuvo que ver Gonzalo…"… "seguirán contando con nuestro apoyo y seguiremos intercambiando iniciativas, ilusiones y conocimientos. Esta fue también una huella que Gonzalo dejó porque estuvo trabajando en aquellas tierras y a pesar del tiempo que ha transcurrido, hace pocas semanas, el profesor César Carranza de la Pontificia Universidad de Lima me recordaba ese paso de Gonzalo por América con frases admirativas*."

También, como no podría ser de otra manera se refirió a la tarea de los docentes…*"No perdamos de vista tampoco y seamos conscientes de la enorme repercusión de nuestra tarea de educadores y del efecto que tiene sobre nuestros alumnos y alumnas la forma en la que desarrollemos nuestra labor. Trabajemos siempre con la ilusión del primer día y que, además, ellos lo noten. Esta es una forma de motivar y de conseguir la autoridad que tanto se reclama. No la autoridad del palo y tente tieso sino la que proporciona el respeto al profesor entregado a su profesión, ilusionado, creativo, comprensivo, ético, tolerante."*

Y preocupado por despertar el interés de los alumnos hacia la matemática, puso especial énfasis en *"…Es nuestra misión intentar atraerles hacia la matemática. En nuestro centro venimos ofreciendo al alumnado desde hace muchos años un conjunto de actividades que llamamos de dinamización matemática del centro que tienen ese objetivo y que nos han demostrado que dan resultado. Un buen porcentaje de nuestros estudiantes se enganchan a ellas y tienen así la posibilidad de acercarse a las matemáticas y al razonamiento matemático por otros caminos que no son estrictamente los que les ofrecemos en nuestras clases…"* Entonces enumeró algunas de estas actividades: el "TOJUMAT", un torneo de juegos matemáticos; la "Semana de las Matemáticas"; los actos del "Día Escolar de las Matemáticas"; el concurso de "Fotografía y Matemáticas" y la participación desde las matemáticas en el "Día del Libro".

También propuso que la Federación debería plantear un debate serio y en profundidad para crear una propuesta que actualice los programas,… *"que acabe con gran parte de esos algoritmos porque las TIC ya no son el futuro, ya son el* *presente y al paso que van se convertirán en el pasado y nos vamos a quedar como quien ve pasar un tren que no para en la estación en la que estamos."*

Ya terminando su participación, mencionó algunos acontecimientos que, en su opinión, son en gran parte los responsables de que él pudiera llegar a ganar este premio: la creación de la Sociedad Canaria en 1977; su viaje al ICME de Berkeley que le marcó un antes y un después; sus compañeros y compañeras de los Departamentos de Matemáticas de los institutos en los que trabajó y de los que, según él, tanto aprendió, especialmente el *Viera y Clavijo* en La Laguna; su paso por la política como consejero de educación, o como concejal del ayuntamiento de su ciudad, etc.; su paso por la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática "…*que me dio la oportunidad tanto de conocer a gente maravillosa, como de ponerme en contacto con el mundo y la realidad Iberoamericana"*.

Luego agregó, "… *detrás y delante de todo está mi familia…"* padres, hermanos y hermanas, hijos y… "*mi esposa Ofelia, mi acompañante incondicional, cuyo papel en esta historia es tal que aquí, delante de todos, además de confirmarte un amor tan intenso como el del primer día te digo que este premio es tan mío como tuyo."*

Y como cierre se despidió agradeciendo a todos los presentes por acompañarlo.

Septiembre de 2009, Número 19, página 20-21
ISSN: 1815-0640

Ismenia Guzmán Retamal

Breve Reseña

Profesora titular de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Posee el título de profesora de Matemáticas y Física y el grado de Licenciada en Filosofía y Educación.

Como postgrados tiene los grados de Magister en Matemáticas obtenido en Chile y el de Doctor en Matemáticas con mención en Didáctica de la Matemática de la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo, obtenido en Francia en1990.

Su interés por la Educación Matemática se enfatiza gracias a una invitación de la Em- bajada de Francia en el marco de un Proyecto de Cooperación de Francia con Chile, Ecuador y Perú.

De esa cooperación surge el Proyecto de Experimentación en Educación Matemática, liderado por el Bureau Pédagogique de la Embajada de Francia, el que coordina representando al Instituto de Matemáticas de la UCV (1977-1979). Realiza una estadía en el IREM de la Universidad de Poitiers, donde profundiza estudios de Geometría Dinámica

Esta Universidad le otorga el diploma D.E.P.S.U.P. En 1986 gana una beca de la Universidad Católica de Valparaíso, para realizar estudios de doctorado en la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo.

En 1991 organiza un Seminario con académicos sobre Fundamentos de Didáctica de Matemática con el fin de crear un Programa de Magister en Didáctica en la Universidad Católica de Valparaíso, el cual nace en 1995 y fue su directora desde 1995 hasta 2005. Este Programa también se dictó en convenio con la Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza durante los años 1999 y 2000.

Además de su desempeño docente ha dirigido numerosos trabajos finales de Pedagogía en Matemáticas y 15 Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática. Ha publicado una docena de artículos y escrito Lecciones de Didáctica para los cursos del Magíster, textos para profesores, como resultados de las experiencias, ha participado en diferentes Congresos, Coloquios presentando resultados de sus investigaciones, ha dictado numerosas Conferencias y Seminarios en el área.

Ha coordinado diversos Proyectos, entre los últimos se destacan, el Proyecto ECOS-CONICYT 2003-2005, sobre Comparación entre los sistemas educativos chileno y francés a través de la Geometría y los proyectos sobre “Nivelación en Geometría para Séptimo año” (2005) y el Proyecto de “Gestión Docente en Geometría para los segundos años medios de Liceos preferentes” (2007). Estos últimos a nivel nacional, en convenio entre la Universidad Católica de Valparaíso y el Ministerio de Educación.

Desde la fundación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática ha tenido activa participación y ha sido presidenta entre 2002-2005 elegida Vicepresidenta de FISEM en el período correspondiente. Actualmente pertenece al Comité Asesor de SOCHIEM y es directora de la Revista RECHIEM de la Sociedad.

Ha sido miembro del comité de redacción de la Revista mexicana RELIME y actualmente es miembro del Comité de redacción de la Revista francesa RDM (Recherche en Didactiques de Mathématiques).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Septiembre de 2009, Número 19, páginas 22-33
SSN: 1815-0640

Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.

Ismenia Guzmán Retamal

La Geometría es una de las ramas de las Matemáticas que ha evolucionado mucho entre el siglo XIX y comienzos del XX, debido entre otros, al nacimiento de las geometrías no euclidianas y a los esfuerzos de axiomatización de Hilbert en busca de la completitud del sistema.

Estas evoluciones como es natural han impactado los sistemas escolares produciendo como consecuencia un cambio de enfoque en la enseñanza de la geometría.

De este modo el enfoque clásico de la geometría euclidiana caracterizada por la rigidez de las figuras cambia a un enfoque dinámico de la enseñanza de geometría centrado en los movimientos en el nivel elemental y en las transformaciones isométricas en la enseñanza secundaria.

Contribuye a este cambio de enfoque el desarrollo de la informática a través de la creación de softwares para la construcción de figuras, como por ejemplo el Cabri geométrico.

En este artículo consideraremos un punto de vista cognitivo para el análisis de la enseñanza de la geometría apoyándonos principalmente en trabajos de R. Duval, en relación con el rol de las figuras y el razonamiento, además analizaremos a modo de ejemplo el tratamiento de la unidad teselando el plano, de un texto chileno frecuente de enseñanza media.

Como *actividades geométricas*, consideraremos aquellas que ofrecen diferentes tipos de tareas tales como: visualización, construcción y demostración; además de las exigencias cognitivas que deben ponerse en juego y en consecuencia las habilidades que permiten desarrollar.

Las investigaciones sobre este tema, en general analizan las figuras en relación a los objetos matemáticos particulares que ellas permiten representar, por ejemplo, triángulos isósceles, triángulos cualesquiera, paralelogramos, cuadriláteros o alguna propiedad matemática.

"La enseñanza de la geometría puede analizarse desde tres puntos de vistas, considerando las nociones y conocimientos geométricos introducidos, las modalidades de su presentación y desde el punto de vista de las actividades que esta enseñanza propone desarrollar" Duval-Guzmán (2006). En consecuencia en la enseñanza de la geometría son esenciales las actividades:

- *Visualización: Ver* con los ojos una figura.
- *Construir* una figura con instrumentos: lápiz, para dibujar a mano alzada, escuadra, regla, compás u otros materiales.

- *Deducir* a partir de informaciones dadas en la figura, nuevas informaciones utilizando propiedades conocidas.

La actividad de Visualización es Cognitiva

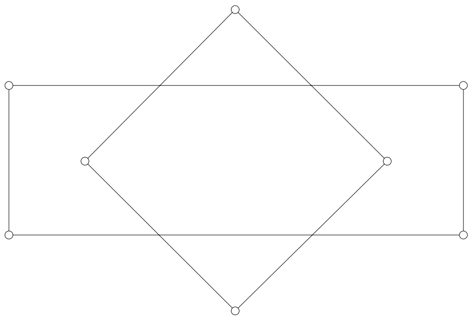
<u>Una figura señala Duval (2003) asocia siempre dos tipos de representación, por una parte, una configuración de formas que constituye todo lo visual (para algunos, imagen o dibujo) y por otra parte, un enunciado que designa las propiedades que la configuración visual representa.</u>

Toda configuración tiene dos características, la primera, distinguir las relaciones entre las formas (sus dimensiones, no sus características) y la posibilidad de construir estas formas mediante algún instrumento.[1]

Matemáticamente, una figura está en sinergia con estos dos tipos de representación, teniendo prioridad las hipótesis dadas en el enunciado por sobre la evidencia visual.

Del punto de vista cognitivo estos dos tipos de representaciones dependen de funcionamientos diferentes e independientes, la asociación entre ellas resulta conflictiva pues, predomina lo visual por sobre las hipótesis codificadas en la configuración.

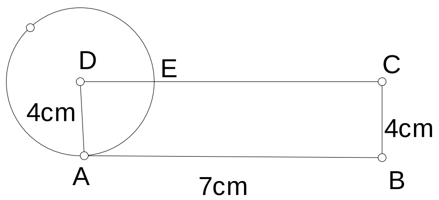
Un ejemplo que ilustra la independencia de estos dos tipos de funcionamiento, y la complejidad de su articulación en una configuración, se puede apreciar en la siguiente pregunta [2]*¿Qué formas ves tu en la configuración siguiente?*



Las respuestas obtenidas son muy diferentes, pero en general se impone lo perceptivo, confrontar resultados en Anexo.

Otro ejemplo,[3] es el siguiente problema:

"La configuración está dibujada a mano alzada y las medidas reales están anotadas en ella. Se ha dibujado una circunferencia y un rectángulo. Se pide encontrar la medida del segmento EC".



[1] El uso de una plantilla o patrón no permite trazar líneas ni segmentos, sino solamente bordes.
[2] Pregunta de una encuesta francesa de evaluación nacional en 6eme citada en Duval (2003):
[3] Dado por Duval en Conferencia en PUCV 2000.

Para resolver este problema, sin medir, no hay que ver el rectángulo, sino fijarse que los segmentos AD y DE son radios de la circunferencia.

Estos ejemplos, como señala Duval, dejan en evidencia dos grandes dificultades asociadas a la complejidad del concepto de figura, a saber:

- La complejidad del acto de ver o percepción visual de las figuras. (Existen diferentes maneras de ver).
- La articulación entre lo que se distingue visualmente de la configuración y las propiedades u objetos geométricos mencionados en el enunciado o en las explicaciones verbales;en otras palabras, el pasaje entre lo que se ve y lo que se dice y cuál de estas operaciones comanda a la otra.

En general, en las propuestas de enseñanza de la geometría, a nivel de escuela, se ignoran estos dos problemas y por el contrario cuando estas propuestas se refieren a "concepto imagen", "concepto figural" o "figura se opone a dibujo" las consideran como representaciones mentales y entonces ellas no abordan lo que podría ser la mayor dificultad del aprendizaje de la geometría.

Actividad geométrica de Construcción de una figura con instrumentos

El procedimiento de construcción exige la elaboración de un programa de construcción, es decir escribir una secuencia de instrucciones que permitan a otra persona reproducirla. Esto requiere de un análisis de la figura en función de los instrumentos que se utilizarán. Para describir el programa de construcción es necesario tener en cuenta dos cosas:

1) Un orden en la ejecución de los trazados según las propiedades y las características del instrumento.
2) Una designación clara de las unidades figurales, para lo cual se necesita emplear los términos que describen las características del objeto a construir.

Las unidades figurales designan las formas y de acuerdo a sus dimensiones se designan D1, (segmentos de rectas, rectas especiales o no), por D2 (triángulos, cuadriláteros especiales o no, ángulos…) por D3 (cubos, paralelepípedos). Y por D0 los puntos.

Las actividades de construcciones geométricas son fundamentales en el aprendizaje de la geometría, pero en general la enseñanza de la geometría en Chile no le ha dado el énfasis suficiente, privilegiando actividades no necesariamente geométricas como las mediciones con instrumentos o mediante cálculos numéricos.

En lugar de enfatizar este tipo de actividades que además del problema de la construcción exige la descripción del proceso, claro está teniendo en cuenta los niveles de exigencia de acuerdo a la edad de los alumnos. De este modo se pierde la ocasión de favorecer la precisión del vocabulario, el cuidado con la secuencia de los pasos de construcción y el proceso de verificación posterior.

Actividad geométrica de deducción a partir de una figura

La tarea de deducir propiedades a partir de una figura es una actividad esencial para favorecer la toma de conciencia de lo que significa justificar lo que se afirma, expresar por qué se afirma aquello, y ello lleva consigo también el tomar conciencia de la necesidad de no aceptar afirmaciones sin comprender la razón, o realizar o aceptar declaraciones sin control.

Deducir una conclusión es establecer una veracidad (o una falsedad) de un enunciado (falsedad en el sentido matemático, no necesariamente un error), o plantear una conjetura. El no demostrar la veracidad o validez de ese enunciado impide obtener un teorema.

En la enseñanza de la geometría es necesario considerar diferentes niveles de exigencia en relación con la validación de conjeturas o de propiedades a partir de una figura. Las figuras han tenido un rol esencial en el desarrollo de la geometría. A través del tiempo se han distinguido las pruebas no formales apoyadas en las propiedades de la figuras (por visualización o construcción con instrumentos) y las pruebas formales que se apoyan en una axiomática formal (Hilbert). La geometría de Euclides ha utilizado estos dos tipos de demostraciones, las no formales por ejemplo en las demostraciones de los teoremas de congruencia (mediante la traslación paralela).

Las pruebas no formales y las formales requieren dos formas de razonamiento diferentes y para dejarlas en evidencia el matemático suizo Gonseth, según Kuzniak&Houdement (2000), ha distinguido diferentes marcos geométricos, Geometría Natural, la Geometría Axiomática Natural y la Geometría Axiomática formal.

La Geometría Natural, se fundamenta en objetos físicos, concretos existentes en la realidad se representan por dibujos o figuras concretas. La validación de las relaciones que se pueden obtener se validan mediante acciones y manipulación de instrumentos, tales como escuadra, reglas graduadas, compás, transportador u otros materiales. La medición es una estrategia usual, así como el uso de plantillas, pliegues entre otros. De modo que el razonamiento ligado a este tipo de actividades es el pragmático.

En la geometría axiomática natural, por ejemplo la geometría euclidiana, sus objetos son ideales, pero hacen referencia a la realidad, entonces ellos son representaciones de objetos reales y concretos, por ejemplo una circunferencia es el modelo de ruedas. La validación de las relaciones obtenidas entre ellos, se realiza utilizando definiciones y teoremas, es decir se recurre a instrumentos que pertenecen a un marco teórico. El razonamiento en juego aquí es la deducción lógico matemática.

La geometría axiomática formal contiene objetos ideales sin ninguna referencia a la realidad y su sistema de validación es absolutamente formal. Evidentemente esta geometría no se adapta a la enseñanza en el sistema escolar.

Las distintas estrategias geométricas en relación a las figuras Duval las resumen en el siguiente cuadro.

El funcionamiento de una Figura en las diversas estrategias geométricas

Diferentes relaciones en la figura	Tratamientos cognitivos correspondientes	Función epistemológica
Aprehensión discursiva Propiedades matemáticas que se pueden ver son las dadas en las hipótesis solamente y aquellas que se pueden deducir Aprehensión secuencial Las propiedades imponen un orden de construcción que depende de las propiedades del instrumento elegido; y a veces se puede constatar la imposibilidad de algunas construcciones.	Razonamiento Deductivo Para explicitar otras propiedades se utiliza la estructura bipartita: definiciones y teoremas Planificación según el instrumento Impone trazados auxiliares que no pertenecen a la figura que se pide construir. Impone una selección consciente: es necesario concentrarse únicamente en las propiedades del instrumento (como los ladrillos para las construcciones).	Demostración Modelo Acciones sobre el representante y los resultados constatados corresponden a la situación matemática o lo que puede ser observado a una escala de tamaño mucho más grande
Aprehensión Operatoria Toda figura dada por un enunciado o posible de construir a partir de ese enunciado, puede ser modificada materialmente o mentalmente de diferentes maneras, (se puede ver otra cosa) Aprehensión perceptiva Son las formas que se imponen al primer golpe de vista, con frecuencia de manera aparentemente no modificable (nada más que ver)	Modificación Figural Hay diferentes tipos de operaciones para modificar una figura, por ejemplo, Dividirla en “pedazos” para reconfigurarla. O agrandarla o deformarla con espejos, introducirle o quitarle profundidad. Integración inconsciente En función de leyes gestálticas visuales de trazados, leyes que dan lugar a la representación de objetos imposibles (Escher)	Heurística Una de las operaciones de modificación visual de la figura de partida muestra la idea de una solución o la justificación de una conjetura. Reconocimiento e identificación Se reconoce una forma en plano o en el espacio y a través de este reconocimiento se identifica un objeto.

La construcción de una figura implica una aprehensión secuencial de trazados auxiliares, por ejemplo prolongaciones que después pueden borrarse, cuando la figura pedida queda construida. Construir no solamente es trazar sino también borrar.

La aprehensión secuencial (de propiedades a movilizar para construir), cambia según los instrumentos utilizados. Así el número de operaciones de trazado (equivale al número de instrucciones) y los trazos (definitivos y auxiliares) depende del instrumento utilizado. Lo que significa que privilegiar un instrumento puede llevar a un equívoco y entonces cambiar el instrumento puede ser una variable didáctica.

Duval precisa que existen dos ideas claves para todo análisis cognitivo del aprendizaje de la geometría:

1) La comprensión e iniciativa en geometría aparecen solamente cuando comienza una SINERGIA entre los tres tipos de actividades ya mencionadas. La actividad geométrica más que cualquier otra actividad matemática requiere de una COORDINACIÓN DE REGISTROS.

2) La geometría moviliza al menos los dos registros multifuncionales comunes y familiares; el lenguaje natural para expresar las propiedades, designar objetos y el figural donde ocurre el reconocimientos de formas (gestálticas). Por ejemplo se puede distinguir entre una visualización geométrica y una icónica.

Desde el punto de vista didáctico surgen preguntas:

(1) ¿Se debe distinguir entre las nociones de *Dibujo y Figura*? *¿Forma y Figura?* y entre las actividades *¿Construir y Dibujar?*

(2) ¿Qué relación existe entre un *trabajo sobre los objetos reales* (plantillas o patrones, maquetas y sólidos) y e*l desarrollo de competencias para llegar a analizar las figuras* cuando se enfrenta un problema?

(3) ¿Cómo *"analizar", "leer", "mirar" una Figura en geometría* de modo de utilizarla en una estrategia de prueba, en el marco de la resolución de un problema?

(4) Una pregunta que no se ha planteado antes es la siguiente ¿Cómo situar una figura geométrica con respecto a otros tipos de visualización por ejemplo son las figuras geométricas representaciones analógicas, es decir permiten realizar pasos de razonamientos?

Algunas consideraciones respecto a estas preguntas y palabras utilizadas con frecuencia (sin preocupación de sus significados).

El término razonamiento es un término suficientemente amplio que cubre todas las formas de discurso geométrico: definiciones, propiedades, enunciados de conjeturas, argumentaciones, deducciones, justificaciones, demostraciones.

Respecto a la pregunta (1)

En general los sustantivos, dibujo, figura y forma se confunden y así mismo los verbos construir y dibujar. Pero estrictamente preciso Duval deberían distinguirse:

Un *dibujo* es un trazado concreto, en cambio una Figura es objeto ideal que representa conocimientos geométricos asociados mentalmente.

Forma es lo que visualmente es reconocido y en este sentido una Figura es una forma reconocida como representando un objeto teniendo en cuenta sus dimensiones y sus características importantes.

Dibujar es una actividad que se realiza a mano alzada, en cambio la actividad de C*onstruir* necesita el uso de instrumentos y se distinguen diferentes tipos de construcciones, según los instrumentos.

Respecto a la pregunta (2).

Esta pregunta se refiere a la representación de un espacio que implica considerar tanto los gestos del cuerpo como la orientación respecto a la ubicación y además la representación de un espacio que implica cambios de dimensión en la manera de mirar los objetos.

La pregunta (3) hace referencia al rol heurístico de las figuras y la pregunta (4) hace referencia al razonamiento como otro tipo de visualización en cuánto representación analógica.

De aquí parecen necesarias otras precisiones ¿Qué es VER? ¿Cómo se aprende a mirar una figura? ¿Qué hay que ver en una figura geométrica?

Una figura en estado inicial o en estado modificado da lugar a muchas miradas posibles; algunas identifican la figura global o una subfigura o una super figura.

Las figuras geométricas si bien son un registro de representación multifuncional no son un lenguaje, de modo que no tienen sintaxis como los enunciados, por lo que no hay reglas para aprehenderlas ni para descomponerlas.

“El tratamiento que permite ver que una figura de partida es suficiente o que necesita modificaciones mediante una construcción complementaria, puede hacerse por dos vías, 1) la doble aprehensión perceptiva / operatoria y 2) la aprehensión discursiva. La aprehensión perceptiva/operatoria se sitúa en el registro propiamente visual con sus leyes de organización y de identificación de formas, identificables por dimensiones D1, D2 o D3. La aprehensión discursiva, es todo lo que se pueda decir, partiendo de las propiedades dadas”. Duval (2003)

a) La utilización heurística de las figuras (independiente del modo de construcción), ayuda al desarrollo de las capacidades de aprehensión operatoria y no solamente de las perceptivas o discursivas de las figuras. Lo que implica tareas específicas centradas por ejemplo en la variación de las figuras de partida según un problema dado.

La identificación visual de las unidades figurales D2, predominantes como también las configuraciones visuales D1-D0, necesitan tareas de restauración de figuras y no solamente tareas de construcción y reproducción.

Habría también un trabajo análogo para el pasaje de D3 a D2, por ejemplo descomponer un cubo en cuadrados, implica un trabajo de descubrimiento de la variación de la sección determinada por planos

También un trabajo con la construcción de figuras imposibles, por ejemplo la de un cuadrilátero con tres ángulos rectos, permitiría ayudar a la toma de conciencia sobre las propiedades geométricas y las condiciones internas de una configuración.

Por otra parte desde el punto de vista cognitivo la enseñanza de la geometría reposa sobre la articulación de dos registros multifuncionales como ya mencionamos, y el funcionamiento cognitivo que permite esta articulación exige la movilización simultánea o en alternancia de conversiones directas o inversas como también tratamientos específicos en cada registro (Duval 2005) Esta exigencia no tiene nada de natural, sin embargo es propia de la matemática y por lo tanto requiere de situaciones apropiadas que favorezcan este aprendizaje y en consecuencia se favorezca el desarrollo del razonamiento.

El razonamiento, se presenta en general en dos formas, una ligada a la exploración mediante acciones y otra ligada al lenguaje; es decir existe un razonamiento de carácter pragmático y otro de carácter intelectual. Dentro de este último todavía hay que distinguir aquellos ligados al contenido y al sentido común, como las argumentaciones y aquellos ligados a un marco teórico como las demostraciones matemáticas, estos tipos de razonamientos se desarrollan muy bien en relación con los marcos geométricos mencionados, de la geometría natural que se adapta bien a la enseñanza elemental y de la geometría axiomática natural mejor adaptada para la enseñanza secundaria o de liceo.

En relación a textos escolares en Chile

Analizaremos el texto de la editorial Marenostrum 2001, Matemática Activa Primer año medio, por ser de uso frecuente. Nos referiremos al capítulo 6.

En este texto al parecer los autores han tomado dos decisiones didácticas.

En primer lugar la geometría es introducida como un estudio de la realidad, es decir por actividades artesanales o artísticas. Los objetos estudiados no son contenidos matemáticos (relaciones, propiedades, conceptos,..) sino formas tales que se reconocen, se les ensambla o se las particiona como se hace en ciertas prácticas profesionales o en prácticas ornamentales: mosaicos, baldosas, motivos,… Y las secuencias de actividades van a intentar quedarse el mayor tiempo posible en este marco.

En seguida, la presentación de las actividades se hace bajo el modo de una explicación descriptiva la más próxima posible al discurso ordinario. Los capítulos no se presentan como una secuencia de fichas de actividades, Ellas se presentan como un texto se que lee como siguiendo una pauta, aún si el texto es en parte una descripción de un desarrollo de las actividades. Los ejercicios están al final del capitulo. Una característica estilística importante merece ser destacada. El texto privilegia el planteo de preguntas que no son ni problemas ni instrucciones para realizar actividades sino preguntas para controlar u orientar las estrategias de observación o de reflexión en curso. Estas preguntas exteriorizan un poco el "lenguaje interior" en el curso de la estrategia.

Se trabaja con unidades visuales 2D, para ensamblarlas, superponerlas o descomponerlas solamente en otras unidades visuales 2D. Esto quiere decir que la descomposición dimensional en una unidad visual 1D necesaria en la introducción de la geometría para introducir las propiedades geométricas fundamentales o definir las propiedades de las unidades visuales 2D, es decir las figuras de base, son evitadas al máximo. Notemos por otra parte que las actividades de manipulación sólo se pueden hacer con unidades visuales 2D y no con unidades visuales 1D.

El lenguaje matemático es reducido al mínimo. Esto concierne tanto al recurso de un vocabulario matemático técnico como el recurso a las notaciones simbólicas y aún al cálculo.

La actividad de aprendizaje solicita una observación y descubrimiento. Su objetivo no es la formulación de conjeturas en vista de actividades de validación. Cada secuencia de actividades se termina por un enunciado, al cual se le da el estatus de teorema. Pero estos enunciados aparecen como la formulación de diferentes observaciones o verificaciones (solicitadas en la secuencia de actividades) y ninguna justificación se solicita.

Nos podemos preguntar hasta qué punto la decisión de mantener en prioridad a las unidades visuales 2D, a las manipulaciones y operaciones que ellas permiten, así como una descripción no teórica de lo que ellas permiten descubrir. Hay un contraste impresionante entre el capítulo 5 sobre el reconocimiento de formas congruentes y el capítulo 6 sobre pavimentar el plano.

Comenzaremos por el capítulo 6 que presenta una perfecta realización de este programa. Al contrario en el capítulo 5 se ve aparecer para describir los resultados, actividades para la introducción de notaciones simbólicas formales sin preparación, y también se recurre a codificaciones de puntos para describir la traslación de formas 2D. Todos los problemas que surgen en la enseñanza de la geometría en la escuela básica pueden estar en este tipo de decisiones didácticas.

Teselando el plano (pp. 160-182) (Unidad 6)

Este capítulo, de una veintena de páginas, trata de la pavimentación o embaldosado del plano a través de la fabricación de mosaicos. Los pavimentos con paralelogramos, con triángulos, luego con polígonos regulares son introducidos primero bajo la forma de actividades de fabricación de mosaicos (161-166). Enseguida se aborda la cuestión más general de pavimentos con cuadriláteros de cualquier forma, polígonos no convexos y polígonos curvilíneos. (167-171).

Finalmente, la cuestión de pavimentos con diversas formas se presenta a través de un estudio de mosaicos de Escher (172-177). Dos páginas de ejercicios y tres páginas de problemas de ingenio completan el capítulo.

Cada parte está organizada en torno de una actividad de fabricación de baldosas en cartón sobre un modelo de un polígono particular, de manera de poder enseguida con ellas cubrir el plano. El trabajo en grupo está organizado de manera de poder confrontar diferentes posibilidades eventuales de ensamblajes y entonces obtener una convicción. Luego se desprende un resultado con el estatus de teorema. El más notable, es aquél cuya introducción da lugar a un trabajo de experimentación, es el de los polígonos regulares, se afirma que solamente tres permiten pavimentar el plano (165-166). Se tiene entonces un esquema de actividades: manipulación, observación, resultado o conjetura.

Esta organización compromete una decisión importante concerniente a la naturaleza cognitiva de las actividades geométricas que se van a pedir a los alumnos. Todas las actividades están enteramente centradas en el reconocimiento únicamente de unidades visuales 2D, puesto que en ellas se trata de ensamblajes de formas poligonales. Esta decisión implica tres consecuencias sobre el tipo de actividad cognitiva que es solicitada por las tareas y entonces sobre las competencias que pueden ser desarrolladas.

(1) Las únicas descomposiciones de formas requeridas son recortes de formas 2D (polígonos convexos o no convexos) en otras formas 2D (triángulos) que se consideran como unidades de ensamblajes para pavimentar el plano. *Esto quiere decir que ninguna descomposición dimensional de formas 2D en unidades visuales 1D (rectas, segmentos, lados…) es requerida*.

(2) Las descomposiciones de formas 2D en otras formes 2D pueden realizarse materialmente. Ellas permiten manipulaciones físicas. Este tipo de manipulaciones físicas son sistemáticamente solicitadas, ya sea para actividades de acercamiento, ya sea para establecer una conjetura, o bien para sacar una convicción.

Las actividades geométricas resultan ser entonces análogas a un trabajo artesanal de fabricación de mosaicos.

(3) Para hacer estas actividades geométricas *no es necesario recurrir a propiedades matemáticas*, como el paralelismo o la perpendicularidad, que exigen una descomposición dimensional de formas porque ellas portan sobre la relación entre dos unidades visuales 1D. Basta poder discriminar formas poligonales, es decir pequeños ladrillos o baldosas.

Esta presentación de las actividades geométricas a través de actividades artesanales de fabricación de mosaicos se acompaña de otra decisión en la manera de presentar estas actividades. Es un texto abundantemente ilustrado que se propone a leer y no una ficha que descompone una tarea en varias subtareas y tablas a llenar. Este manual presenta dos características.

(1) El texto es una narración descriptiva que acompaña la actividad de fabricación que se supone que el alumno hará. Ella está dirigida por preguntas que marcan una nueva etapa en la tarea y cuya función es orientar la atención. Por otra parte, el no hace un llamado a ningún término técnico salvo los nombres de diferentes tipos de polígonos. También los teoremas se refieren a una formulación descriptiva.

(2) La parte correspondiente a las «figuras» que son tanto imágenes como “figuras geométricas” representa en promedio casi la mitad de la presentación. Ahora bien, esta ilustración consiste esencialmente en imágenes que se refieren a baldosas que se manipulan en la fabricación de mosaicos y no en figuras geométricas en el sentido clásico: un ensamblaje de trazados 1D con un código de propiedades o de de valores numéricos. La única excepción es el trabajo de experimentación sobre pavimentación con polígonos regulares (p. 165).

La presentación de este capítulo considera la práctica ordinaria de dos registros multifuncionales, que son el lenguaje común y las imágenes. Parece más cercano a la redacción de un artículo de revista que a una página de un manual de estudio.

Hay sin embargo una excepción cuando se trata de determinar cuáles son los polígonos regulares que permiten una pavimentación del plano. La estrategia propuesta sigue una estrategia experimental, identificar datos que, aquí, son las medidas de los ángulos de diferentes polígonos regulares se transforman las medidas en valores con la ayuda de una fórmula simple se organizan los valores numéricos así obtenidos en una tabla de variación, en el cual la variable independiente es el número de lados de un polígono.

Para interpretar la tabla de variación se limita a dos tipos de observaciones. Por una parte, se nota que esos valores numéricos son números enteros para tres polígonos solamente y que para los otros ellos decrecen sino que son más grandes que 2.

Se menciona en dos líneas que la justificación matemática exige un mínimo de “técnica algebraica y también analítica” (p.166.). La originalidad de las decisiones tomadas en este capítulo está en la presentación de las relaciones entre la geometría y la realidad. Ella no aparece como una actividad independiente en la cual se aplicarían resultados a situaciones reales. Ella es una actividad implicada en un trabajo de fabricación artesanal o de creación artística. Esto da lugar entonces a actividades a la vez concretas e imaginativas. Pero esto plantea también una pregunta respecto a la explicitación matemática de las propiedades y de su justificación.

Porque esto supone por una parte que se pasa de una descomposición/ ensamblajes de formas 2D a 2D a una desconstrucción dimensional 2D a 1D y por otra parte que no se limita a la utilización corriente del lenguaje a imágenes. Esto representa un doble salto cognitivo importante. Los autores parecen haber elegido de quedar en desmedro de esta doble exigencia para la construcción de conocimientos geométricos (p. 166).

Conclusión

Las ideas que hemos tratado en este artículo en base a las referencias teóricas mencionadas y especialmente aquellas planteadas por Duval (2003) sobre la enseñanza de la geometría y luego el análisis que hemos realizado de la unidad 6 del texto elegido para ejemplificar lo que sucede en la realidad de las propuestas de los textos escolares, deja en evidencia que las decisiones de los autores no se centran en las actividades geométricas esenciales. El texto que hemos tomado como ejemplo es considerado muy bueno en el ámbito de la enseñanza chilena, los autores son profesionales de prestigio.

Desde nuestro punto de vista el problema que se plantea radica en una falta de una seria reflexión sobre la geometría que debe ser aprendida y el para qué. Las actividades verdaderamente geométricas que hemos dejado en evidencia, visualización, construcción y deducción merecen un lugar central en la enseñanza de la geometría, pues son ellas las que permiten poner en juego actividades cognitivas que favorecen el razonamiento matemático.

Bibliografía

Duval, R. Cours Chipre 2003.
Duval, R. y Guzmán, I. RECHIEM 2006.
Duval R. Sémiosis et Pensée Humaine 1995. P.Lang.

Duval R (2003a) *Décrire, visualiser, raisonner: quels «apprentissages premiers» de l'activité mathématique?* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 8, 13-62.

Houdement.& Kuzniak (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherche en didactiques des mathématiques 20-1.* 89-116.

Matemática Activa Primero Medio. Editorial Marenostrum 2001.

Anexo

Resultados encuesta Duval (2003):

Les résultats à l'échelle nationale sont impressionnants. Le fonctionnement visuel l'emporte sur les hypothèses, pourtant reportées sur la configuration.

Septembre 1997	2604 élèves	Septembre 1998	2590 élèves
Réponses mathématiques (AE vu comme un rayon de 4cm) *Réponses par mesure du tracé* *(environ 2cm sur le tracé présenté* *Réponses par estimation perceptive* *(E presque au milieu de AB : environ 3,5)* Autres réponses Absence de réponses	9% *16%* *26%* 30% 16%	Réponses mathématiques (AE vu comme un rayon de 4cm) *Réponses par mesure du tracé* *(environ 3,5 sur le tracé présenté)* Autres réponses	22, 2% *39,6%* 24,4%

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 34-46
ISSN: 1815-0640

¿Alguien sabe qué es el número?

Juan D. Godino, Vicenç Font Moll, Miguel R. Wilhelmi, Mario Arrieche

Resumen

Presentamos una visión global sobre los números naturales que puede ser útil para los profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria. Usamos un episodio de clase, en el que un formador de profesores presenta la construcción logicista de los números naturales, como contexto de reflexión sobre los diversos significados de los números. Nuestro análisis está basado en la noción de significado personal e institucional de los objetos matemáticos, entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a la solución de situaciones – problemas.

Abstract

We present a global view about whole numbers, which can be useful for primary and secondary school teachers. A class episode, in which a teacher educator introduces the set theoretical construction of these numbers to a group of students' teachers, is used as a context to reflect on the different meanings of numbers. The analysis is based on the ideas of personal and institutional meanings of mathematical objects. Meanings are here understood as systems of operative and discursive practices linked to specific problem-situations.

Resumo

Apresentamos uma visão global sobre os números naturais que pode ser útil para os professores de matemáticas de educação primaria e secundaria. Usamos um episódio de aula, onde um formador de professores apresenta a construção logística dos números naturais, como contexto de reflexão sobre os diversos significados dos números. Nossa análise está baseada na noção de significado pessoal e institucional dos objetos matemáticos, entendidos como sistemas de práticas operativas e discursivas ligadas à solução de situações – problemas.

1. Introducción

Uno de los temas de estudio usuales en el programa de formación inicial de maestros es "Números naturales. Sistemas de numeración", cuyo objetivo es la profundización por parte del estudiante del concepto de número natural y sus usos y de las relaciones con los sistemas de símbolos que los representan. Parece razonable que cuando preguntemos a un estudiante, *¿qué son los números naturales?*, no se limiten a recitar la serie 1, 2, 3,…, sino que sean capaces discriminar entre el concepto "número" de los símbolos y las palabras mediante los cuales se expresan. Sin embargo, es también esperable que no sean capaces de dar una definición de la noción de “número natural”. Esto no debe sorprendernos: el concepto de número natural ha sido motivo de fuertes controversias filosóficas; de hecho, la conceptualización actual es relativamente reciente (data de finales del siglo XIX y principios del XX). Asimismo, para cualquier concepto matemático, podemos encontrar distintas definiciones coherentes entre sí, pero que resaltan un determinado aspecto del número.

La naturaleza de los números naturales, y en particular su relación con los conjuntos, es una cuestión que interesa tanto a las matemáticas como a la filosofía de las matemáticas. Pero los números[1] son también herramientas esenciales en nuestra vida cotidiana y profesional, por lo que constituyen un tema de estudio imprescindible en la escuela desde los primeros niveles. El maestro debe tener, por tanto, ideas claras sobre los usos de los números, los sistemas de numeración, los procedimientos de cálculo, así como sobre el origen y naturaleza de los números.

En este trabajo, a partir de un episodio de clase en la formación de maestros, abordamos el estudio de las relaciones entre las nociones conjuntistas y los números naturales. Consideramos necesario distinguir entre los usos prácticos e “informales” de los números (responder cuestiones tales como, ¿cuántos elementos hay? o ¿qué lugar ocupa un objeto?), y los usos “formales” (qué son los números y cómo se construyen los sistemas numéricos); cuestiones estas últimas, relativas a los fundamentos de la matemática como cuerpo organizado de conocimientos. Dentro de estos dos grandes contextos de uso es posible distinguir diversos momentos históricos en los cuales las cuestiones se abordan con diversos recursos y desde distintas aproximaciones, poniéndose en juego prácticas operativas y discursivas propias. Vistos de manera retrospectiva podemos identificar ciertas invariancias que permiten hablar del “número natural”, en singular, pero desde un punto de vista local parece necesario distinguir entre los diversos números naturales que “manejaron” los pueblos primitivos y culturas antiguas (egipcios, romanos, chinos,…), como también entre las prácticas numéricas que se realizan actualmente en la escuela infantil o primaria, y las que realizan los matemáticos logicistas del siglo XIX o las formulaciones axiomáticas hilbertianas.

> "En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. <<No hay una matemática; hay muchas matemáticas>>." (Spengler, 1918, 96).

Así pues, la comprensión de la naturaleza y significado de los números requiere adoptar una visión antropológica sobre la matemática, como la propuesta, entre otras aproximaciones, por el “enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (Godino, Batanero y Font, 2007). Esta es la razón por la que en la sección 3 incluimos algunas ideas básicas sobre este marco teórico, las cuales son seguidamente aplicadas a discernir las características principales de los significados informales y formales de los números.

[1] En este artículo, por defecto, “número” es “número natural”.

Comenzamos presentando el episodio de clase mencionado[2], que nos va a servir de motivación inicial para el abordaje de este problema.

2. El episodio de clase

Incluimos, a continuación, un extracto de una interacción profesor-estudiantes de maestro en torno a la coexistencia, no siempre coherente, de concepciones diversas de los números naturales. El episodio es una muestra de los conflictos semióticos tanto de los estudiantes como del propio formador.

[El formador comienza la clase sobre "los números naturales" expresando]:

Trabajaremos primero el concepto de número, la idea, y después pensaremos en el idioma en que podemos escribirlo. ¿Qué son los números?, por ejemplo: ¿Qué es el número cinco? Se nos presenta un problema, utilizamos los números desde muy pequeños. Sin embargo, se nos pregunta, ¿qué es un número?, y tenemos dificultad para responder.

[Pregunta a los estudiantes]

¿Alguien sabe qué es un número?[3]

[Un alumno responde]

"Un signo que designa una cantidad".

[El profesor vuelve a preguntar],

"¿Qué es el número cuatro?"

[Los alumnos no responden].

[El profesor escribe en la pizarra el símbolo "4" y dice]:

Esto no es más que un signo. ¿Cuál sería la idea que hay detrás de esto?, ¿Cómo podría definirlo?

[El profesor se responde]

Si quiero comunicar qué significa el número cuatro ponemos ejemplos de grupos que vengan de cuatro en cuatro, como por ejemplo: cuatro tizas, cuatro dedos, cuatro personas, cuatro sillas, etc. ***Lo que tienen de común todos estos conjuntos es lo que llamamos la idea de ser cuatro.***

¿De qué manera se trabaja en Educación infantil y en Educación primaria? Se empieza a mostrar los números como útiles, pero como futuros maestros, lo vamos a tomar como objeto de estudio.

[Continúa la clase explicando la construcción logicista de los números naturales como conjunto de las clases de equivalencia de conjuntos finitos obtenidas mediante la relación de equipotencia o coordinabilidad de conjuntos]

[El profesor, mientras dice "*vamos a partir de dos conjuntos*" escribe en la pizarra]

A, B conjuntos finitos: $A \approx B \Leftrightarrow \exists f: A \to B$, biyectiva

[2] Tomado de Arrieche (2002), p. 305-306.
[3] Esta pregunta del formador nos ha sugerido el título de este trabajo.

[Explica que la relación de coordinabilidad entre conjuntos es una relación de equivalencia, es decir, cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Explica que la relación de equivalencia clasifica a los conjuntos, se forman clases de conjuntos].

Para denotar la clase de un conjunto escribiremos Cl(A) = {conjuntos B tales que, $B \approx A$}.

¿Qué tienen en común los conjuntos equipotentes con uno dado?

El número de elementos. Aquello que tienen en común es lo que se llama número natural*. Se han clasificado todos los conjuntos, y a cada una de estas colecciones de conjuntos equipotentes es lo que se llama número natural.*

El episodio muestra un modelo didáctico del tipo "mayéutica socrática", esto es, las preguntas del profesor son retóricas, ya que él detenta toda la carga del discurso. De hecho la respuesta inicial dada por el alumno ("un signo que designa una cantidad") no es considerada, ni discutida, ni valorada… El profesor tiene una "hoja de ruta" que cumplir y en ella no se contemplan las intervenciones de los estudiantes como "motor" del proceso instruccional. Las intervenciones de los estudiantes cumplen una mera función fática o de contacto, esto es, mostrar una buena disposición mutua entre emisor y receptor. Este hecho es indicador de la presunción, por parte del profesor, de la existencia de un "significado privilegiado" del número natural; a saber, aquel asociado a la definición conjuntista.

En la siguiente sección describimos algunas nociones teóricas que consideramos útiles para entender la pluralidad de significados de las nociones matemáticas, las cuales aplicaremos al caso de los números naturales.

3. Los significados como sistemas de prácticas

En el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función,…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. Según el EOS, el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (una institución, comunidad de prácticas,…) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene. En los sistemas de prácticas intervienen diversos tipos de objetos interrelacionados (*configuración*); además de la propia situación-problema que motiva las prácticas matemáticas en el EOS se consideran como objetos intervinientes y emergentes de las prácticas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre las facetas personal e institucional. La primera hace referencia a las prácticas idiosincrásicas de un individuo particular; la segunda, a las prácticas sociales y compartidas por un grupo de personas miembros de una misma institución. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. De esta manera, la interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales). La figura 1 resume los tipos de significados personales e institucionales introducidos en el EOS.

Desde esta perspectiva se entienden los procesos de aprendizaje en términos de *acoplamiento* de significados, como se indica en la parte central de la figura 1. La *enseñanza* implica la *participación* del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el *aprendizaje*, en última instancia, supone la *apropiación* por el estudiante de dichos significados.

Figura 1: Tipos de significados pragmáticos

3.1. Significados informales de los números

Para comunicar a otras personas, y como medio de registrar para nosotros mismos en otros momentos, el tamaño o cantidad de elementos de un conjunto de objetos discretos podemos hacerlo usando diferentes recursos y procedimientos:

1) En nuestra cultura occidental actual está generalizado el uso de las "palabras numéricas", uno, dos, tres…, y los símbolos numéricos indoarábigos, 1, 2, 3,… Estas colecciones ilimitadas de palabras y símbolos son las que usan nuestros estudiantes cuando preguntamos, por ejemplo, ¿Cuántos alumnos hay en clase?, y responden "hay noventa y un estudiantes", o, escriben, "91". Para ello han debido aplicar un procedimiento riguroso de conteo, poniendo en correspondencia biyectiva cada alumno de la clase con una y solo una palabra numérica recitadas en un orden establecido[4].

[4] Véase en Cid, Godino y Batanero (2004) una descripción sistemática de las diversas técnicas de recuento de cardinales y ordinales.

Podemos observar que al contar han aplicado los principios del conteo:

- *Principio del orden estable*. Las palabras numéricas uno, dos, tres,… deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
- *Principio de la correspondencia uno a uno*. A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- *Principio cardinal*. La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el lugar que ocupa ese objeto en el recuento efectivamente realizado, sino también el cardinal del conjunto.

Como consecuencia de la aplicación sistemática de estos principios se tiene:

- *Principio de irrelevancia del orden*. El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.

Además, en relación con el desarrollo cognitivo del niño, se tiene el:

- *Principio de abstracción*: no importa la naturaleza de los objetos que se estén contando, ni si la colección es un conjunto homogéneo o heterogéneo de objetos.
- *Principio de conservación de la cantidad*: la variación de la posición espacial de los objetos no afecta a la cantidad.

2) Si les pedimos que comuniquen el resultado del recuento sin usar las “palabras o los símbolos numéricos” los alumnos pueden inventar otros medios de expresar el tamaño, numerosidad, número de elementos (o cardinal) del conjunto de alumnos de la clase. Por ejemplo:

- La colección de marcas ///…, o cuadraditos, sobre el papel, tantos como elementos tiene el conjunto.
- Una combinación de símbolos para distintos agrupamientos parciales (* para indicar diez alumnos, / para expresar una unidad).

Cada uno de estos “sistemas de objetos” usados para expresar la “propiedad” de los conjuntos “número de elementos”, o cardinal, es un “sistema numeral”. Para que efectivamente sirvan a este fin deben cumplir una serie de reglas (axiomas de Peano):

1. *Uno es número natural*.
2. *A cada número le corresponde otro número que se llama su siguiente o sucesor.*
3. *Uno no es sucesor de ningún otro elemento.*
4. *Dos elementos diferentes de N no pueden tener el mismo sucesor (la función sucesor es inyectiva).*
5. *Todo subconjunto de* **N** *que contiene un primer elemento y que contiene el sucesor de cada uno de sus elementos coincide con* **N** (*principio de inducción*).

Como tenemos libertad para inventar símbolos y objetos como medio de expresar el cardinal de los conjuntos, esto es, de responder a la cuestión, *¿cuántos hay*?, la colección de sistemas numerales posibles es ilimitada. En principio cualquier colección ilimitada de objetos, cualquiera que sea su naturaleza, se podría usar como un sistema numeral: diversas culturas han usados conjuntos de piedrecitas, o partes del cuerpo humano, etc., como sistemas numerales.

De esta manera, es clave aceptar la vinculación del "número" con el "sistema de representación", pero también hay que aceptar que el número no tiene una relación "necesaria" con un sistema concreto de símbolos.

Asimismo, la conservación de la cantidad y del número de elementos de las colecciones de objetos (cardinalidad) no es la única característica del número. El orden lineal, el carácter conexo de la serie o las propiedades iterativas de los números son características consustanciales y que configuran asimismo su significado.

3.2. Significados formales

Hemos mencionado en el apartado anterior la formulación axiomática de Peano para los números naturales, la cual se apoya esencialmente en el uso iterado de la función siguiente S. De hecho, la axiomática de Peano es común a todos los subconjuntos de números enteros positivos minorados, es decir, que tienen un elemento mínimo o primer elemento. Si denotamos por α este primer elemento, la axiomática de Peano permite definir cualquier conjunto **E** entero minorado. En efecto, sea **E** un conjunto **E** entero minorado, entonces:

1. $\alpha \in \mathbf{E}$.
2. $\exists S$, S: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, tal que: $\forall\, e \in \mathbf{E}$, $S(e) \in \mathbf{E}$.
3. No $\exists\, e \in \mathbf{E}$ tal que: $S(e) = \alpha$.
4. Sean $e, u \in \mathbf{N}$ y $S(e) = S(u)$, entonces $e = u$.
5. (*Principio de inducción*). Sea $A \subseteq \mathbf{E}$, tal que:
    a) $\alpha \in A$.
    b) Si $e \in A \Rightarrow S(e) \in A$.

    Entonces $A = \mathbf{E}$.

De tal manera que si asignamos "$\alpha = 1$, $E = \mathbf{N}$" se retoma la definición empírica de los números naturales antes introducida.

Pero en el debate "fundacional" de las matemáticas, surgido a finales del siglo XIX y principios del XX, se introdujeron otras maneras de concebir los números naturales.

A finales del siglo XIX se fundamenta toda la matemática sobre los números naturales y esta última sobre la teoría de conjuntos. Sin entrar en detalles formales, la idea de fondo de esta alternativa es la que usa el formador del episodio mencionado en la sección 2: partir de un conjunto formado por un solo elemento (y todos los equipotentes, o coordinables, con él); todos tienen "la propiedad", o cardinal, de tener un elemento. A continuación, se considera un conjunto que tiene la propiedad, o cardinal, de tener dos elementos, y todos los equipotentes con él. Y así sucesivamente, se construye el sistema de todos los cardinales finitos. Es claro que este sistema de cardinales finitos cumple los axiomas de Peano.

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones de cardinación y cálculo aritmético son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados, bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano[5]. En este contexto de formalización matemática se plantean cuestiones tales como,

- ¿Cómo se deberían definir los números?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto **N** de los naturales dotado de la ley de composición interna adición?

La respuesta a estas cuestiones requiere la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo con elemento neutro para la adición y multiplicación) y argumentaciones (deductivas), en definitiva un sistema de prácticas operativas y discursivas con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático.

A pesar de las diferencias entre los significados informales-empíricos y formales de los números siempre ha existido una fructífera relación sinérgica entre los mismos: "Los requerimientos prácticos han inducido innovaciones de escritura como el refinamiento de los sistemas de notación posicionales y la introducción de la notación numérica negativa. Los desarrollos conceptuales han sustentado estas innovaciones, asegurando que las reglas de los procedimientos reflejen las estructuras de significados subyacentes, así como desarrollando el conocimiento de otras propiedades" (Ernest, 2006, 80).

4. ¿Qué son los números naturales?

¿Qué son realmente los números, si llamamos números tanto a '1, 2, 3…', como a 'uno, dos, tres,…', como a 'one, two, three,…', etc.? (Ferreirós, 1998, 52). Esta cuestión es sin duda de difícil respuesta, si tenemos en cuenta las fuertes controversias que se plantearon entre autores de la talla de Frege, Russell, Peano, Dedekind, etc., a propósito de las diferentes formulaciones del número natural. Según Russell, con el fin de proporcionar al concepto de número con alguna extensión, que sea real, tenemos que comprender "el número como el número de una cantidad" y proporcionar una aplicación para el concepto así definido demostrando la existencia de conjuntos de cardinalidad arbitraria (Otte, 2003, 222).

[5] La caracterización de los números naturales según la teoría de conjuntos o según la axiomática de Peano no agotan las formalizaciones del número natural. Por ejemplo, Bedoya (2003) introduce y relaciona de manera sucinta las axiomáticas de Peano, Pierce y Lawvere (según la teoría de categorías). Oostra (2008) analiza de manera más extensa el artículo *On the Logic of Number* de Peirce, afirmando que Peirce desarrolló una presentación axiomática para N antes que Peano.

De esta manera la intuición aritmética se sustituye por una intuición conjuntista, lo que no deja de ser conflictivo.

Para Frege los números son objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis de los naturales se desarrolló de acuerdo con esa idea. Por el contrario, Dedekind se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de números naturales (Ferreirós, 1998, 52).

El trabajo de Benacerraf (1983) ha dado argumentos de peso para cuestionar las visiones conjuntistas de los números naturales. Benacerraf concluye que los números no pueden ser conjuntos, o conjuntos de conjuntos, ya que existen muy diferentes presentaciones del significado y referencia de las palabras numéricas en términos de la teoría de conjuntos. El número 3 no es ni más ni menos que aquel que es precedido por 2 y 1 (y, en su caso, el 0)[6], y seguido por 4, 5, etc. O, de manera más precisa, es un objeto que está precedido por dos (o tres) objetos en un orden preestablecido y seguido por infinitos también ordenados, de tal manera que dos elementos definidos como "contiguos" lo serán siempre. Con otras palabras, cualquier objeto puede desempeñar el papel de 3; esto es, cualquier objeto puede ser el tercer elemento en alguna progresión (preestablecida de manera arbitraria). Lo que es peculiar a 3 es que él define ese papel - no por ser un paradigma de ningún objeto que lo juegue, sino por representar la relación que cualquier tercer miembro de una progresión guarda con el resto de la progresión.

> "Por tanto, los números no son objetos en absoluto, porque al dar las propiedades (necesarias y suficientes) de los números simplemente caracterizamos una *estructura abstracta* - y la distinción está en el hecho de que los 'elementos' de la estructura no tienen ningunas propiedades distintas de las que relacionan unos con otros 'elementos' de la misma estructura" (Benacerraf, 1983, 291).

Una vez que tomamos conciencia de que, además de los símbolos indoarábigos, 1, 2, 3,…, podemos usar una infinita variedad de "objetos" (perceptibles, manipulables o mentales) para expresar el tamaño de las colecciones finitas de otros objetos debe resultar conflictivo decir que los números naturales son, 1, 2, 3… La única solución es aceptar que un número natural es un elemento de *cualquier sistema numeral* y el conjunto de los números naturales es la clase de sistemas numerales, no un sistema numeral particular. Ahora bien, como todo sistema numeral viene caracterizado por una estructura u organización recursiva específica (los axiomas de Peano, por ejemplo) también podemos decir que *el conjunto de números naturales se caracteriza por la estructura de cualquier sistema numeral*. Cada número particular será un elemento de dicho sistema.

En la vida cotidiana y en la práctica escolar los números naturales se asimilan al sistema de símbolos y palabras numéricas, 1, 2, 3…, uno, dos, tres…, one, two, three…, pues estos sistemas numerales constituyen *sistemas naturalmente ordenados,* sistemas que cumplen los axiomas de Peano. Pero el maestro debe

6 ¿Es el cero número natural? El desarrollo histórico establece que el 0 se introdujo tardíamente por la matemática hindú (siglo VIII) y, por lo tanto, no goza del marchamo de "naturalidad"… Sin embargo, en la actualidad, no hay consenso entre los matemáticos. Así, por ejemplo, algunos investigadores en Teoría de Números prefieren no reconocer el cero como un número natural, mientras que otros, cuyo campo de investigación es la Complejidad de Algoritmos, sostienen la postura opuesta.

tomar conciencia de que cuando considera la serie de símbolos, 1, 2, 3…, como los números naturales, está haciendo uso de una *metonimia*, esto es, tomar la parte por el todo: no es lo mismo un ejemplar particular que la clase o tipo al que pertenece.

El profesor de matemáticas debe conocer que la expresión "El conjunto **N** de los números naturales" induce a confusión, ya que fuerza a pensar en una secuencia de objetos, identificables de manera unívoca. Con ella se oculta la arbitrariedad de la naturaleza de los objetos que forman los sistemas naturalmente ordenados, o simplemente a identificarlos con los símbolos numerales indoarábigos 1, 2, 3…

Dada la abstracción que supone este discurso teórico, la enseñanza de los números en los niveles de educación primaria deberá limitarse a los componentes operatorios (situaciones de cardinación y ordenación, lenguajes y técnicas), evitando definiciones innecesarias para el trabajo efectivo con los números.

La figura 4 representa la pluralidad (sin buscar la exhaustividad) de significados informales y formales de los números naturales. Las situaciones de cardinación han sido abordadas por diversas culturas mediante prácticas e instrumentos diferentes, dando lugar a objetos "número" diferentes. Estas diversas configuraciones numéricas son articuladas en nuevos contextos de uso formales dando lugar a distintas construcciones numéricas[7].

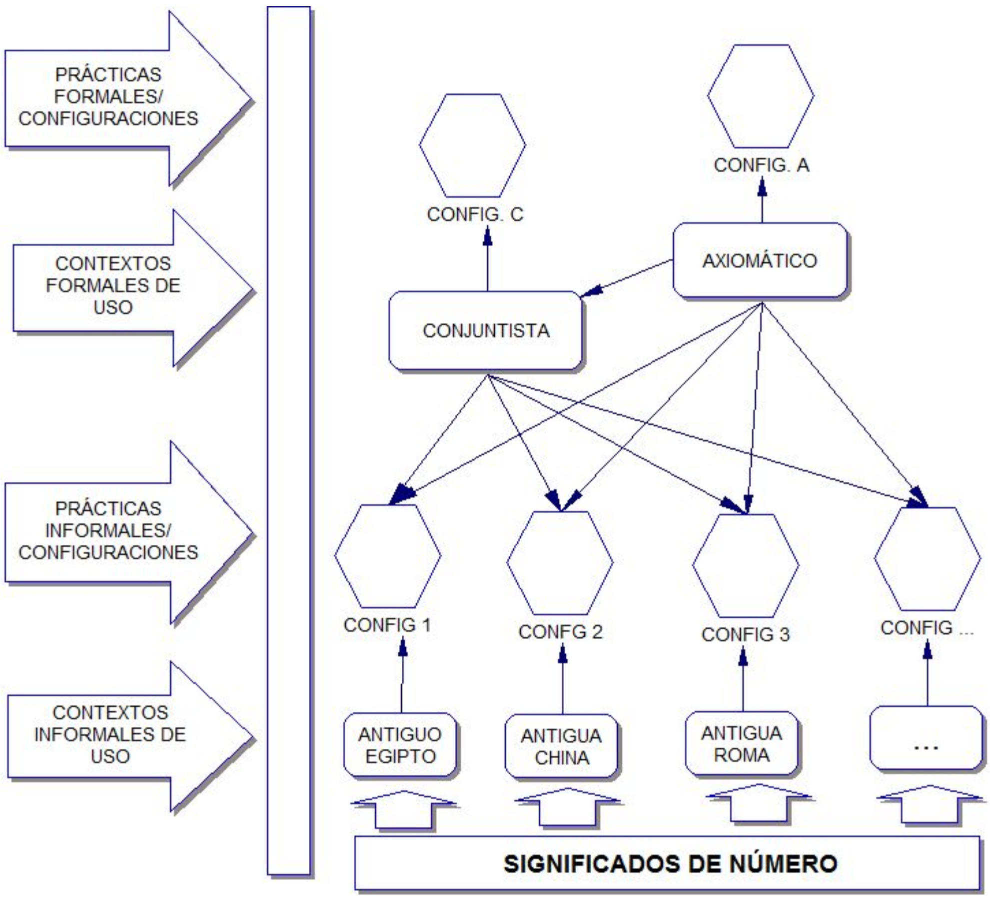


Figura 4: Pluralidad de significados de los números

[7] En la figura 2 el contexto "conjuntista" refiere a las construcciones de N basadas en la coordinabilidad de conjuntos, mientras que "axiomático" a las basadas en los axiomas de Peano (u otros equivalentes).

Es importante resaltar que las prácticas informales no tienen una existencia meramente "histórica". Coexisten en el tiempo con la formalización científica en las prácticas usuales de las escuelas y determinan el progreso de los significados personales. No son un "mal menor", sino hitos necesarios en el desarrollo cognitivo de los niños y consustanciales a los procesos de transposición didáctica.

5. Análisis del episodio y reflexiones finales

En la respuesta del estudiante: *"Un signo que designa una cantidad",* se pone de manifiesto una manera de concebir los números, que proviene de la experiencia empírica de uso de los números, pero que puede servir de base para describir de manera "rigurosa", "lo que son los números". Cualquier sistema de signos que pueda cumplir el papel de designar cantidades (discretas o discretizables) estará formado por un primer elemento y una función siguiente unívoca, en definitiva, un sistema de "objetos" que cumple los axiomas de Peano, o una axiomática equivalente (Peirce, Dedekind).

Ciertamente que el conjunto cociente asociado a la relación de equipotencia definida entre los conjuntos finitos constituye un sistema "naturalmente ordenado", y por tanto, cumple los axiomas de Peano. Son también los números naturales. Pero no hay razón matemática ni filosófica para privilegiar la configuración de objetos y significados de la construcción logicista de los números. La comprensión de los números requiere, en particular, articular esta configuración con la generada a partir de los axiomas de Peano, que es semejante a la construcción elaborada por Dedekind (1888).

Además, hay que tener en cuenta que la formalización matemática no agota todos los usos de los números. Cuando un niño pequeño solicita presionar el botón del ascensor del piso donde vive, sabe que el número que ahí aparece representa un lugar en una botonadura, no el número de personas que viven, ni los años que él tiene, ni ninguna otra cantidad. De manera similar, cuando juega al juego del pañuelo y sale corriendo cuando se nombra su número entiende que es una forma de designación de una persona, no el número de personas que deben salir o que constituyen el equipo. Este uso como ordinal, o como código, hace que tanto la respuesta del estudiante como del profesor formador sean restrictivas. Por ejemplo, ¿qué hubiera dicho el profesor si un alumno contesta a la pregunta qué es el número con "signo que designa la posición de un objeto en un una colección ordenada"?

Los números, la aritmética, es la respuesta social al problema de comunicar el tamaño o numerosidad de los conjuntos, de ordenar una colección de objetos y de analizar procesos iterativos-recurrentes. Pero cada pueblo, cada forma de vida comenzó dando su propia respuesta a este problema. En principio cada sociedad, cultura, etapa histórica, tiene sus propios números, y su propia aritmética asociada, distinguible según la configuración de objetos y significados que la caracteriza. En cada configuración existen objetos organizados de manera recursiva, con un primer elemento, y un siguiente determinado de manera unívoca para cada elemento. Estas organizaciones son las que permiten solucionar los problemas genéricos de la cuantificación, la ordenación, la iteración y la codificación. Una mirada retrospectiva a todas estas configuraciones es la que permite identificar las regularidades que hoy describimos como *número natural* (Rotman, 1988).

Desde un punto de vista del aprendizaje, esto es, de la construcción de significados personales, los números aparecen inicialmente en formas repetitivas de expresión (///.., uno, dos,…), ligadas a gestos y movimientos corporales (señalar, apartar, caminar,…), en definitiva en representaciones actuativas.

> "Inicialmente esto da lugar a una concepción ordinal del número, como actividad rítmica corporal que tiene lugar en el tiempo, y como conjuntos icónicos de marcas que resultan de simbolizar la actividad repetitiva mediante la que fueron creados. La experiencia de completar tales actividades con su resultado final, como un conjunto de marcas o un recuento final, también da lugar a una concepción cardinal de número como una representación de la cantidad" (Ernest, 2006, 87).

En este proceso de desarrollo inicial del número la noción más importante es la de "siguiente" (inmediato sucesor). Otro principio central posterior es la correspondencia uno a uno en el emparejamiento de signos a objetos. El aprendizaje del sistema morfosintáctico de los números naturales y del recuento supone que el alumno sea capaz de participar en ciertas prácticas sociales, y en particular que pueda enunciar o producir signos numéricos de manera pertinente. La apropiación de estos significados de una manera creativa requiere varios años de intenso aprendizaje y supone, no solo el uso de los números para la solución de problemas prácticos y competencia en diferentes sistemas de cálculo y representación, sino también conocimiento de propiedades y relaciones numéricas que justifican los procedimientos y aplicaciones prácticas.

Reconocimiento:

Investigación realizada en el marco del proyecto: SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER.

Bibliografía

Arrieche, M (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España

Bedoya, L. M. (2003). *Peano, Lawvere, Peirce: tres axiomatizaciones de los números naturales*, Trabajo de Grado en Matemáticas. Universidad del Tolima: Ibagué, Colombia. Disponible en: *www.unav.es/gep/TesisDoctorales/Axiomatizaciones.pdf* [2 mayo 2009].

Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En, P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics.* Selected reading, 2nd edition (pp.272–294). Cambridge: Cambridge University Press.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 5-162). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. URL: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

Ferreirós, J. (1998). *Introducción al libro, ¿Qué son y para qué sirven los números? de R. Dedekind.* Madrid: Alianza Editorial.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 67–101.
Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2), 127-135.
Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.
Oostra. A. (2008). *Acerca del artículo On the Logic of Number, de Charles S. Peirce*. Disponible en: www.unav.es/gep/Articulos/AcercaDeLogicOfNumber-Boletin.pdf [2 mayo 2009].
Rotman, B. (1988). Toward a Semiotics of Mathematics. *Semiotica*, 72 (1/2), 1-35.
Spengler, O. (1918). *La decadencia de Occidente*. Madrid: Espasa Calpe, 1958.

Juan D. Godino, Universidad de Granada (España)
Web personal: http://www.ugr.es/local/jgodino

Vicenç Font Moll, Universidad de Barcelona (España)
Web personal: http://www.webpersonal.net/vfont/

Miguel R. Wilhelmi. Doctor en Matemática. Área Didáctica de las Matemáticas Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra (Pamplona, España) miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Mario Arrieche. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Actual coordinador General de Postgrado de la Universidad pedagógica Experimental Libertador-Maracay Venezuela. marioarrieche@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 47-62
ISSN: 1815-0640

Um Estudo Sobre o Desenvolvimento Profissional de Professores Universitários de Matemática Aplicada e a Avaliação Institucional da Docência

Miriam Cardoso Utsumi; Guilherme Henrique Pimentel.

Resumo

Investigou-se em que medida a Avaliação Institucional da Docência de uma Instituição de Ensino Superior, pública, localizada no Brasil contribui para o desenvolvimento profissional do professor de um curso de Matemática e quais as percepções daqueles sobre esse instrumento de avaliação de eficácia do seu trabalho. Constatou-se que o esclarecimento dos reais objetivos da avaliação, a forma de devolução dos resultados e a possibilidade de discussão coletiva são pontos que necessitam de atenção para que o processo auxilie a prática docente e contribua para o desenvolvimento profissional dos professores.

Abstract

Investigated is the extent to which the Institutional Evaluation of the Teaching of an public institution of higher education, located in Brazil contributes to the professional development of mathematics' professors and which the perceptions of those on the instrument of evaluation of effectiveness of their work. It was found that the clarification of the real object of evaluation, how to return the results and the possibility of collective discussion are points that need of attention in order to the process assists the teaching practices and contributes to the professional development of professors.

Resumen

Se investigó en qué medida la Evaluación Institucional de la Docencia de una Institución de Enseñanza Superior, pública, localizada en Brasil contribuye para el desarrollo profesional del profesor de un curso de Matemática y cuáles son las percepciones de aquellos sobre ese instrumento de evaluación de eficacia de su trabajo. Se pudo constatar que el esclarecimiento de los reales objetivos de la evaluación, la forma de devolución de los resultados y la posibilidad de discusión colectiva son puntos que necesitan de atención para que el proceso auxilie la práctica docente y contribuya para el desarrollo profesional de los profesores.

1. Introdução

O ensino superior no Brasil iniciou-se tardiamente se comparado ao dos demais países latino-americanos: os espanhóis fundaram universidades em suas colônias a partir do século XVI, enquanto no Brasil - Colônia, segundo Olive (2002), esse processo não ocorreu até o início do século XIX.

As primeiras faculdades brasileiras – Medicina, Direito e Politécnica – eram independentes umas das outras, localizadas em cidades importantes e possuíam uma orientação profissional bastante elitista: *(...) seguiam o modelo das Grandes Escolas francesas, instituições seculares mais voltadas ao ensino do que à pesquisa* (OLIVE, 2002, p. 32).

De acordo com Anastasiou (2001) o ensino, nas Instituições de Ensino Superior - IES brasileiras seguia o modelo francês-napoleônico, que se caracterizava por uma organização não-universitária, mas profissionalizante, centrado nos cursos/faculdades, visando a formação de burocratas para o desempenho das funções do Estado.

Segundo Olive (2002), a primeira universidade brasileira foi criada em 1920, através do Decreto nº. 14.343. Posteriormente, no governo Vargas (1930-45), uma série de medidas caracterizaram a educação superior no país, entre as mais notáveis tem-se a criação do *Ministério de Educação e Saúde*, a elaboração do *Estatuto das Universidades Brasileiras*, ao qual determinava que uma universidade poderia ser: *oficial* (federal, estadual ou municipal) ou *livre* (particular); determinou também que essas faculdades deveriam ser ligadas por meio de uma reitoria, por vínculos administrativos, mantendo, no entanto, a sua autonomia jurídica.

Essas mudanças proporcionaram um grande desenvolvimento do Ensino Superior brasileiro. O Estado de São Paulo pleiteava a criação de uma universidade de alto padrão acadêmico-científico. O movimento de criação da universidade foi liderado por Fernando de Azevedo e culminou na criação da Universidade de São Paulo - USP em 1934.

Desde então o Ensino Superior no país passa a ter novas características: de acordo com Masetto (2003), com a criação da USP surge uma nova proposta que perdura até os dias atuais. Nesta proposta de ensino o docente deveria *além de dar aulas, fazer pesquisas, produzir conhecimento, divulgar e discutir com seus pares os estudos feitos [...]* (p.8).

Entretanto, como revelado por Benedito, Ferrer e Ferreres (1995), há muito, a docência tem sido vista de forma restrita, ao ser identificada somente com as atividades que o professor exerce quando está na sala de aula com os alunos.

Percebe-se que o perfil do professor universitário extrapola os limites do conhecimento aprofundado da matéria de sua especialização e a aquisição de habilidades necessárias para conduzir pesquisas, assumindo dimensões mais amplas, que ultrapassam os limites da sala de aula, envolvendo o todo institucional e o espaço fora dele.

Dessa forma, uma reflexão sobre o desenvolvimento profissional do professor e do trabalho docente, passa pela reflexão sobre as condições oferecidas pelas IES, ou seja, pela avaliação dessa instituição. De acordo com Pavan (2005) a avaliação institucional no Brasil data da década de 1960.

Como as Instituições de Ensino Superior têm identidade própria, que necessita ser respeitada, cada uma deveria construir seu modelo de avaliação, a partir de sua história, contexto e prioridades, além disso, como alertado por Neves (2002), as Universidades Públicas brasileiras por ocuparem posição fundamental no cenário acadêmico nacional apresentam diferenças quanto ao formato institucional, à vocação acadêmica, às demandas e às expectativas profissionais que devem ser levadas em conta.

Contudo, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP, através do SINAES (Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Superior) estabelece exigências, normas e objetivos para a avaliação interna de cada IES que entraram em vigor a partir de 1º de Setembro de 2004. Entre os principais objetivos estão:

> *(...) aumentar a consciência pedagógica e capacidade profissional do corpo docente e técnico-administrativo, fortalecer as relações de cooperação entre os diversos atores institucionais, tornar mais efetiva a vinculação da instituição com a comunidade, julgar acerca da relevância científica e social de suas atividades e produtos, além de prestar contas à sociedade.* (BRASIL, 2004, p. 7)

E expressa a avaliação institucional como um:

> *(...) processo contínuo por meio do qual uma instituição constrói conhecimento sobre sua própria realidade, buscando compreender os significados do conjunto de suas atividades para melhorar a qualidade educativa e alcançar maior relevância social.* (BRASIL, 2004, p. 5).

Desta forma pode-se notar que o processo de avaliação interna da instituição pode ter um importante papel na averiguação do ensino e no desenvolvimento da IES, possibilitando identificar fragilidades e sendo um importante instrumento para a tomada de decisão.

A atenção desse estudo, em particular se foca sobre um aspecto isolado da avaliação institucional, a do trabalho docente, apesar de considerarmos como Dias Sobrinho e Ristoff (2000) que:

> *[...] a avaliação institucional deve procurar estabelecer uma compreensão de forma razoavelmente integrada e articulada do conjunto da universidade, através da compreensão das partes. A compreensão dos aspectos isolados deve se dar no esforço de integração desses elementos com as diversas outras dimensões constitutivas do todo*. (p. 106)

Acredita-se que a avaliação institucional docente poderia contribuir para o aperfeiçoamento profissional do professor, se entendida como um instrumento de desenvolvimento humano e social que possibilita o autoconhecimento e sinaliza os acertos e equívocos de suas práticas, favorecendo a motivação e transformação daquelas práticas, ou ainda como asseverado por Pavan (2005):

> *(...) na medida em que lhe proporcione parâmetros de comparação, contribuindo para que este reflita sobre sua própria prática, melhorando seu desempenho, expandindo seus conhecimentos e capacidades e fundamente propostas efetivas de formação*

> *continuada e profissionalização por parte das instituições de ensino.* (p.12)

Nesse sentido, acredita-se que avaliações institucionais desse tipo tenham caráter pedagógico como colocado por Dias Sobrinho (2005):

> *[...] A avaliação institucional não é instrumento de medida de atividade de indivíduos isolados, nem de trabalhos descolados de seus meios de produção; não é mecanismo para exposição pública de fragilidades ou ineficiências de profissionais individualizados. A avaliação deve ser promovida como um processo de caráter essencialmente pedagógico. Não se trata apenas de conhecer o estado da arte, mas também de construir.* (p.61)

Posto isso, este estudo buscou analisar em que medida a Avaliação Institucional da Docência contribuía para o desenvolvimento profissional do professor do Departamento de Matemática Aplicada e quais as percepções desses professores sobre esse instrumento de avaliação de eficácia do trabalho docente.

Sendo assim, nesse momento, considera-se fundamental esclarecer como alguns aspectos da prática docente estão sendo entendidos no presente estudo.

Entende-se desenvolvimento profissional como uma mudança “de dentro para fora”, que envolve a mudança de conceitos e de crenças relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem (GONÇALO, 2002). Logo, o desenvolvimento profissional estaria intimamente ligado com a motivação do docente.

A Motivação é aqui entendida dentro de duas abordagens: “a abordagem psicológica que utiliza vários conceitos como satisfação no trabalho, satisfação ocupacional e satisfação com a vida e a abordagem sociológica que se concentra na socialização e na carreira do professor” (BACHLER, MOREIRA, FARRELL, SWAN, e outros, como citados em MOREIRA, 2005, p.211).

Dessa forma Satisfação, Insatisfação, Investimentos na Carreira e Comprometimento foram alguns dos aspectos investigados para aferir a Motivação.

Moreira (2005) analisou diversas fontes de satisfação no trabalho, tendo-as dividido em três formas de recompensas: a recompensa intrínseca, a extrínseca e a complementar. As recompensas intrínsecas consistiriam inteiramente de avaliações subjetivas feitas com relação ao engajamento no trabalho e seriam visíveis somente à própria pessoa. As recompensas extrínsecas são normalmente associadas aos benefícios relacionados com as funções exercidas pelo indivíduo em uma determinada instituição. E por fim as recompensas complementares que têm uma dimensão objetiva e subjetiva.

O Investimento na Carreira de professor diz respeito aos recursos individuais que são destinados para a preparação e continuidade na profissão, mas que não podem ser recuperados se o professor desiste da carreira (RUSBULT e FARRELL citados em MOREIRA, 2005, p. 224). Moreira (2005) sugere ainda, que esse investimento pode ser constatado por fatores intrínsecos ao trabalho como anos de serviços prestados; ou por fatores extrínsecos ao trabalho realizado, como investimentos na sua moradia e os amigos conquistados no trabalho.

Finalmente, o comprometimento com os alunos se refere aos cuidados com as necessidades daqueles. De acordo com Moreira (2005) essas preocupações podem incentivar os professores a incluir alunos com problemas pessoais em seu planejamento e inserir atividades diferentes em sua prática, motivando os participantes e a si próprio.

Reitera-se novamente que as competências exigidas ao professor universitário ultrapassam o conhecimento especializado do conteúdo e suas habilidades na condução de pesquisas. Apesar de se acreditar que o desenvolvimento profissional do professor resulte também de um aprofundamento do conhecimento sobre si mesmo como pessoa e do seu papel na instituição de ensino e na comunidade, entende-se como Pavan e Fernandes (2006) que não somente das condições pessoais depende o desenvolvimento profissional do professor, mas também da ética e da intencionalidade da instituição na qual ele está inserido.

2. Metodologia

Foi realizada uma pesquisa *descritiva* de natureza *qualitativa* (GIL, 1999) com nove docentes que lecionam para o curso de Matemática do Departamento de Matemática Aplicada, de um Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação localizado em um campus de uma IES pública do interior do Estado de São Paulo, Brasil.

O referido Instituto apresentava, segundo dados obtidos em 2007, 120 docentes contratados, divididos em 14 docentes titulares[1], 25 associados[2] e um total de 81 professores doutores. No referido departamento são encontradas proporções semelhantes de docentes titulares, associados e doutores.

Balbachevsky (2007) classifica as Instituições Ensino Superior em Regionais, de Mercado e de Pesquisa levando em consideração a proporção de doutores no corpo docente das instituições e a proporção de docentes com tempo integral ou dedicação exclusiva, por esse tipo de classificação fornecer mais informações sobre as condições de trabalho dos docentes do que a classificação em pública ou particular.

As IES de pesquisa seriam aquelas com corpo docente com mais de 50% de doutores e mais de 70% contratados em regime de tempo integral ou dedicação exclusiva. Portanto, a IES e conseqüentemente o Instituto, campo da pesquisa, pode ser classificada, segundo Balbachevsky (2007) como uma IES de pesquisa.

O quadro de docentes do Departamento de Matemática Aplicada, no segundo semestre de 2008 apresentava 28 docentes, sendo que 12 deles haviam sido contratados há menos de cinco anos. Para esse estudo optou-se por investigar os docentes que possuíssem mais de 5 anos no Instituto por acreditar que esses docentes poderiam ter uma percepção maior do impacto da avaliação institucional em seu desenvolvimento profissional, por terem-na vivenciado nesse período.

Foram enviados mails para os endereços eletrônicos institucionais dos 16 professores que possuíam mais de 5 anos de docência no Instituto e ao

[1] Máxima progressão na carreira docente (MS – 6).
[2] Professor Livre Docente (MS-5).

coordenador do curso de matemática aplicada e computação científica, disponíveis na homepage do Instituto, explicando os objetivos da pesquisa e com um convite para responder algumas questões sobre formação, perfil profissional, percepções sobre a avaliação institucional da docência e sobre seu trabalho docente.

O convite foi aceito por oito docentes, além do coordenador, o que corresponde a 53% dos docentes do Departamento. Mesmo não tendo cinco anos de experiência docente no Instituto, o coordenador do Curso também foi entrevistado devido ao cargo exercido. Desta forma a amostra de pesquisa pode ser considerada uma *amostragem por acessibilidade*. (GIL, 2006)

Dos nove participantes, um era coordenador do curso, outro era suplente de coordenação do mesmo curso e outro, diretor do Instituto.

A análise dos dados foi realizada com base em quatro temas: satisfação/insatisfação, comprometimento, investimento profissional e fase da carreira, através de *categorização* (BARDIN, 2005) de informações, que possibilitaram comparações nas respostas dos entrevistados.

O Quadro I sintetiza algumas características dos nove participantes que aceitaram participar da pesquisa, que foram agrupados e renomeados de A a I conforme a realização das entrevistas.

Quadro I: Síntese das características dos entrevistados

Participantes	Gênero	Ano de admissão	Graduação	Estágio na Carreira
Docente A	Masculino	1980	Bel. Matemática	Avançado
Docente B	Masculino	1980	Lic. Matemática	Avançado
Docente C	Feminino	2003	Bel. Matemática A	Inicial
Docente D	Masculino	1992	Bel. Matemática	Avançado
Docente E	Masculino	2004	Engenharia Mecânica	Inicial
Docente F	Masculino	1988	Engenharia Elétrica	Avançado
Docente G	Masculino	2002	Bel. Matemática	Intermediário
Docente H	Masculino	1981	Bel. Matemática	Avançado
Docente I	Masculino	2003	Engenharia Elétrica	Inicial

Os professores foram categorizados pelos seus *estágios na carreira*, com base em uma classificação realizada por Moreira (2005): *estágio inicial na carreira (5 anos de experiência ou menos); estágio intermediário (6 a 12 anos de experiência) e estágio avançado na carreira (13 anos de experiência ou mais)*.

A maioria dos docentes participantes dessa pesquisa se encontrava em um *estágio avançado* na carreira, apenas um docente no estágio intermediário e os outros três no estágio inicial.

3. Resultados e discussão

A instituição de ensino superior da qual o Instituto, lócus da pesquisa, faz parte, foi fundada em 1934 através do Decreto Estadual 6283/34, e é a maior instituição superior da América do Sul. É uma universidade pública e gratuita, com acesso aberto a alunos que cursaram o ensino médio na rede pública ou particular, selecionados por sistema de vestibular, e é mantida pelo governo do Estado de São Paulo, Brasil.

O Instituto teve origem[3] como *Departamento de Matemática* de uma Escola de Engenharia em 1953. Em 1970, parte dos docentes do *Departamento de Matemática* e de outros departamentos dessa Escola passaram a constituir o *Departamento de Ciências de Computação e Estatística*. E, em 1971, foi criado o Instituto de Ciências Matemáticas, constituído pelos Departamentos de **Matemática** e de **Ciências de Computação e Estatística**, então desvinculados da referida Escola.

Atualmente, a IES é constituída por aproximadamente 56.000 alunos de graduação, 22.000 alunos de pós-graduação[4], funcionários administrativos e docentes, além de grande contingente de pessoas que utilizam suas bibliotecas, museus, laboratórios e demais serviços.

Em 1992, com a criação da Comissão Permanente de Avaliação (CPA), composta por três membros da Comissão Especial de Regimes de Trabalho (CERT) e três da Comissão de Atividades Acadêmicas (CAA), mais um representante discente, o Conselho Universitário (Co) deliberou[5] que o mais interessante seria fazer uma avaliação departamental e que inserida nesta auto-avaliação estaria a avaliação individual de cada docente. O grupo entendia que seria muito difícil a Universidade fazer avaliação individual do docente, pois se perderia a perspectiva e o panorama daquele docente que trabalha integrado a um setor que é o Departamento. Portanto, a proposta é que haveria uma avaliação departamental e que a Comissão, composta pelos membros da CERT e da CAA, em sua totalidade, coordenariam os trabalhos dessa avaliação (Resolução nº 4928[6], de 17 de maio de 2002, publicada no D.O.E. em 22 de maio de 2002).

Ensino, pesquisa e extensão constituem a tríade do ensino superior, sobre a qual deveria se assentar o trabalho do profissional da universidade. De acordo com o Relatório de Gestão da Pró-Reitoria de Graduação (SÃO PAULO, 2007) na atuação docente essas três dimensões se articulam de forma indissociável.

A prática docente é um dos focos da avaliação institucional (avaliação institucional da docência) e tem como finalidade o aperfeiçoamento do ensino, da pesquisa e da extensão desenvolvidos pela Unidade de Ensino. Assim, a avaliação poderia ser considerada um instrumento de aperfeiçoamento e transformação individual e coletiva, pois é o conjunto das ações dos docentes que garantirá o cumprimento das metas institucionais.

[3] Informação disponível em: http://www. [nome do instituto]. [nome da instituição].br/historia.php. [Acessado em 14/10/08].
[4] Informações disponíveis em: http://www4.[nome da instituição].br/index.php/a-[nome da instituição]. [Acessado em: 14/10/08].
[5] Informativo nº 90 da Associação dos Docentes da [nome da instituição] , de 15 de fevereiro de 2001.
Disponível em: http://www.[nome da associação].org.br/noticias/Informativo/90/inf9009.html#Normas. [Acessado em: 14/10/08].
[6] Disponível em: http://www. [nome da associação].org.br/ldireta/rs_4928.htm. [Acessado em: 14/10/08].

No Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, a avaliação institucional

> "começou há muito tempo atrás com um grande investimento da [nome da instituição], até mesmo na compra de uma máquina leitora, que custou meio milhão de reais naquela época, e que obrigava os alunos a usarem uma folha especial para responder os questionários."(Professor A)

Um processo que demanda tamanhos recursos financeiros e humanos necessita de acompanhamento constante a fim de aprimorá-lo. Dessa forma, entende-se ser necessário também conhecer a visão dos docentes sobre esse processo e como eles percebem a sua importância para o desenvolvimento de suas práticas e para o desenvolvimento da instituição de ensino.

A satisfação no trabalho é caracterizada por uma resposta emocional positiva associada à experiência da pessoa na totalidade dos papéis e atividades no trabalho. (STAW, citado em MOREIRA, 2005, p. 215). Entre os aspectos que trazem satisfação, os docentes citaram como principais "dar aulas" e "pesquisar", como pode ser observado nos extratos que se seguem:

> "Desde quando fui contratado aqui na [nome da instituição] há 28 anos, as aulas é a parte do trabalho que mais me agrada, me fascina, e me motiva na busca de novas formas de comunicação, pois a matemática que se ensina na graduação é um assunto bem definido. Mas a forma de comunicação, a motivação é diferente! Em diferentes cursos, busca por exemplos motivadores e isso tudo me agrada muito. As aulas são o que mais me agrada, somos contratados para isso." (Professor A).

> "Eu gosto da graduação, é o inicio de tudo dentro da universidade, e me motiva dar aulas. Gosto do contato com os alunos; é uma oportunidade de passar o conhecimento para os alunos e aprender também. E também gosto de pesquisa, ultimamente estou motivada com as pesquisas aplicadas com maiores impactos sociais, dentro da minha área. Gosto do que a [nome da instituição] me oferece, dessas facetas de poder dar aulas e de fazer pesquisa." (Professora C).

> "Gosto de ser professor e gosto também da pesquisa e das orientações." (Professor H)

> "A Pesquisa científica é com certeza o que mais me traz satisfação, essa atividade me dá o maior prazer" (Professor G).

Desta forma percebe-se que para os docentes entrevistados, a satisfação está atrelada a esses dois pilares – ensino e pesquisa, reconhecendo a prática docente como fator de satisfação profissional. Porém, na universidade, segundo um dos docentes entrevistado, existe uma valorização maior da pesquisa científica, o que pode refletir na satisfação e na dedicação do docente, como é visto no extrato a seguir:

> "Isso é uma coisa que deve ser bem esclarecida: quando uma pessoa é contratada numa instituição pública é contratada para dar aulas, todas as outras atividades como pesquisa, ensino na pós-graduação, cultura e extensão são atividades que são secundárias, pois não são elas que provocam a abertura para uma nova vaga para um professor ser contratado. Três pilares ensino, pesquisa e extensão, com a atividade de professor como a mais importante." (Professor A).

Esse extrato parece revelar a necessidade, na visão do professor, da retomada de alguns aspectos da prática docente, uma revalorização do ensino na universidade. Uma avaliação institucional que deixe claro quão importante o ensino é importante para a Instituição, não apenas com discurso, pode ser fundamental para esse processo.

A *insatisfação no trabalho é caracterizada por uma resposta emocional negativa resultante da avaliação no trabalho como ignorar, frustrar ou negar os valores do trabalho* (LOCKE, como citado em MOREIRA, 2005, p. 217). Neste estudo, os docentes afirmaram que a parte burocrática do trabalho docente é o principal problema e interfere diretamente na insatisfação, como pode ser observado nos recortes a seguir:

> "Não tenho. Eu realmente sou muito contente com meu trabalho, não há nada no meu dia a dia que me desagrade. Se alguém declarar que as aulas é a parte que desagrada, acabou entrando no emprego errado. Existem algumas coisas que não chegam a serem desagradáveis, mas são problemáticas. A parte administrativa e burocrática, decorrentes, sobretudo, das exigências que necessitam de uma formação específica, como ser advogado ou economista, que nós não temos." (Professor A).

> "Sempre tem insatisfações, como brigas por pequenas coisas, o ciúme, as dificuldades burocráticas, são empecilhos pequenos na verdade, mas que trazem muita dor de cabeça." (Professor B).

> "A quantidade de trabalhos burocráticos, que poderiam ser feitos por outras pessoas e não pelos docentes, como por exemplo, os relatórios, que tomam tempo de ensino, pesquisa e outras atividades." (Professor D).

> "Corrigir provas, burocracias demais, mas que não tem jeito de fugir, como comissões demais, que tomam tempo do pesquisador e do professor." (Professor E).

Percebe-se então que os aspectos de insatisfação estão relacionados à fatores extrínsecos ao trabalho. Porém para alguns docentes, outros aspectos estão ligados à insatisfação, como o "descaso dos alunos", que são aspectos de não-satisfação, e, portanto intrínsecos ao trabalho, como constatado no recorte a seguir:

> "Um pouco é a burocracia, que demanda muito tempo. Às vezes temos que preencher o mesmo papel dez vezes, e devia ser mais centralizado, é um fluxo de papéis desnecessário. Também o descaso dos alunos. A gente tenta fazer muitas coisas para tentar motivá-los e eles não ligam. Eles acham que o conteúdo não serve para nada" (Professora D).

Alguns docentes afirmaram existir uma grande dificuldade em motivar os alunos na sala de aula, o que certamente influencia no aprendizado e no desenvolvimento das aulas:

> "Os resultados que os docentes estudam e publicam ficam muito distantes do conhecimento dos alunos da graduação, e alguns docentes sentem dificuldades nessa parte. Eu tive sorte com meu doutorado que não se distancia da graduação, posso comunicar meu trabalho de pesquisa aos alunos, com algumas omissões, levar a eles o prazer da pesquisa. Por isso que às vezes acontece o fenômeno de alguns docentes ficarem um pouco distante da graduação pela dificuldade de se comunicar, e, por isso os docentes sentem mais atração de dar aulas para o doutorado do que para a graduação, por falar uma língua muito semelhante [a dos doutorandos]. Isto conseguimos entender, mas não devemos aceitar, o

> pesquisador é contratado primeiramente para dar aulas, a vaga aberta na universidade é para a docência.” (Professor A)

Quando questionados sobre o Investimento na Carreira, os docentes citaram investimentos na pesquisa científica e argumentaram que esses foram alicerçados em: estudos, participação em congressos, atualização através de livros e revistas, contato com pesquisadores de todo o mundo, etc. Posteriormente quando indagados sobre os investimentos que faziam para a sua atividade docente, alguns professores afirmaram investir também nesse aspecto, como se observa:

> “Invisto fazendo cursos, participando de congressos, me atualizando sobre os temas de pesquisas mais atuais. Na docência invisto em preparação de aulas.”(Professor D).

> “Muito, sempre fazendo, tendo contato com professores estrangeiros ou de outras unidades, me mantendo atualizado com as pesquisas participando de congressos e sempre lendo os últimos números dos melhores periódicos. O segundo ponto, o primeiro ponto é a pesquisa e o segundo é a docência, sou muito satisfeito e sempre procuro livros mais atuais, aplicações novas para motivar os alunos.” (Professor F).

> “Na docência sempre invisto, nunca uma aula é a mesma que a anterior, e isso gera uma interação muito grande com a classe. Preparo transparências adicionais, pois naturalmente sou mais clássico: giz e lousa” (Professor H).

Todavia, os docentes não citaram as formas pelas quais investem de fato na carreira de docentes. Contudo, como pode ser observado nos extratos a seguir, alguns reconhecem essa necessidade de uma forma geral para todos os docentes do Instituto e manifestam interesse por ações que contribuam para a compreensão e mudança das práticas pedagógicas universitárias, citando inclusive uma ação da Pró-reitoria de Graduação da Instituição:

> “Procuro me atualizar, procuro participar de cursos. Em pesquisa é fácil, pois a gente é cobrada por isso. Quanto à docência, procuro fazer leituras, na questão de relacionamento professor-aluno procuro participar de workshops, mas não tem sido fácil. A gente tem um tempo muito curto e até acho que deveria estar fazendo aquele curso que a [nome da instituição][7] está oferecendo, mas é em Ribeirão[8], mas é difícil, e não fui por falta de tempo, se o curso for realizado no [nome do instituto], e acho que é essa a tendência, com certeza vou participar.” (Professora C).

> “Tem que investir sempre. Invisto fazendo pesquisa. Bom, e pretendo investir mais na área didática, que é uma falha de todos os professores daqui. Pretendo fazer o curso [Curso de Pedagogia Universitária] e tem mais professores que vão fazer quando for aqui.” (Professor E).

O curso a que os docentes entrevistados se referem foi elaborado após a organização de dois Seminários sobre o tema, realizados no ano de 2006 e é uma ação efetiva da Pró-Reitoria de Graduação, na busca de um melhor desenvolvimento da docência no ensino superior. A universidade, reconhecendo a desvalorização da docência principalmente em nível de graduação, tem envidado esforços como o fornecimento de uma lista de elementos para repensar a avaliação

[7] A Instituição, por meio da sua Pró-Reitoria de Graduação, vinha oferecendo desde 2007 um Curso de Pedagogia Universitária em alguns de seus campi para professores e coordenadores de curso que desejassem participar.
[8] Ribeirão Preto, cidade a 116 km de São Carlos.

do trabalho docente com o objetivo de valorizar a atuação nas atividades de ensino da graduação, pois como constatado na fala da Professora C, a cobrança do Departamento, da Instituição é na atividade de pesquisa.

Nenhum outro entrevistado manifestou ter participado ou estar participando do referido Curso, não sabemos se por não estarem participando ou se por não associarem esse tipo de participação como investimento na carreira de professor.

O comprometimento dos docentes com os alunos pode ser observado nos extratos a seguir:

> "Me considero [comprometido com a aprendizagem], pois o que me importa não é se o aluno passa ou não, se tira média cinco ou não, me interessa saber se o aluno sai do curso sabendo o mínimo necessário para continuar na carreira. Quando um aluno [está] na aula só para tirar nota, me deixa entristecido, pois ele não tem interesse em aprender." (Professor D).

> "Sempre cobrando eles, com provas que exigem o máximo do conhecimento deles, listas de exercícios que auxiliam no aprendizado. Me preocupo se o aluno tirou nota baixa, se faltou à prova, eu tento fazer o possível pra recuperá-lo" (Professor F).

Os docentes participantes do estudo relacionam mais o comprometimento com a aprendizagem dos alunos com o processo de preparação das aulas, ou ao fato de buscar novas técnicas de exposição. Isso talvez decorra de uma idéia, que persiste historicamente segundo Anastasiou (2004), de que ensinar, era apresentar ou explicar o conteúdo por meio de uma exposição clara, o que a grande maioria dos docentes procura fazer com a máxima habilidade de que dispõe. Daí a busca por técnicas de exposição ou oratória, como sendo o elemento essencial para a competência docente.

Entrementes um dos entrevistados afirmou que procura experiências novas que facilitem ou promovam a aprendizagem dos alunos, não se limitando a técnicas de exposição. No caso específico citado pelo docente, houve uma melhoria no desempenho acadêmico dos alunos:

> "Uma outra experiência que fiz no semestre passado foi de estudos dirigidos. Aproveitei que tinha um monitor PAE[9] na disciplina e em um horário extra-classe semanal, os alunos iam participar desses estudos que constavam de um estudo com um exercício ao final. Os alunos poderiam ganhar até um ponto na média no fim do semestre e foi uma atividade muito boa voltando na filosofia de estudar com calma e não na véspera da prova. O aprendizado foi efetivo, porém não é muito fácil fazer isso. Se não tivesse o monitor PAE, não conseguiria." (Professora C).

Os docentes entrevistados entendem que o processo de avaliação institucional da docência é necessário e fundamental, podendo levar os docentes do Instituto a um melhor desenvolvimento da suas práticas, reconhecendo que atualmente os docentes são cobrados apenas pela pesquisa. Os docentes afirmaram também que desconhecem o processo de análise e divulgação dos resultados dessas avaliações, conforme revelam os extratos a seguir:

[9] Programa de Aperfeiçoamento de Ensino. Nesse programa um aluno de mestrado ou doutorado da Instituição faz estágio supervisionado em docência em alguma disciplina de graduação com acompanhamento do professor responsável pela mesma.

> “Avaliação sempre é boa. Os brasileiros não gostam de avaliação, sempre criticam ou fazem mal feitas. Se não servir para punir alguém, que pelo menos sirva para corrigir os erros. Sempre defendi que a parte didática deve ser cobrada e não só a pesquisa, está na hora de avaliarmos melhor a parte didática” (Professor B).

> “Avaliação é sempre importante, mas temos que estruturar um pouco melhor o que fazer com as respostas. Não adianta nada o aluno fazer avaliação e ela ficar parada, temos que pensar numa estratégia para que essa avaliação seja verdadeira. Mas ainda vai demorar um tempo para que ela seja efetiva” (Professora C).

> “Do jeito que é feita [a avaliação institucional] atualmente não serve para muita coisa. Primeiro porque os alunos, quando fazem, fazem para falar mal de algum professor e os alunos que poderiam fazer uma avaliação justa do curso e do professor não têm interesse em fazê-la. É um processo importante, mas teria quer ser desenvolvido algum mecanismo para que somente as pessoas realmente interessadas, que participam das aulas, que apresentem condições para avaliar, fizessem a avaliação e sem que seja por obrigação.” (Professor D).

Observou-se que todos os professores participantes afirmavam dar importância para o processo de avaliação de seu trabalho, relevando a importância da avaliação da docência, porém a forma como é feita a análise e a divulgação dos resultados ainda necessitam ser melhoradas, como relatados pelos extratos anteriores e os a seguir.

> “O grande problema que eu vejo é que a universidade, com boa intenção de ouvir os estudantes para a melhoria da qualidade do ensino, coletou muitos dados e não sabe o que fazer com eles. Isso cria uma ilusão de que estamos avaliando alguma coisa. Sempre que é feito um processo de coleta de dados é necessário ter profissionais para a elaboração do questionário, que não pode ter quaisquer questões, e também ter determinado como fazer a análise dos dados” (Professor A).

Os docentes afirmaram que nunca receberam uma explicação dos objetivos, ou sobre como é realizado o processo ou por quem são analisados os dados da avaliação institucional do Instituto. Afirmaram que os questionários são entregues através de seus escaninhos.

Os docentes com maior tempo no Instituto afirmaram que o processo se tornou automático. Ou seja, a avaliação que se faz presente no Instituto, como afirmado pelo Professor A, é ilusória, não sensibiliza, nem promove mudanças para o corpo discente e nem docente.

> “Recebi, mas ainda não olhei a avaliação. Antigamente a gente recebia a avaliação por completo, atualmente só recebe alguma informação por recado ou coisa assim. Depois que termina a disciplina recebo os resultados. Nunca usei os resultados porque quando recebo alguma crítica, ela não é construtiva.” (Professor D).

> “Os objetivos, se chegou até mim alguma vez eu não dei conta, provavelmente isso deve ter sido passado, talvez como e-mail ou formulário e eu respondi sem perceber” (Professor H).

Os docentes afirmaram que nem sempre recebem os resultados da avaliação institucional, e quando recebem é tardio, algumas vezes um ano após terem lecionado a disciplina. Isso que pode estar indicando uma falha no retorno das avaliações aos professores.

Todavia infere-se, que mais preocupante é a forma como são apresentados os resultados, que pode estar sendo pouco eficaz ou de certa forma confusa, sem um parecer específico dos problemas ou dos pontos mais problemáticos, como ilustrado no recorte a seguir:

> "Sempre acompanhava as avaliações, porque minha aula era interrompida. Depois que os dados eram coletados, recebíamos de volta uma nota sobre as atividades. Uma nota era para o professor, uma para o instituto e uma para a universidade. Nunca recebi um parecer da pró-reitoria. Talvez seja porque nunca recebi notas baixas, e, não sei se buscam apenas os professores com notas baixas para resolver esses problemas pontuais." (Professor A).

Os professores que afirmaram comunicar-se com os demais colegas sobre os resultados da avaliação institucional da docência afirmaram que essas conversas aconteciam informalmente, o que pode ser considerado um obstáculo à reflexão coletiva e sistematizada. E afirmaram que raramente utilizaram os resultados na prática de sala de aula.

Portanto, observou-se que no Instituto pesquisado há um descompasso entre o que provavelmente é a intencionalidade da realização da Avaliação Institucional da Docência e o que de fato ocorre durante os processos de aplicação e análise desta. Parece que esses processos se tornaram um "habitus" que não contribui nem para o desenvolvimento profissional dos professores e nem para a reflexão sobre suas práticas.

Contudo, a visão de ensino do Instituto pode estar mudando. As realizações da universidade como o Curso de Pedagogia Universitária, a elaboração de workshops de graduação que discutem questões sobre a docência, o aprendizado dos alunos e as condições de ensino são pontos que indicam uma preocupação maior com o ensino dentro da Universidade. Porém, o processo de avaliação ainda necessita ser aperfeiçoado.

Um fator que pode desencadear uma mudança no processo de avaliação institucional do Instituto foi a criação de comissões para cada curso, segundo informações da secretaria de graduação e dos docentes, denominadas de COC. Essas comissões são formadas pelo coordenador de cada curso, o suplente de coordenação, três professores e um aluno que passarão a administrar o processo de avaliação da prática docente.

Com relação ao curso de Matemática Aplicada e Computação Científica, a COC pretende eleger um tutor para cada uma das turmas a fim de diminuir a distância dos alunos com a coordenação:

> "A COC irá se reunir uma vez por mês para discutir os problemas do curso. Uma semana antes dessa reunião o tutor vai à sala de aula perguntar os problemas aos alunos e depois será discutido na reunião. Isso sim é avaliação de forma continuada, assim conseguimos melhorar alguns pontos. Fazer avaliação depois que os alunos trancaram a disciplina não adianta. Se for mensal, os resultados podem ser mais rápidos." (Professor E).

Esse novo processo vai ao encontro do pregado por Dias Sobrinho (como citado por PAVAN e FERNANDES, 2006, p. 153) quando ele afirma que a avaliação institucional não deve se restringir a descrever resultados obtidos, mas, procurar "melhorar o processo enquanto ele se desenvolve, agindo sobre cada uma das etapas".

4. Considerações finais

Os dados obtidos evidenciaram que os professores universitários do Departamento de Matemática Aplicada e Computação Científica eram comprometidos com a docência no Ensino Superior, e consideraram que lecionar apresenta sua quota de importância no desenvolvimento do Instituto.

Os professores expressaram também, a intenção em melhorar ou modificar suas práticas na busca do melhor aprendizado dos alunos, porém esse comprometimento não acontecia em virtude dos possíveis resultados das avaliações, o que parece indicar que eles se sentiam motivados a lecionar independentemente da avaliação institucional da docência.

Na verdade, observou-se uma descrença dos professores para com tal avaliação, que, acredita-se, seja devida à percepção que os participantes têm de que são cobrados da Instituição apenas pela pesquisa científica que produzem:

> "A nossa principal atividade é a formação de alunos. A sociedade olha para a universidade pelos profissionais que formamos. No entanto, <u>cada professor internamente é cobrado pela pesquisa</u>, <u>somente pela pesquisa</u>, não tem nenhuma importância se você dá o curso com boa vontade ou não. Existem algumas tentativas de melhorar a qualidade do ensino, mas isso é referente a cada professor, e <u>como somos cobrados somente pela pesquisa</u>, eu vejo os colegas com desinteresse pela formação dos alunos. Mas não sei se isso vai mudar com um questionário." (Professor H, *grifos nossos*).

Deve-se pensar em uma avaliação institucional que faça a mediação do processo de aprendizagem, através de uma iteração entre docentes e alunos. Embasados nessas considerações poder-se-ia pensar em questões que avaliassem de forma mais abrangente o corpo docente e discente. A avaliação deveria compreender questões que confrontassem dados como: a presença dos alunos nas aulas, o desempenho acadêmico, e o desenvolvimento do conteúdo e das aulas.

Para que essas necessidades sejam atendidas, considera-se fundamental um processo de avaliação individual, para que cada aluno expresse suas opiniões[10] e para que o resultado possa ser mais claro e amplo como revelado por um dos docentes:

> "Eu acho que [a avaliação institucional] deveria ser da seguinte maneira: não obrigatória, e que apenas os alunos que mais freqüentassem as aulas pudessem responder, e de forma que se filtrasse alguma desavença por conta de uma nota ou coisa assim. Deveria ser individual, para constatar de acordo com a avaliação, algum aluno que esteja destoando dos demais, e analisar a média das respostas e descartar os extremos; comparado com a freqüência e com o desempenho dos alunos." (Professor D).

[10] Atualmente os alunos fazem a avaliação das disciplinas por meio de um questionário respondido coletivamente, o que gera muitas discussões entre eles e acaba prevalecendo a opinião do grupo que "grita" mais alto.

Sendo assim, constatou-se que a Avaliação Institucional da Docência que acontece no Instituto pesquisado não vinha desempenhando seu papel para o desenvolvimento profissional daqueles docentes, na medida em que ela não era retornada para os professores e não havia uma discussão sobre os resultados obtidos a fim de que pudesse potencializar reflexões que favorecessem a transformação das práticas docentes, buscando assim, o aperfeiçoamento daquelas.

Além disso, os dados parecem evidenciar que o Instituto possuía uma visão de avaliação voltada para o cumprimento de exigências legais. Acredita-se que para que a Avaliação Institucional da Docência pudesse atingir plenamente seus objetivos, o retorno para os docentes deveria ocorrer concomitantemente com a prática analisada e os resultados deveriam ser discutidos com coordenadores ou responsáveis pela instituição, bem como entre os próprios docentes, com vistas a contribuir para o desenvolvimento profissional dos mesmos, como parece ser a tendência revelada pelo Professor E.

A necessidade de um melhor esclarecimento dos reais objetivos da avaliação, a exposição dos resultados e a possibilidade de discussão pelos docentes para que seja possível apontar acertos e assim diminuir erros posteriores, são pontos que necessitam de atenção e certamente conferirão um caráter mais sério e fundamental para o progresso do ensino, contribuindo para o rompimento do “habitus” instalado e retomando seu objetivo transformador.

Bibliografía

Anastasiou L.G.C. (2001): *Temas e Textos da Educação Superior*. Papirus, Campinas.Brasil.

Anastasiou L.G.C (2004): *Ensinar, Aprender, Apreender e Processos de Ensinagem.* En: L.G.C Anastasiou, L. P. Alves (orgs.) Processos de Ensinagem na Universidade: pressupostos para estratégias de trabalho em aula. UNIVILLE, Joinville.

Balbachevsky E. (2007): *Carreira e contexto institucional no sistema de ensino superior brasileiro.* Sociologias 9 (17), 158-188.

Bardin L. (2005): *Análise de Conteúdo*. Edições 70, São Paulo. Brasil.

Benedito V., Ferrer V.e Ferreres V. (1995): *La formación universitária a debate*. Publicaciones Universitat de Barcelona, Barcelona.España.

Dias Sobrinho J, Ristoff D. I. (2000): *Universidade desconstruída*. Insular, Florianópolis. Brasil.

Dias Sobrinho J. (2005): *Avaliação institucional, instrumento da qualidade educativa a experiência da Unicamp*. En: N. C. Balzan, J. Dias Sobrinho (Orgs.) Avaliação Institucional: teoria e experiências. Cortez, São Paulo.

Gil C. (1999): *Métodos e técnicas de pesquisa social*. Atlas, São Paulo.Brasil.

Gonçalo G. S. (2002): *A avaliação do desempenho docente*. Texto Editora, Lisboa.Portugal.

Masetto T. (2003): *Competência Pedagógica do Professor Universitário.* Summus, São Paulo.Brasil.

Ministério da Educação/Comissão Nacional de Avaliação da Educação Superior do Brasil (país) (2004): *SINAES – orientações gerais para o roteiro de auto-avaliação das instituições.* INEP, Brasília

Moreira H. (2005):*A motivação e o comprometimento do professor na perspectiva do trabalhador docente*. Periódico do Mestrado em Educação UCD 19, 209-232.

Neves E. B. (2002): *A estrutura e o funcionamento do ensino superior* no Brasil En: Soares M. S. A. (Org.) A Educação Superior no Brasil. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasília.

Olive C. (2002): *Histórico da educação superior no Brasil*. En: M. S. A. Soares (Org.) A Educação Superior no Brasil. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Brasília.Brasil.

Pavan M. M. (2005):*A influência da Avaliação Institucional no desenvolvimento profissional do professor*. Dissertação de Mestrado em Educação. Centro Universitário Moura Lacerda, Ribeirão Preto.

Pavan M., Fernandes M. (2006): *Avaliação institucional e desenvolvimento profissional do professor do ensino superior*. En:. Fernandes M., Costa A. , Sicca N. (Orgs.). Currículo, história e poder, 149-165. Insular, Florianópolis.

Pró-Reitoria de Graduação da Universidade São Paulo (Estado) (2007): *Relatório de Gestão do Biênio 2006-2007*. Pró-Reitoria de Graduação da USP, São Paulo. http://naeg.prg.usp.br/siteprg/prg/relatorio_bienio_prg_2006_2007.pdf.

Miriam C. Utsumi. Licenciada em Matemática e doutora em Educação Matemática pela UNICAMP. Docente do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade São Paulo – USP, São Carlos/SP, Brasil. Orienta e realiza pesquisas sobre currículo, formação de professores e práticas curriculares.
mutsumi@icmc.usp.br

Guilherme Henrique Pimentel. Licenciado em Matemática pela USP. Professor da rede estadual de ensino de Araraquara/SP, Brasil. Recebeu Bolsa de Iniciação Científica do Programa Ensinar com Pesquisa da Pró-Reitoria de Graduação da USP

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 63-76
ISSN: 1815-0640

Desarrollo histórico del álgebra vectorial

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Hacemos un recorrido histórico del álgebra vectorial, desde la síntesis inicial hecha por Euclides en sus Elementos, pasando por los esfuerzos de Leibniz para encontrar un análisis geométrico distinto del algebraico, hasta los trabajos de Hamilton y Grassmann. Terminaremos con las conclusiones de Gibbs sobre la polémica cuaternalista y la presentación conjunta que hace de las ideas de Hamilton y Grassmann.

Abstract

We look at the history of vector algebra from the initial synthesis by Euclid in his Elements, through the efforts of Leibniz to find a different analysis of algebraic geometry, to the work of Hamilton and Grassmann. ends with conclusions on the controversy of Gibbs cuaternalista and presentation that makes the ideas of Hamilton and Grassmann.

Resumo

Fazemos um recorrido histórico da Álgebra vetorial, desde a sínteses inicial feita por Euclides em seus Elementos, passando pelos esforços de Leibniz para encontrar uma análise geométrica diferente da algébrica, até os trabalhos de Hamilton e Grassmann. Terminaremos com as conclusões de Gibbs sobre a polêmica dos quaterniões e a apresentação conjunta que faz das idéias de Hamilton e Grassmann.

1. Introducción

A nivel elemental, es común considerar el álgebra como la ciencia de los números y la geometría como la de las figuras, del espacio, considerándolas como partes diferenciadas de las matemáticas. Sin embargo, la evolución del pensamiento matemático ha tendido a unirlas estableciendo una síntesis entre ellas y abriendo nuevos campos. Esta unión origina, a finales del XIX, el Álgebra vectorial formulada por Gibss y Heaviside.

En los “Elementos” de Euclides se encuentra la primera síntesis entre álgebra y geometría, al dar una solución geométrica a un problema aritmético: definición de razón sin usar los números naturales. Esta síntesis tuvo nefastas consecuencias para las matemáticas griegas pues se abandonan los procesos infinitos, que constituyeron un intento de solución parecida a las cortaduras de Dedekind, e incluso el álgebra babilónica y se crea un álgebra geométrica que, para algunos, mató la matemática griega.

El álgebra fue reinventada en el mundo árabe y, siglos después, una nueva relación, conocida como geometría analítica, fue iniciada con Descartes. En efecto, en lugar de geometrizar el álgebra, Descartes algebriza la geometría desarrollando el álgebra en un lenguaje geométrico[1]. Quizás lo más significativo fue descartar la idea griega de representar el producto de dos segmentos de línea por un rectángulo, y dar, en su lugar, una regla para multiplicar segmentos de línea que da otro segmento de línea en correspondencia con el producto numérico y evitando las limitaciones de la regla griega de multiplicación geométrica y abandonando el principio de homogeneidad.

Descartes trabaja con productos geométricos de cualquier orden y muestra como describir curvas mediante ecuaciones algebraicas, iniciando la geometría analítica y dando un gran paso en el desarrollo del lenguaje matemático.

Pero, este método cartesiano establece una especie de matemática ciega, abandona la idea física por cálculos matemáticos sobre las componentes cuando lo que se busca es sustituir las coordenadas cartesianas por símbolos cuya sola mirada basten para tener una imagen de su significado físico. La síntesis cartesiana es, por tanto, provisional hasta encontrar un análisis geométrico distinto del análisis algebraico.

Leibniz anticipa las líneas programáticas de este análisis geométrico. En una carta del 8 de septiembre de 1679 escribía a Huygens[2] :

"Aún no estoy contento con el álgebra, porque en geometría no da los métodos más cortos ni las construcciones más bellas. Por eso creo, que por lo que respecta a la geometría, precisamos otro análisis claramente geométrico o lineal que exprese directamente "el sitio" como el álgebra expresa la cantidad. Creo que he encontrado el método y que podemos representar figuras incluso maquinas y movimientos por medio de caracteres como el álgebra representa números o cantidades. Os envío el ensayo que a mí me parece interesante"

Entre el 10 y 20 de octubre vuelve a escribir a Huygens recabándole su opinión. Finalmente, el 22 de noviembre, Huygens contesta de manera poco esperanzadora[3]:

"*He examinado atentamente lo que me habéis enviado referente a vuestra nueva característica, pero debo deciros francamente, no puedo concebir, partiendo de lo enviado, que se pueda fundamentar una esperanza tan grande, …Ingenuamente os digo, que a mí me parecen bellos deseos, son necesarias otras pruebas para creer que hay algo real en lo que me avanzáis*".

No obstante Leibniz, en la respuesta a la carta anterior, insiste en su idea crítica con la geometría analítica cartesiana aunque reconoce que su plan para separar del álgebra numérica un análisis geométrico, es incapaz de realizarlo. No obstante los elementos característicos de su plan:

- La geometría analítica es parte del álgebra y no del análisis geométrico

[1] D. Hestenes, New Foundations for Classical pag 6-7
[2] G. W. Leibnitz Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. pag 558 y sig.
[3] G. W. Leibnitz Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. pag 580

- Los objetos del álgebra son los números indeterminados (cada aplicación especificará su significado) y las magnitudes (que pueden identificarse con las medidas sobre una escala)
- La Física exige tal análisis geométrico

Estos elementos no pasaron para nada desapercibidos.

2. De los cuaterniones a los vectores

Las operaciones vectoriales se consideran por primera vez, explícitamente, aunque sin que se defina aún el concepto de vector, a propósito de la representación geométrica de los números complejos proporcionada por Wessel, Argand y Gauss, así como es también la base de los trabajos de Bellavitis, iniciados en 1832, los cuales le llevaran a su "Teoría de las equipolencias", primera representación de conjunto de un cálculo de magnitudes dirigidas y orientadas.

No obstante, la utilidad de los números complejos es limitada pues si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo estas no tienen por que estar en el mismo plano, por consiguiente se hace necesaria una versión tridimensional de los números complejos.

Wessel, Servois, Möebius lo intentaron. El propio Gauss intentó construir un álgebra de números de tres componentes, en la que la tercera componente represente un desplazamiento en una dirección perpendicular al plano *a+bi*. Así se llega a un álgebra no conmutativa, pero no era el álgebra requerida por los físicos. Además no tuvo apenas influencia pues no se publicó.

En 1837 Hamilton publicó su *"Teoría de la funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro"*[4]

Hamilton

En la tercera sección de esta obra, dedicada a las parejas algebraicas, *Hamilton* desarrolló los números complejos en términos de parejas ordenadas de números reales casi de la misma forma en la que se utiliza en la Matemática moderna. Como *Hamilton* creía que la representación geométrica era útil para la intuición y no para la justificación lógica de estos números (" *On ne cherche pas a voir, mais a comprendre* "), introdujo el par ordenado de números reales y definió operaciones sobre el.

[4] Este título tiene su origen en Kant pues los números reales como tiempo son definidos como la razón de la longitud de un segmento de recta sobre un segmento unidad. Kant pensaba que la geometría pertenece al espacio y la aritmética al tiempo

Los números complejos proporcionan un álgebra para representar los vectores y las operaciones con ellos, así, no es necesario realizar las operaciones geométricamente pero es posible trabajar con ellos algebraicamente.

Con esta teoría de parejas, *Hamilton* estaba preparado para descubrir y aceptar los números complejos de cuatro dimensiones sin necesidad de interpretaciones geométricas. La versión final de su trabajo la presento en sus *Lectures on Quaternions* (Lecturas sobre Cuaterniones,1853).

Los cuaterniones ofrecen un instrumento privilegiado, como el soñado por Leibniz, para la investigación en Física pues, no sólo los símbolos representan en nuestra imaginación la geometría que describen, sino que abren un universo de posibilidades. Hamilton es consciente de esto como queda claro en la presentación de su operador nabla[5]:

"*Prefiero corregir aquí una aplicación peculiar de los símbolos fundamentales i, j, k de este cálculo que parece más probable que ocurra en un futuro, ampliamente útil en mucha investigaciones físicas importantes. Introduciendo como una nueva característica, un símbolo definido por la fórmula* $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$ *que se concibe actuando sobre escalares, vectores o cuaterniones considerados como funciones de las tres variables independientes x, y, z….*"

El comentario es una anticipación del papel decisivo del nuevo cálculo en la formulación de la nueva teoría electromagnética de Maxwell. Estas impresiones podemos reafirmarlas con las siguientes palabras de Hamilton tras mostrar la fórmula de $-\nabla^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$

"*La simple inspección de esta fórmula debería bastar para convencer a cualquier persona enterada de las modernas investigaciones en FÍSICA ANALÍTICA, en relación con la atracción, calor, electricidad, magnetismo etc que las ecuaciones de este artículo han de volverse muy útiles en el estudio matemático de la naturaleza, cuando el cálculo de los cuaterniones atraiga una atención mas general y sea utilizado como un instrumento de investigación por manos mas hábiles que las mías*"[6]

La dificultad de las Lectures proviene del estilo metafísico empleado con la intención de transmitir " *los pensamientos fuentes, las concepciones primarias y las actitudes básicas de la mente*"[5] durante el proceso de su descubrimiento. Este estilo, lento y difícil, se pone de manifiesto desde la primera lección dedicada al concepto de vector como línea dirigida y a la suma y resta de vectores; emplea mas de 20 páginas de carácter filosófico para presentar el vector como un operador de transporte o como una diferencia entre dos puntos, que se presentara finalmente en la ecuación " *vector = vectum - vehend* ", que se puede traducir por "transportador = punto transportado - punto a transportar ".

[5] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions* (Hodges and Smith, Dublin 1853). 609-611.

[6] W.R.Hamilton, On Quaternions Proceedings of the Royal Irish Academia,3. 273-292.

De la misma forma introduce el vector opuesto, *"revector = vehend - vectum* ", y la suma de vectores como la aplicación sucesiva de un "vector" y un "provector " que equivale a un "transvector".

Finalmente, alude en esta primera lección al hecho de que estas reglas de adición y sustracción coinciden, en su teoría, con las de los números complejos y con las de composición y descomposición de fuerzas.

Para justificar las reglas de multiplicar los símbolos i, j, k desarrolla el concepto de versor, lo hace como un cociente de dos vectores de igual módulo, *"versor = versum / vertend*", y, en general, el de "factor" como un cociente de dos vectores cualesquiera, *"factor = factum/faciem*"; para, finalmente, en su segunda lección, presentar los símbolos i, j, k, no sólo como vectores unitarios sino también como operadores de rotación de 90°.

En la tercera lección, Hamilton define el cuaternión como un "factor" que se descompone en el producto de su módulo, al que llama "*tensor*", y de su parte vectorial que es un cuaternión proporcional al dado y unitario.

En las lecciones cuarta, quinta y sexta estudia las potencias y raíces cuaterniónicas y demuestra la propiedad distributiva del producto cuaterniónico para volver, por último, en la séptima a considerar el cuaternión como suma de su parte escalar y de su parte vectorial, y a partir de aquí demostrar que la multiplicación es asociativa (esta es la primera vez en que se utiliza este término).

En esta última lección también presenta un estudio de los determinantes de tercer orden como la parte escalar del producto cuaterniónico de tres vectores; asimismo, estudia el logaritmo de un cuaternión y las ecuaciones de primer y segundo grado con cuaterniones, para esto introduce los bicuaterniones o cuaterniones con componentes complejas.

En 1853 el astrónomo John Herschel escribe a Hamilton diciéndole que sus Lectures *"exigían 12 meses para ser leídas y casi toda la vida para ser digeridas*"[7]. En 1859 vuelve a intentar la lectura y no pudiendo pasar de la tercera lección, le confiesa:

"*Me he visto obligado a abandonarlas con desesperación. Os ruego que escuchéis esta llamada de socorro. Estoy seguro que podría exponer todo esto de una manera tan clara que el mismo cálculo, considerado como un instrumento, se volvería accesible a los lectores dotados con menos poder de penetración. Una vez dominado el algoritmo y las convenciones para poder trabajar, estos lectores estarían mejor preparados para acompañaros en las interpretaciones metafísicas"*[8]

En 1862, Hamilton escribe a su amigo A. S. Hart:

"*Quiero acabar un libro de consulta con la intención por mi parte de que los Elementos puedan ser citados en los futuros trabajos y memorias sobre los cuaterniones como los Elementos de Euclides"*[9].

[7] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,2 pag 683.
[8] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,3 pag 121.
[9] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,3 pag 139.

De aquí nacerá, con vocación pedagógica, su "Elements of Quaternions" dividido en tres libros en los cuales trata de los vectores y su suma en el primero, de los cuaterniones como cociente de vectores en el segundo y del producto de cuaterniones y vectores y algunas aplicaciones geométricas y físicas en el tercero.

En este tercer libro aparece la distinción entre "cuaternión recto" ,i.e., solo con parte vectorial, y su "índice", el vector correspondiente. Esta distinción filosófica le permite introducir las expresiones de producto escalar y vectorial de dos vectores en función de sus módulos y ángulos.

Las aplicaciones a la física de los cuaterniones corren a cargo de su discípulo, el escocés Peter Guthrie Tait (1831-1901).

Tait estudió en la universidad de Edimburgo y en Cambridge siendo compañero de Maxwell. En 1857, siendo profesor de Matemáticas en Belfast, se le despierta el interés por los cuaterniones siendo la causa un artículo de Helmholtz sobre el movimiento de los torbellinos, lo que le hace pensar que la expresión del operador nabla serviría para el mismo propósito. En 1859, por sugerencia de Hamilton, publica su primer artículo sobre la aplicación de los cuaterniones a las ondas de Fresnel.

Tait

En 1859 los antiguos compañeros de Cambridge le encargan a Tait redactar un texto sobre cuaterniones mas accesible que las Lectures, pero debido a la correspondencia mantenida con Hamilton y a los resultados inéditos conocidos gracias a esta, decide esperar hasta la publicación de los Elementos; así retrasa la publicación de su *"Tratado elemental de los cuaterniones* " hasta 1867, el mismo año en que, siendo catedrático de Filosofía Natural de Edimburgo, publica junto con Lord Kelvin el famoso tratado sobre naturaleza filosófica conocido como los Principia del siglo XIX.

En su tratado, más claro y pedagógico y con más aplicación, lo que lo hace más útil, dedica los dos primeros capítulos a los vectores y su composición y a los productos y cocientes de vectores. En el tercer capitulo aparecen las expresiones equivalentes al producto escalar y vectorial con muchas aplicaciones trigonométricas. El capitulo cuarto es una introducción a la diferenciación de cuaterniones y el quinto un tratado extenso sobre la resolución de ecuaciones de primer grado, donde se introducen las funciones vectoriales lineales que originan los tensores. El último capitulo acaba con un estudio del operador de Hamilton : nabla[10]. Estudia la acción de este sobre funciones escalares y vectoriales y presenta los conceptos equivalentes a los nuestros de gradiente, divergencia y rotacional. También enuncia y demuestra los teoremas de integración de divergencias y rotacionales, da el teorema de Gauss-Ostrogradski (con el nombre de ecuación fundamental) y obtiene, como aplicación, el teorema de Green.

[10] Llamada así por Hamilton por que se asemeja a un antiguo instrumento musical hebreo de ese nombre

Durante la década 1855-1864, el compañero de Tait, James Clark Maxwell crea su teoría electromagnética sin que aparezca el concepto de cuaternión. En una alocución en 1870 a físicos y matemáticos de la British Association, anuncia su interés físico por los vectores de Hamilton y por una remodelación del cálculo de cuaterniones que ha de llevar a término hombres del tipo físico ilustrativo y no matemático simbólico:

Maxwell

"*Sólo mencionare el nombre de esa clase importante de magnitudes dirigidas en el espacio, que Hamilton ha llamado vectores y que son el objeto del cálculo de cuaterniones, rama de las matemáticas que, cuando haya sido asimilada por los hombres de tipo ilustrativo y vestido por ellos con imágenes físicas, se volverá, quizás con otro nombre, el método mas poderoso de comunicar verdaderos conocimientos científicos a personas desprovistas del espíritu del cálculo"*[11].

Maxwell es consciente que introduciendo las ideas intuitivas de lo que hoy llamamos laplaciana, gradiente, divergencia, rotacional, y bautizándolas con nombres que ilustran estas ideas, se puede eliminar lo que tiene de abstracto el simbolismo cuaterniónico.

Es notable la responsabilidad lexicográfica con que entabla consultas para encontrar estos nombres. Consulta a su amigo Tait: "*He ahí algunos nombres toscamente trabajados. ¿No podrías tú, como una divinidad bondadosa, dar la forma apropiada a sus contornos para que encajen bien?''*[12]

Sugiere designar la parte escalar y vectorial del producto cuaterniónico del operador nabla por un campo vectorial, i.e., nuestra actual divergencia (cambiada de signo) y nuestro actual rotacional. ''La *parte escalar yo la llamaría Convergencia de la función vectorial y la vectorial la llamaría Torsión de la función vectorial. Pero en este contexto, la palabra torsión no tiene nada que ver con un caracol o una hélice. Si las palabras vuelta o versión sirvieran serían mejor que torsión. Giravueltas está libre de la connotación de caracol. pero quizás es demasiado dinámica para un matemático puro; o sea que por amor a Cayley , diremos rotacional (curl) ''*[13]

Con ocasión de su conferencia a la Sociedad Matemática de Londres, amplia sus consultas lexicográficas:

- "Acabaré proponiendo a la consideración de los matemáticos ciertas frases que expresan los resultados de aplicar el operador de Hamilton ∇P".
- "Yo, en primer lugar propongo que el resultado de aplicar ∇^2 (operador de Laplace con signo negativo) sea llamado la Concentración de la cantidad a la cual se aplica".
- "Para una función escalar P, la cantidad ∇P es un vector que indica la dirección en que P disminuye mas deprisa y mide en que proporción disminuye. Me atreveré, con mucho recelo, a llamar a eso declive (nuestro actual gradiente) de

[11] Maxwell,J.C.Address to the mathematical and Physical Sections of the British Association,1870,220
[12] Knott,C.G.Life and Scientific Work of Meter Guthrie Tait,Cambridge,1911m pag143
[13] Ibidem

P. La magnitud $\nabla\$$ es llamada por Lamé el " primer parámetro diferencial " de P, pero en su concepción no interviene la dirección. Necesitamos una palabra vectorial que exprese las dos cosas, dirección y magnitud, y que no sea tomada en ningún otro sentido matemático. Me he tomado la libertad de extender el sentido original de la palabra declive generalizándola al espacio tridimensional”.

- "Si σ representa una función vectorial, $\nabla\sigma$ puede contener una parte escalar y otra vectorial que escribiremos S $\nabla\sigma$ y $V\nabla\sigma$ respectivamente. Propongo que la parte escalar sea llamada convergencia de σ”
- "Pero en general, $\nabla\sigma$ también tiene una parte vectorial y propongo, aunque con recelo, que este vector sea llamado el rotacional (curl) de la función vectorial original. Representa la dirección y la magnitud de la rotación de la transportada por el vector σ[14]”

Casi al final de su vida, Maxwell critica el concepto de cuaternión en una carta a Tait (1878) en la que expresa la irreductible dificultad psicológica que supone para un físico aceptar cuadraturas negativas: “*¿Es posible arar con un buey y con mulos juntos al mismo tiempo?*"[15]. Pondera las confusiones que provoca el signo negativo que aparece en la parte escalar del producto cuaterniónico e incluso en la norma. Su deseo sería liberar los vectores de este carácter imaginario con que aparecen incrustados en los cuaterniones.

No deja de ser un tanto sorprendente que habiendo concebido Hamilton los números complejos a partir de una concepción metafísica del álgebra como ciencia del tiempo puro, y sus cuaterniones como sus cálculos geométricos en el espacio, su integración en un único sistema de cuaterniones complejos permite una formulación integrada del espacio – tiempo de la relatividad y de la teoría de Maxwell, su base física.

Esta formulación, que aparece como alternativa a la de Mikowski de 1908, es no sólo la confirmación de las ideas especulativas de Hamilton, sino también una prueba de la sustitución del sistema cuaternionico por el vectorial. La cuarta componente pasa a ser el tiempo o la energía en la nueva imagen del universo de Einstein – Minkowski.

En 1844, un año después del descubrimiento de la multiplicación correcta de los cuaterniones por Hamilton, un lingüista alemán, especialista en literatura sánscrita, Grassmann, publicaba su "Teoría de la Extensión Lineal”; una Nueva Rama de la Matemática en la que se desarrolla un cálculo con vectores de cualquier dimensión, y en donde también aparece una multiplicación no conmutativa (no es ni siquiera asociativa) pero la importancia de la obra solo fue reconocida muy lentamente debido a la dificultad de la lectura y a su extraña terminología. Grassmann desarrolla un álgebra que representa desde su concepción la puesta en práctica de las ideas de Leibniz, y muestra que estas no eran un simple sueño.

Una posterior redacción en 1862 por Grassmann de su obra contribuyó a su desarrollo y tuvo como consecuencia el desarrollo de un álgebra mas restringida para los vectores del espacio tridimensional por parte, fundamentalmente, de Yosiah Williard Gibbs.

[14] Maxwell, 1871,263-265
[15] M. J. Crowe. A History of Vector Analysis pag 137-138

La teoría de extensión de Grassmann tiene notables diferencias con la teoría de Hamilton, pues no esta limitada a las tres dimensiones del espacio sino que es concebida para espacios n dimensionales, además, en ella no es necesario suponer el carácter euclídeo del espacio (o lo que es equivalente, la validez del teorema de Pitágoras).

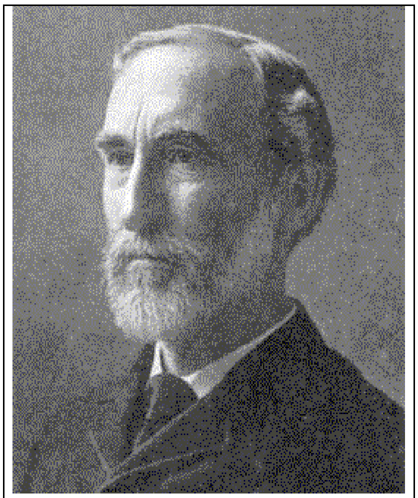
Grassmann

La transición entre los trabajos de Maxwell y los de Gibbs (y Heaviside) fue realizada por Clifford, profesor de matemáticas y mecánica en la University College de Londres; uno de los raros matemáticos de la época que conocía los cuaterniones de Hamilton y el análisis de Grasmann.

Como hemos podido apreciar, en la carta de Maxwell a Tait de 1878, aparecen en clara competencia los sistemas de Hamilton y Grassmann. En este mismo año, Clifford publica su artículo "*Aplicaciones del álgebra de extensión de Grassmann*" donde resuelve, para siempre, la síntesis de los dos sistemas. La síntesis consiste en incluir el sistema de Hamilton en el de Grassmann para dimensión tres.

Clifford mostró especial interés por los trabajos de Grasmann y estaba convencido de la influencia que estos ejercerían en el futuro de la ciencia matemática. En sus " *Elementos de Dinámica*", introduce los vectores, suma y producto. Parece ser el primero en dar la formulación moderna de producto escalar y vectorial, introduce el término divergencia como opuesto al de convergencia de Maxwell y sobre todo introduce la practica de definir por separado el producto escalar y vectorial.

La transformación del cálculo de cuaterniones en Análisis Vectorial se debe al sentido práctico del primer doctor en ingeniería de USA, Gibbs (1839-1903) .Como profesor de Yale tuvo que dar un curso, en 1877, de electromagnetismo para el cual empleó el tratado de Maxwell, lo que le hace interesarse por los cuaterniones y descubrir que " *la idea de cuaternión era totalmente extraña al tema*" lo que le lleva a elaborar una versión exclusivamente vectorial de este cálculo. En 1879 enseña Análisis Vectorial, como un método matemático del electromagnetismo y en 1881 imprime privadamente unas notas tituladas " Elementos de Análisis Vectorial".



Gibas

Así lo describe Gibbs en una carta de 1888[16]:

"El primer contacto con los cuaterniones lo tuve leyen-do La Electricidad y Magnetismo de Maxwell, donde son empleadas a menudo notaciones cuater-niónicas. He llegado a convencerme que, para dominar estos temas, hay que comenzar dominando estos métodos. Simultáneamente, he advertido que, por mucho que estos métodos sean llamados cuaterniónicos, la idea

[16] Wheeler, 1962. 107-108

de cuaternión es totalmente extraña al tema. Respecto al producto de vectores debemos fijarnos que se trataba de dos funciones importantes llamadas parte vectorial y parte escalar del producto y que la unión de las dos para formar el llamado producto (total) no constituía ningún proceso de la teoría como un instrumento de investigación geométrica. Además, al tratar el operador ∇ *aplicado a un vector, la parte vectorial y la parte escalar del resultado representan operaciones importantes pero no parece una idea válida reunirlas* (*generalmente, para tomarlas por separado después*)".

"Así pues voy a empezar a trabajar desde el principio el álgebra de los dos tipos de multiplicaciones, las tres operaciones diferenciales ∇ *(por aplicación a un escalar y por aplicación a un vector son dos operaciones diferentes) y aquellas funciones o mejor dicho operadores integrales que , bajo ciertos limites, son los inversos de las operaciones diferenciales y que representan un papel importante en diversas especialidades de la Física Matemática. A estos temas hay que añadir el de las funciones lineales vectoriales que también son importantes en la Electricidad y Magnetismo de Maxwell"* .

Estas notas, impresas pero no publicadas, escritas muy condensadamente, constituyen el primer tratado de "Análisis Vectorial". En la impresión de 1881 constaban de dos capítulos titulados: "Sobre el álgebra de vectores" y " Sobre el cálculo diferencial e integral de los vectores". En el primero de ellos estudia las operaciones elementales: suma de vectores, producto por un escalar y los dos tipos de productos de dos vectores que Gibbs llama "directo " y " sesgado " y que hoy llamamos escalar y vectorial. También introduce, para distinguirlos, los símbolos del punto y el aspa (a . b, a x b) y en el capítulo segundo introduce las tres acciones del operador vectorial nabla y los teoremas de integración de Gauss, Stokes y Green.

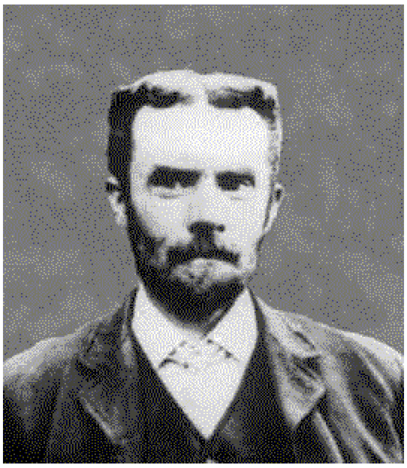
En 1884 añade tres capítulos más, en ellos estudia las "Funciones lineales vectoriales", hoy llamadas tensores, y las aplica al estudio de rotaciones y tensiones. Finalmente se ocupa de los bivectores o vectores con componentes complejas.

Todas estas notas fueron encargadas por Gibbs a un alumno suyo, Wilson, para un libro de texto para los estudiantes de matemáticas y física que se llamó "Análisis Vectorial"[17].

Si bien los trabajos de Gibbs no son una revolución contra los trabajos de Tait y la escuela cuaternionica, el abandono del concepto de cuaternión fue interpretado como una ofensa por los defensores de los cuaterniones. Así, Tait, en su "Tratado elemental de los cuaterniones" se muestra preocupado por el estancamiento que veía en el progreso de los cuaterniones[18]: "*...aquellos que trabajan en este tema han estado más preocupados por modificar la notación o la manera de presentar los principios fundamentales que por entender las aplicaciones del cálculo. Incluso Gibbs ha de ser considerado uno de los retrasadores del progreso cuaterniónico, debido a su folleto sobre Análisis Vectorial, una especie de monstruo hermafrodita que mezcla las notaciones de Hamilton y Grassman*"

La reacción de Gibbs no se hizo esperar originándose una larga disputa, en la revista Nature, entre cuaternionalistas y vectorialistas. En 1891 Gibbs responde a

[17] Wilson,E.B.Vector Analysis,A Text-Book for the use of Students of Mathamatics and Physics,1901.
[18] Tait, Elementary Treatise on Quaternions, Oxford 1867,1873,1890.



Heaviside

Tait mostrando como de hecho, se trata de una cuestión de nociones y no de notaciones y como para el análisis vectorial la noción de cuaternión es superflua.

En este artículo[19] Gibbs hace notar, entre otras ventajas de la formulación vectorial frente a la cuaternionica, el hecho que esta puede ser extendida fácilmente al espacio de cuatro o más dimensiones. Tait responde, preguntando:[20] "¿ *Qué tienen que ver los estudiantes de física con un espacio de más de tres dimensiones* ?"

El punto central de la critica de Tait es la falta de originalidad pues, según el, " las engañosas notaciones sugeridas por el profesor Gibbs" conducen más brevemente a resultados ya obtenidos. En su contestación, Gibbs insiste en la inutilidad del cuaternión[21]:

"*¿Qué importancia tienen las ventajas conseguidas mediante el uso de los cuaterniones*? *En la mayoría de los casos estas ventajas son dudosas e insignificantes*."

Esta discusión duró tres años y en ella medió Heviside que había seguido, en Europa, un camino parecido a Gibbs. Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero de telégrafos londinense al que los problemas de su oficio le llevaron a su estudio e investigación.

Heaviside reconstruye el itinerario que le llevó del electromagnetismo a un álgebra de vectores obtenida mediante la eliminación y simplificación de la cuaterniónica de Hamilton. Comienza con la triste historia de un muchacho que determinado a dominar los cuaterniones, se recluye en los textos de Hamilton y sucumbe en la confusión de esos vectores de cuadrado negativo. Puesto que Maxwell mostraba sus resultados básicos en forma cuaterniónica, acude al tratado de Tait pero encuentra las mismas dificultades. Según él, los cuaterniones en sus aspectos vectoriales, eran antifísicos y antinaturales y no concordaban con la matemática escalar ordinaria, así que decide eliminar del todo los cuaterniones y dedicarse a los escalares y vectores buscando un álgebra vectorial más sencilla que cree encontrar en el Análisis Vectorial de Gibas.

En sus artículos sobre electricidad, aparecen las nociones de rotacional, producto escalar, el operador nabla con sus aplicaciones así como la definición del producto vectorial (indicado con el símbolo de la hamiltoniana$\vee$).

En 1893 publica su teoría electromagnética[22]; en su capitulo tercero: "Los elementos del álgebra y el análisis vectorial"[23], aparecen la suma y el producto de vectores, la integración, el operador nabla y las diversas acciones y teoremas de integración de este. Este capítulo, junto con el "Análisis Vectorial" de Gibbs son los responsables de la aceptación de los vectores por el mundo científico.

[19] Gibbs.J,W.On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector, Nature, 43,511,1891.
[20] Tait,P.G.The Role of Quaternions in the Álgebra of Vectors,Nature,43,808.1891.
[21] Gibbs.J,W Quaternions and the Ausdehnungslehre,Nature,44,79,1891.
[22] Heaviside,O:Electromagnetic Theory,The Electrician,Londres,1893
[23] Ibidem,132-305

Tras la introducción de las nociones de escalar y vector, relaciona su álgebra vectorial con las coordenadas cartesianas[24]:

"*El álgebra vectorial es el lenguaje natural de los vectores y nadie que haya llegado a aprenderla no pensara nunca retroceder de la vitalidad de los vectores a la complejidad mortal del sistema cartesiano*".

La polémica con los cuaterniones comienza con un apartado titulado: " Carácter abstracto de los cuaterniones y comparativa simplicidad que resulta de ignorarlos[25]":

"*Está claro que si suponemos, tal como se supone generalmente, que el álgebra vectorial es una cosa terriblemente difícil que comprende consideraciones metafísicas de carácter abstracto las cuales solo pueden ser entendidas completamente por algunos metafísicos- matemáticos consumadamente profundos como el profesor Tait por ejemplo. Si fuese así, no habría ni la mas remota posibilidad para que el álgebra y el análisis vectorial llegasen a ser algún día universalmente utilizables y yo no estaría escribiendo esto ni persistiría años y años en el uso del álgebra vectorial para la teoría electromagnética*".

Insiste en que lo que pretende es un Tratado de Cuaterniones sin cuaterniones y justifica la abolición del signo menos de los cuaterniones y el convenio de imprimir los vectores en negrillas en contra de las letras griegas empleadas por Hamilton y Tait y de las góticas empleadas por Maxwell. Al final del capítulo vuelve a la polémica con Tait[26]:

"Es sabido que el profesor Tait dice a los físicos que los cuaterniones son justamente lo que ellos necesitan para su objetivo físico. También es sabido que los físicos, con gran obstinación, han estado meticulosos a la hora de no querer saber nada de los cuaterniones. Hemos intentado enmendarlos para hacerlos un poco mas inteligibles con gran disgusto del profesor Tait que quiere conservar la corriente cuaterniónica pura e incontaminada. Ahora bien, *¿Quien tiene razón, el profesor Tait o los contaminadores*?. *Mi opinión es que depende del punto de vista. Si prescindimos de las aplicaciones prácticas a la física, y miramos los cuaterniones solamente desde el punto de vista cuaterniónico, lleva la razón el profesor Tait pues el tratado de cuaterniones ofrece una manera única, simple y natural de tratar cuaterniones*".

"*Confío que el capitulo que estoy acabando pueda servir de suplefaltas hasta que escribamos tratados vectoriales normales, aptos para los físicos y basados en un tratamiento vectorial de los vectores. Los cuaternionalistas quieren arrinconar los "tropiezos cartesianos" que dicen ellos. Eso se puede hacer con los cuaterniones pero hacerlo con los vectores sería una gran equivocación*'.'

La polémica se decidió finalmente del lado de los vectores; los ingenieros aceptaron de buenas maneras el cálculo vectorial aunque no así los matemáticos. Finalmente, los matemáticos siguieron e introdujeron los métodos vectoriales en la geometría analítica y diferencial.

[24] Heaviside,O:Electromagnetic Theory,The Electrician,134,Londres,1893
[25] Ibídem
[26] Ibídem,301-302

Conclusión

En 1972 aparece Gibbs Lectures del eminente físico y matemático Dyson, donde expone las oportunidades perdidas para obtener fructíferos contacto entre matemáticas y física. Entre ellas señala las ecuaciones de Maxwell y el cálculo vectorial:

"*Los matemáticos del XIX fallaron miserablemente al no aceptar la oportunidad no menos grande que les ofrecía Maxwell en 1875. Si las hubiesen tomado tan en serio como Euler hizo con las de Newton, habrían descubierto, entre otras cosas, la teoría einsteniana de la relatividad especial, la teoría de los grupos topológicos y su representación lineal y, probablemente, amplias porciones de las teorías de ecuaciones diferenciales hiperbólicas y análisis funcional. Una gran parte de la física y de las matemáticas del siglo XX podría haberse creado en el XIX explorando hasta el final los conceptos matemáticos que conducen de manera natural a las ecuaciones de Maxwell*"

En relación con el tema de los cuaterniones y de los vectores él dice:

"*En 1844 tuvieron lugar dos hechos notables, la publicación de Hamilton del descubrimiento de los cuaterniones y la publicación de Grassmann de su Ausdehnungslehre . Con la ventaja de la perspectiva que nos da el tiempo, podemos ver que la de Grassmann es la más grande contribución a las matemáticas pues contiene el germen de muchos de los elementos del álgebra moderna, e incluye el análisis vectorial como caso especial. Cuando los trabajos de Grassmann se conocen, los matemáticos se dividen en cuaternionistas y anticuaternionistas y pierden mas energías polemizando a favor o en contra de los cuaterniones que intentando comprender como Grassmann y Hamilton podían acomodarse en un esquema conjunto. En consecuencia, va a quedar en manos de Gibbs la presentación conjunta, en 1886, de las ideas de Grassmann y Hamilton. Las últimas palabras de su lección fueron: "Hemos empezado estudiando álgebras múltiples, acabaremos, creo, estudiando el álgebra múltiple*."

Bibliografía

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*, A.U./94,Madrid.
Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*, AE.
Collete, J. L. (1985). *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid.
Crowe, M. J (1985). *A History of Vector Analysis* (Univ. Notre Dame Press, Notre Dame1967 y Dover 1985.
García Doncell, M. (1984). *Orígens Físics de l'analisi vectorial*. El desenvolupament de les matemátiques al segle XIX, Institut d'estudis catalans, Barcelona.
Gibbs, J. (1891*). On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector*, Nature. 43, 511
Gibbs, J. W. (1891). *Quaternions and the Ausdehnungslehre*, Nature. 44,79, Rev.R.Perceval (1882). *Life of Sir Willian Rowan Hamilton*,3 vol Dublin.
Hamilton, W.R. (1847). *On Quaternions*.Proceedings of the Royal Irish Academia,3.
Hamilton, W.R.(1837). *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples: with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the science of pure Time.*Transactions of the Royal Irish Academy 17, 293-422.
Hamilton W. R. (1853). *Lectures on Quaternions* (Hodges and Smith, Dublin 1853).

Hestenes, D. (1986). *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht.
Heaviside, O. (1893). *Electromagnetic Theory*, The Electrician, Londres.
Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II), AU/724, Madrid.
Knott, C.G. (1911). *Life and Scientific Work of Meter Guthrie Tait*, Cambridge,1911.
Maxwell, J. (1870). *Address to the Mathematical and Physical Sections of the British Association*,British Association for the Advancement of Science Repport 40
Maxwell, J. C. (1871). *On The Mathematical Clasification of phisical Quantities*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3.
Parra Serra. (1997). *L'Algebra vectorial* (IEC)
Tait, P.G. (1890). Elementary Treatise on Quaternions, Oxford.
Tait, P.G. (1891). *The Role of Quaternions in the Álgebra of Vectors Nature,* 43, 808.
Taton, R. (1988). *Historia general de la ciencia*,(VIII), Orbis, Barcelona.
Wheeler, L.P. (1962). *Josiah Williard Gibbs*, New Haven.
Wilson, E.B (1901). *Vector Analysis,A Text-Book for the use of Students of Mathamatics and Physics,Yale*, University Press.

Antonio Rosales Góngora. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerce la docencia en el IES Bahía de Almería. Ha publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon, en el Boletín matemático de la UAL, revista Unión, revista Virtual Matemáticas, Educación e Internet. Centro trabajo: IES Bahía de Almería. anrogo58@yahoo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 77-92
ISSN: 1815-0640

Impacte de um Programa de Formação Continua en Matemática em profesores e alunos dos primeiros anos de escolaridade

Celina Tenreiro-Vieira

Resumo

Com o propósito de melhorar as condições de ensino e aprendizagem da matemática e a valorização das competências dos professores, no sentido de melhorar os níveis de sucesso dos alunos nesta disciplina, o Ministério da Educação português criou um Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º ciclo (6-9 anos). Neste artigo, descreve-se trabalho desenvolvido no âmbito da implementação daquele programa de formação com professores do 1º ciclo que frequentaram este programa, e apresentam-se evidências do seu impacte nos professores e respectivos alunos

Abstract

With the intention to improve the conditions of mathematics teaching and learning and the valuation of teachers' professional competences, in order to improve the levels of success of the pupils in this area, the Portuguese Ministry of Education created one Mathematics In-service Teacher Education Programme for primary teachers (6-9 years). The present article describes the work developed with primary teachers involved in this education programme and presents evidence of **its** impact in teachers and **their** students

Resumen

Con el propósito de mejorar las condiciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática y la valoración de las competencias de los profesores, en el sentido de mejorar los niveles de suceso de los alumnos en esta asignatura, el Ministerio de la Educación portugués creó un Programa de Formación Continua en Matemática para profesores del 1° ciclo (6-9 años). En este artículo, se describe el trabajo desarrollado en el ámbito de la implementación de aquel programa de formación con profesores del 1° ciclo que frecuentaron este programa, y se presentan evidencias de su impacto en los profesores y respectivos alumnos.

1. Educação matemática numa perspectiva de literacia desde os primeiros anos de escolaridade

É hoje amplamente reconhecido, por educadores e investigadores, que a matemática é, cada vez mais, uma ferramenta útil para todos num mundo imerso em números, onde os indivíduos são, cada vez mais, confrontados com situações que envolvem, conceitos e ideias matemáticas. É igualmente aceite que a matemática capaz de ajudar cada cidadão a lidar de forma eficaz com os aspectos quantitativos, espaciais e probabilísticos da vida, não se restringe ao conhecimento de factos e ao domínio de procedimentos de cálculo. É necessária uma formação em matemática para todos numa perspectiva de literacia matemática de modo a ajudar cada um a ter uma vida produtiva e a gozar de qualidade de vida e a dar o seu contributo para o desenvolvimento sustentável a nível local, nacional e internacional.

Dentro desta perspectiva, no quadro de referência do *Programme for International Student Assessment* (PISA), estudo de avaliação internacional da literacia, de alunos de 15 anos, em países da Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos [OCDE], ser matematicamente literado implica saber e ser capaz de compreender e de se ocupar da matemática, de ter opiniões bem fundamentadas sobre o papel que a matemática desempenha na sociedade e sobre a sua utilidade nas diferentes esferas da vida (pessoal, profissional e social), para se viver como cidadão construtivo, interessado e ponderado. A literacia surge, assim, associada à capacidade dos alunos aplicarem conhecimentos, analisarem, raciocinarem e comunicarem com eficiência, à medida que colocam, resolvem e interpretam problemas numa variedade de contextos e de situações (OCDE/PISA, 2000, 2003, 2006).

De um modo global e tendo como referência autores como Irwin e Britt (2005), Fullan e Earl (2002) e Zevenbergen (2004), a literacia matemática pode ser descrita como (i) a confiança individual na matemática e no uso eficaz de conhecimento matemático; e (ii) a capacidade de raciocinar e resolver problemas numa variedade de situações e contextos matemática e tecnologicamente orientados, bem como de comunicar sobre e através da matemática e de estabelecer conexões dentro e fora da matemática, o que é essencial para compreender, apreciar e utilizar a matemática.

No âmbito de esforços de reforma ou reorganização da matemática escolar no sentido de promover a literacia matemática dos alunos, uma das propostas curriculares de maiores repercussões em diversos países surgiu nos Estados Unidos da América como resultado da liderança do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). O trabalho desenvolvido traduziu-se no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). A versão actualizada deste documento, publicada em 2000, reitera a ideia de que todos os alunos devem atingir literacia matemática para funcionar eficazmente no século XXI. Nesse sentido, os *Standards 2000* (NCTM, 2000) advogam que todos os alunos devem reconhecer o valor da aprendizagem da matemática e tomar consciência do papel da matemática nas suas vidas. Relevam a compreensão de grandes ideias em domínios temáticos como Números e operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidades; salientam o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação (em) matemática, bem como o estabelecer de conexões entre a matemática e o mundo, especialmente com situações do dia a dia, com a Ciência e com a Tecnologia.

Na senda do ocorrido em outros países, em Portugal, a Reorganização Curricular do Ensino Básico (6-14 anos) expressa no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico* (Ministério da Educação [ME], 2001), está orientada para o desenvolvimento de competências enquanto saber em acção que envolve conhecimentos, atitudes e capacidades de pensamento que viabilizam a utilização de conhecimentos em situações diversas o que traduz uma aproximação ao conceito de literacia. A competência matemática que todos devem desenvolver inclui processos cognitivos transversais a toda a aprendizagem da matemática, entre os quais se encontra a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Por conseguinte, é preconizado o envolvimento activo dos alunos em experiências de aprendizagem intelectualmente desafiantes, incluindo o investigar e resolver problemas.

Congruentemente, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) salienta também a importância das investigações e da resolução de problemas. Neste documento, a resolução de problemas é vista como uma capacidade transversal fundamental, que os alunos devem desenvolver, resolvendo, de forma sistemática e continuada, problemas de diferentes tipos e em diversas situações e contextos. Resolver problemas é essencial para o desenvolvimento de processos cognitivos, bem como para a construção e mobilização de conhecimentos matemáticos em conexão com o raciocínio e a comunicação. Assim sendo, "a resolução de problemas não é só um objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (p. 8).

Não obstante os esforços que têm sido desenvolvidos a nível da (re)estruturação dos currículos de matemática, resultados de alunos portugueses em estudos internacionais como o *Third International Mathematics and Science Study* [TIMSS] e o PISA evidenciam que a meta da literacia está longe de ser alcançada. No PISA 2003, um terço dos alunos portugueses obteve o mais baixo nível de proficiência em literacia matemática (Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE], 2004), nível esse que se manteve no PISA 2006 (GAVE, 2007).

Os resultados em provas de Aferição de Matemática do 4º ano de escolaridade (provas a nível nacional realizadas pelos alunos com, em média, 9 anos) também são preocupantes (Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [DGIDC], 2004). A generalidade dos alunos evidencia baixos níveis de desempenho na resolução de problemas, no raciocínio e na comunicação. Na sequência da análise realizada por aquele organismo, os fracos resultados podem relacionar-se com a ausência de processos de reflexão, discussão e argumentação, quer orais quer escritos, onde seja veiculada, predominantemente, informação matemática, através duma linguagem também matemática. Face aos resultados, afigura-se como essencial que, nas aulas de matemática, os alunos sejam envolvidos, de forma contínua e sistemática, em experiências de aprendizagem de resolver problemas e investigar, criando oportunidades para identificarem e usarem diferentes representações, argumentarem, raciocinarem e comunicarem matematicamente.

2. Formação de professores: O caso do Programa de formação em matemática para professores do 1º ciclo do ensino básico português

O desenvolvimento de práticas de ensino e de aprendizagem da matemática focadas na promoção da cultura e da literacia matemática dos alunos, exige que se equacione a questão da formação de professores. Com efeito, vários organismos como o *National Research Council* (1996) e o NCTM (1989, 2000) têm insistentemente enfatizado a ideia de que efectivar uma reforma ou reorganização curricular obriga a considerar, em simultâneo, várias esferas, sendo uma delas forçosamente a formação contínua de professores; caso contrário, correr-se-á o risco de nada de substancial mudar nas práticas de ensino da matemática e, como corolário, na preparação e formação dos alunos. Como sublinham Ball, Goffney e Bass (2005), normas e currículos de qualidade são importantes, mas as normas não actuam de forma independente do uso profissional que delas é feito e nenhum currículo ensina por si mesmo.

Em Portugal, no quadro das medidas de política educativa para a melhoria das condições de ensino e aprendizagem da matemática e a valorização das competências dos professores, no sentido de melhorar os níveis de sucesso dos alunos nesta disciplina, o Ministério da Educação em articulação com o Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, criou (Despacho conjunto nº 812/2005), e deu continuidade (Despacho nº 6754/2008), a um programa de formação contínua para professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico (6-9 anos). Trata-se de um programa, desenvolvido em articulação com as Instituições de Ensino Superior com responsabilidade na formação inicial de professores e com os agrupamentos de escolas.

A Comissão Nacional de Acompanhamento, designada pela Sra. Ministra da Educação, elaborou o documento que apresenta os princípios, objectivos, linhas orientadoras, conteúdos e recursos do Programa de Formação. De acordo com tal documento orientador (Serrazina, et. al, 2005), o Programa tem como objectivos: (i) Promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1º ciclo envolvidos, tendo em conta as actuais orientações curriculares neste domínio; (ii) Favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplem a planificação de aulas, a sua condução e reflexão por parte dos professores envolvidos, apoiados pelos seus pares e formadores; (iii) Desenvolver uma atitude positiva dos professores relativamente à Matemática, promovendo a autoconfiança nas suas capacidades como professores de Matemática, que inclua a criação de expectativas elevadas acerca do que os seus alunos podem aprender em Matemática; (iv) Criar dinâmicas de trabalho em colaboração entre os professores de 1º ciclo com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática ao nível do grupo de professores da escola/agrupamento, com a identificação de um professor dinamizador da Matemática que promova um desenvolvimento curricular nesta área; e (v) Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos em articulação com as instituições de formação inicial de professores.

Para a consecução dos objectivos estabelecidos, o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores (PFCM) contempla a realização de diferentes tipos de sessões ao longo do ano. Concretamente, (i) 15 sessões de formação em grupo (8-10 professores), com a duração de 3 horas cada e com periodicidade quinzenal, destinadas a desenvolver conteúdos de formação, tendo em consideração os interesses e necessidades de formação dos professores-formandos (PF) e para planificação e reflexão das actividades associadas à prática lectiva; (ii) 4 sessões de supervisão / acompanhamento em sala de aula para a implementação de práticas consonantes com o trabalho desenvolvido nas sessões de formação em grupo; e (iii) e uma sessão colectiva para apresentação e partilha de experiências dos PF envolvidos no PFCM.

Assumindo a relevância e pertinência das linhas orientadoras para a execução do PFCM, a equipa coordenadora e de formação da Universidade de Aveiro (UA), integrou-as no seu plano de formação. O processo formativo a seguir evidenciado, bem como o seu impacto nos professores e respectivos alunos, tem por base o trabalho desenvolvido pela autora enquanto formadora do PFCM na UA.

Neste enquadramento, uma das linhas de acção da formação tem sido o envolvimento de professores e alunos na prática da matemática em si. Isto, porque, como salientam (Ball, Goffney e Bass, 2005), proporcionar aos alunos múltiplas e diversificadas oportunidades para fazerem matemática constituiu uma via para fomentar o desenvolvimento da competência matemática de cada um. Deste modo, poder-se-á ajudar os alunos a desocultar a presença da matemática na sociedade, em ligação com diferentes áreas da actividade humana, tornando-se capazes de lidar, com confiança, com a matemática para analisar e resolver problemas, raciocinar e comunicar (ME, 2001). Tal afigura-se como essencial para a participação, racional e esclarecida, numa sociedade democrática pluralista, de cariz científico-tecnológico e profundamente matematizada.

Reconhecendo que fazer matemática é, centralmente, resolver problemas e investigar (Ball, Goffney e Bass, 2005), um enfoque da formação reside na resolução de problemas e nas investigações. Assim, nas sessões de formação em grupo, foram criadas múltiplas oportunidades para os professores abordarem a resolução de problemas e as investigações no quadro dos diferentes temas matemáticos (Números e operações, Geometria e medida e Organização e tratamento de dados), em consonância com o preconizado nas orientações curriculares para o ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade.

Assumindo que os esforços encetados para levar os professores a valorizar a resolução de problemas e o investigar são melhor sucedidos se os professores tiverem oportunidade para conhecerem e reconhecem porque é importante fazê-lo, numa fase inicial, foram apresentadas e discutidas razões a favor do envolvimento activo dos alunos em experiências matemáticas de resolver problemas e investigar. Nesse sentido, promoveu-se a análise e interpretação das actuais orientações curriculares para o ensino da matemática. Ao fazê-lo pretendeu-se também promover o conhecimento curricular dos PF e, por conseguinte, criar condições para se comprometerem com experiências de desenvolvimento curricular em matemática que contemplem a resolução de problemas e a realização de investigações.

Dentro desta perspectiva, os PF foram incentivados a partilhar, discutir e reflectir sobre situações desenvolvidas com os alunos na sala de aula centradas no resolver problemas e no investigar. Em apoio à reflexão, estimulou-se os PF a fornecerem evidências da aula, em especial, produções matemáticas dos alunos, ilustrativas das capacidades e conhecimentos mobilizados e/ou (re)construídos. Além disso e com o propósito de fomentar a (reconstrução) de conhecimento didáctico específico do professor, a ser investido na preparação e implementação de autênticas e profícuas experiências matemáticas de resolver problemas e investigar, promoveu-se a discussão de questões tais como, por exemplo: (i) definição(ões) de problema, resolução de problemas, investigar e investigações; (ii) perspectivas e referenciais acerca da resolução de problemas e das actividades de natureza investigativa; (iii) tipologias de problemas; (iv) estratégias de resolução de problemas; e (v) momentos de desenvolvimento de uma investigação.

Posteriormente, os PF foram encorajados a realizar, analisar e discutir múltiplas e diversificadas propostas didácticas (conforme exemplos incluídos no anexo 1), com foco no resolver problemas e/ou no investigar. Ao envolver os PF na realização e discussão de experiências matemáticas de resolver problemas e investigar, assume-se que promover as capacidades dos alunos ligadas à resolução de problemas, ao raciocínio matemático e à comunicação matemática é um grande desafio, mas maior desafio ainda é o que logicamente precede o anterior, ou seja, o de promover as capacidades dos professores no âmbito da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação matemática. Até porque, não é verosímil que os professores fomentem, na sala de aula, o desenvolvimento de tais capacidades se eles próprios não as valorizarem e não se sentirem confiantes e seguros no seu uso com eficácia. Além disso, acolhe-se a tese de que os professores ao investigarem e resolverem problemas, passíveis de serem propostas aos alunos, poderão ganhar sensibilidade sobre os saberes em uso e, por conseguinte, fazer juízos de valor mais racionais acerca das potencialidades de tias situações, bem como perspectivar acções de sala de aula para potenciar a aprendizagem matemática dos alunos. Além disso, a partilha e discussão entre os PF do conhecimento matemático mobilizado na resolução de um problema ou na realização de uma investigação, das estratégias usadas e das soluções ou conclusões alcançadas, constituiu uma potente oportunidade para promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular do professor necessário, quer à preparação de experiências matemáticas de resolver problemas e investigar, quer à sua implementação em sala de aula de formas que fomentem a actividade matemática dos alunos.

Para potenciar o apoio a mudanças nas ideias e práticas dos professores a favor da melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos, fomentou-se e alimentou-se o investimento intencional na preparação e planificação de tarefas de diferente natureza, incluindo a resolução de problemas e as investigações. A este nível, os problemas e as investigações propostas pela formadora e realizadas e discutidas com os PF, nas sessões de formação em grupo, constituíram uma base para a construção de tarefas de resolução de problemas e investigações adequadas à turma de cada PF. Atendendo também às características da turma específica de cada um, equacionaram-se modos de trabalho, formatos de exploração e recursos a usar em sala de aula.

A implementação em sala de aula de tarefas discutidas e/ou planificadas nas sessões de formação, em particular com supervisão / acompanhamento da formadora, permitiu ver na prática como é que uma situação ou tarefa funcionou e avaliar os seus pontos fortes e fracos, o que é um aspecto importante, porquanto é pouco provável que o professor adopte uma nova abordagem se apenas ouve falar dela, sem a experimentar. Até porque, como é referido na literatura, o professor tende, apenas, a legitimar e adoptar uma nova abordagem quando verifica que ela funciona na sua prática (Loucks-Horsley, Hewson, Love e Stiles, 1998). Permitiu ainda ao PF ganhar segurança e versatilidade na dinamização de experiências matemáticas de resolver problemas e investigar, bem como ultrapassar medos e receios, nomeadamente os decorrentes do confronto com a imprevisibilidade inerente às situações de ensino/aprendizagem. Tal assume particular relevância no âmbito das tarefas de natureza investigativa, porquanto, muitas vezes, os alunos decidem explorar e questionar perspectivas não previstas pelo professor. Aliás, Ponte e seus colaboradores (1999) referem como um dos obstáculos ao uso regular deste tipo de tarefas na sala de aula algum receio relativo às questões matemáticas e às questões de dinâmica de sala de aula que podem surgir.

O apoio na sala de aula e a reflexão na e sobre a acção configurou-se como uma oportunidade de integração de conhecimentos, garante de uma mudança sustentada. A partilha, no grupo de formação, do trabalho realizado em sala de aula assumiu-se como um espaço de reflexão e problematização da acção educativa, de situações e contextos de aprendizagem da matemática. Configurou-se como um momento de clarificação e aprofundamento de conhecimento matemático, didáctico e curricular dos PF, a serem investidos na melhoria do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como sublinha Alarcão (2007), "[…] o diálogo com a situação não pode quedar-se a um nível meramente descritivo, pois seria extremamente pobre. Tem de atingir um nível explicativo e crítico que permita aos profissionais de ensino agir e falar com o poder da razão" (p. 46).

3. Impacte do programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo do ensino básico português

Decorrente da análise de dados recolhidos com base, sobretudo, nas observações do ocorrido nas sessões de formação e nas sessões de acompanhamento em sala de aula, assim como na análise documental de produções matemáticas dos alunos e dos portefólios elaborados pelos PF, apresentam-se, de seguida, evidências do impacte do programa nos PF e nos alunos.

1. Nos professores formandos

Decorrente do trabalho realizado nos diferentes tipos de sessões, foi dado a observar mudanças nas concepções e práticas de ensino da Matemática de PF, em particular no que respeita à resolução de problemas e a tarefas de natureza investigativa. As evidências recolhidas apontam para mudanças que se prendem com o envolver os alunos uma maior diversidade de experiências matemáticas de resolver problemas e investigar orientadas, cada vez de forma mas explícita e intencional, para a (re)construção de conhecimento matemático e para o desenvolvimento de atitudes e de capacidades, nomeadamente capacidades de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática. No âmbito de tais experiências de fazer matemática propostas aos alunos, destacam-se ainda mudanças nas dinâmicas criadas nos diferentes momentos da aula, nas interacções estabelecidas, no questionamento do professor e na linguagem usada nos discursos do professor e dos alunos. As transcrições de excertos de portefólios dos PF a seguir incluídas evidenciam tais mudanças ocorridas nas práticas; ilustram também a tomada de consciência dos próprios professores da ocorrência das mesmas.

“Sei que a forma como hoje desenvolvo a minha prática na área da matemática, de um modo mais dinâmico e que coloca cada criança no papel de investigador, é resultado do trabalho desenvolvido nesta Acção de Formação.” (prof. A., 2008 p. 27)

“As actividades apresentadas e desenvolvidas ao longo da formação já contribuíram para uma alteração do trabalho desenvolvido na escola, não só na minha turma, mas também nas restantes turmas do 2º ano. Essa alteração verificou-se a muitos níveis, dos quais quero salientar o uso correcto da linguagem matemática… Outra das alterações verificadas foi a nova abordagem que passei a fazer no que diz respeito à resolução de problemas. De simples problemas de um ou dois passos, passámos a trabalhar um leque muito variado e rico de “desafios. […] Deixei de centrar o ensino apenas nos algoritmos e na prática de procedimentos.” (prof. M., 2008, pp. 44-45)

“Sinto que com esta formação consegui ter uma intervenção [na sala de aula] mais inovadora, gerindo com mais segurança o currículo e a complexidade inerente ao processo de ensino/aprendizagem da matemática.” (prof. CN., 2008, p. 89)

“Posso dizer que […] cresci bastante ao nível do conhecimento matemático, curricular e didáctico. Ao nível do conhecimento matemático notei uma maior fluência ao nível do questionamento que fiz aos meus alunos […] e da linguagem que utilizo.” (prof. L., 2008, p. 26)

> *“[…] tomei consciência de nem sempre utilizar a linguagem matemática com rigor, apesar de ir introduzindo o vocabulário específico e adequado à situação, nos momentos apropriados.” (prof. C, 2008, p. 24)*

Relativamente a mudanças na dinâmica de sala de aula e na gestão dos tempos de aprendizagem, foi dado a observar que, inicialmente, vários PF, no contexto da resolução de problemas e da realização de investigações, tendiam a apresentar a tarefa fornecendo pistas para a sua resolução; durante o desenvolvimento da tarefa, diversos PF pendiam a fornecer indicações aos alunos que conduziam à resposta esperada. Era, também, frequente não haver um momento para a partilha e discussão, com toda a turma, do trabalho realizado. Progressivamente, muitos PF foram criando sucessivas oportunidades para a activa participação e envolvimento dos alunos. De forma crescente foi visível, por parte de muitos PF, uma preocupação em centrar mais a sua intervenção no incentivar os alunos a progredirem e a ultrapassarem dificuldades com base em questões provocativas do pensamento, evitando fornecer indicações sobre o caminho a seguir ou o que fazer para vencer um obstáculo. Além disso, a gestão do tempo da aula propendeu a ser feita de modo a que os alunos, na sequência do desenvolvimento da tarefa proposta, tivessem oportunidade de partilhar e discutir com toda a turma o trabalho realizado. Neste contexto, observou-se que muitos PF procuravam, cada vez mais, não dominar a discussão, mas sim estimular a comunicação entre os alunos, com base em questões que solicitavam a explicitação, a clarificação, a explicação e a justificação de estratégias ou processos usados e conclusões tiradas.

Nos casos em que se constatou que os PF já promoviam a partilha e discussão na turma do trabalho realizado, notou-se que este momento passou a ser orientado de um modo mais produtivo; tal decorreu, sobretudo, de um questionamento mais eficaz. A este propósito, é de sublinhar a melhoria nos padrões de questionamento de vários PF. Um questionamento dominado por questões fechadas e de resposta curta (nomeadamente de resposta sim / não), centradas essencialmente na recordação e memorização de informação factual, deu lugar a um questionamento onde também começaram a surgir, cada vez com mais frequência, questões abertas, questões produtivas e provocativas do pensamento, tais como: “Porquê?”; “O que aconteceria se…?”; “Porque se deve, ou não, aceitar esta solução / conclusão?”; “Explica a tua ideia.”; e “O que pensas da estratégia usada pelo teu colega?”.

É ainda de relevar a variação nos modos de trabalho; a diversificação dos tipos de tarefas; e uma maior diversificação e rentabilização dos recursos usados para fomentar e sustentar as aprendizagens dos alunos. No caso da resolução de problemas, a generalidade dos professores passou a propor aos alunos problemas de diferentes tipos e não somente (ou preferencialmente) problemas de cálculo, bem como problemas que se resolviam usando estratégias diferentes. As situações e contextos, subjacentes a investigações e problemas propostos aos alunos, tornarem-se também mais ricos; isto, porque, por um lado, enfatizavam conexões intra-matemática, bem como conexões com outras áreas curriculares e com a vida real. Para além dos problemas para aplicação de conhecimento matemático, passaram a surgir também problemas que requeriam a construção de conhecimento matemático. Em acréscimo, em alguns casos, as situações e contextos apresentados envolviam elementos da história da matemática, fomentando a apreciação por esta área do saber.

As transcrições de excertos de portefólios dos PF a seguir incluídas, ilustram aspectos acima mencionados quanto ao impacte do PFCM.

“As sessões de formação foram muito importantes na aprendizagem de formas mais ricas e significativas de trabalhar a resolução de problemas e as investigações; de aumentar o rigor científico e terminológico; de melhorar o questionamento do professor, de orientar os alunos potenciando a sua actividade matemática, …” (prof. D, 2008, p. 32).

“O enfoque dado à resolução de problemas no Programa de Formação permitiu um “olhar diferente”, uma mudança de atitudes quer da parte do professor, quer do aluno. Passei a propor problemas que fogem aos estereotipados dos manuais escolares, e remetem os alunos para formas de raciocínio mais elaboradas, são mais interessantes e motivadores, tornando-se um desafio ao pensamento matemático do aluno e também do professor!” (prof. AG, 2008, p. 8)

2. Nos alunos

Em estreita relação com as mudanças que os próprios professores identificaram nas suas práticas, referiram melhorias na aprendizagem matemática dos seus alunos. Na explicitação de aprendizagens dos alunos sobressaem referências ao desenvolvimento de capacidades de pensamento relacionadas com a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, bem como ao desenvolvimento de atitudes face à matemática, em geral, e à resolução de problemas, em particular.

> *"A evolução continua a ser visível na turma que lecciono, que adopta hoje uma postura mais desafiadora face à matemática, buscando novas estratégias e demonstrando uma maior capacidade de raciocínio." (prof. A, 2008 p. 27)*

> *"Muitas das minhas aulas de matemática foram programadas a partir de trabalhados partilhados nas sessões de formação. […] Experimentei alguns problemas. No início desmonorei, as respostas eram tentativas ao acaso sem o mínimo de reflexão, os alunos nem sequer se autoquestionavam. […] Mais tarde, […] havia uma postura diferente face à tarefa […] os alunos descobriam erros cometidos e com entusiasmo tentavam novamente." (prof. CN., 2008, p. 31)*

> *"A confiança pessoal e autonomia dos alunos têm aumentado progressivamente com a resolução dos problemas. Observei que alguns alunos perceberam que os problemas podem ter mais que uma condição e que para se encontrar a solução correcta. Quando chegam a uma solução, já são capazes de a criticar. Na comunicação do produto final, verifiquei que houve um "amadurecimento" na forma como apresentam as estratégias que encontraram para chegar à resolução final. Já conseguem ouvir os colegas e prestam atenção quando algum grupo apresenta uma estratégia ou uma forma de cálculo inovadora." (prof., AG,, 2007, p. 13)*

Na sequência da realização das várias sessões de supervisão / acompanhamento em sala de aula foi dado a observar o desenvolvimento do pensamento matemático de vários alunos. De um modo particular, no contexto da resolução de problemas e da realização de investigações, constataram-se mudanças em vários indicadores de crescimento intelectual (Tenreiro-Vieira, 1994), nomeadamente: (i) impulsividade, (ii) metacognição, (iii) precisão de linguagem; e (iv) gosto pela resolução de problemas.

Inicialmente e no contexto da resolução de problemas e da realização de investigações, quando confrontados com questões como "Que razões te levaram a dar essa resposta?"; "O que te leva a pensar que essa resposta está correcta?", muitos alunos tendiam a não responder; pendiam, sim a riscar ou apagar a resposta dada, assumindo, de imediato, que o que tinham feito não era aceitável. Quanto desencorajados de concretizar a sua intenção de riscar ou apagar um processo de resolução e a solução encontrada e, ao invés, incentivados a descreverem o que pensaram, alguns alunos não o faziam e outros faziam-no de uma forma pouco clara e precisa, não terminando as frases que iniciavam e usando muitas interjeições.

Progressivamente, denotou-se uma diminuição da impulsividade patente no pequeno número, e mesmo ausência, de rasuras nas suas produções escritas. Além disso, foi dado a observar que os alunos já não se precipitavam tanto a responder, discutiam e reflectiam nas estratégias a usar antes de implementarem; procuravam monitorizar o processo de implementação de uma estratégia, reviam o percurso feito e avaliam a solução encontrada antes de darem a tarefa como terminada. Tal sugere um crescimento a nível de pensamento metacognitivo.

Constatou-se um crescente aumento no gosto pela resolução de problemas, porquanto muitos dos alunos, progressivamente, deixaram de fazer afirmações do tipo “Isto é muito difícil”, “Não sei fazer”, “O que é para fazer aqui?” e “O que devemos responder?”. Ao invés, começaram a solicitar menos a ajuda do professor, pedindo inclusive que não fossem dadas sugestões de estratégias a usar, nem comunicada a solução, pois queriam tentar resolver sozinhos. De forma crescente, pediam ao professor lhes propor problemas e investigações.

Nas interacções com os outros, nomeadamente para os alunos partilharem o seu pensamento, foi dado a observar o progressivo uso de termos mais correctos e adequados e o uso de frases completas. Tal aponta no sentido de haver crescimento a nível da precisão de linguagem. Nesta linha, é de relevar o desenvolvimento de atitudes face à matemática, em geral, e à resolução de problemas e ao investigar em particular. Entre tais atitudes destaca-se a persistência e a abertura de espírito.

Um exemplo ilustrativo da mudança, na atitude perante um problema, tem a ver com a resolução de problemas de um ou dois passos (ou problemas de cálculo, conforme designação usada por autores como Boavida et al., 2008). Foram vários as situações e contextos em que os alunos perante um problema daquele tipo se precipitavam a dizer “é de mais”, “é de menos”, “é de vezes” ou “é de dividir”. Amiúde, tal tentativa de adivinhar a operação a usar tinha por base o deterem-se em termos usados no enunciado do problema sem atender ao contexto como um todo, como na situação “O João e Ana estão a fazer uma colecção de cromos de futebol. O João já tem 24 cromos e a Ana tem 16. Quantos cromos o João tem a mais do que a Ana”. A expressão “a mais”, para muitos alunos, era entendida como uma pista de que para resolver o problema tinham de “fazer uma conta de mais”, conforme terminologia usada pelos próprios alunos, o que denota também pouco desenvolvimento do sentido das operações.

Nesta linha, em vários casos, os alunos optavam por resolver um problema recorrendo a uma das quatro operações básicas sem se deterem para reflectir sobre a adequação da opção feita e, uma vez obtida uma solução não se questionavam acerca da razoabilidade da mesma, aceitando mesmo soluções passíveis de serem consideradas absurdas (como por exemplo, situações em que alguém depois de ter gasto parte do seu dinheiro em compras, ficava com uma quantia superior àquele que tinha inicialmente). Na sequência do trabalho desenvolvido, pelo professor, em sala de aula, muitos alunos foram abandonando a tendência para adivinhar a(s) a(s) operação(ões) adequada(s) à resolução de um problema, bem como a tendência em não monitorizar o processo de resolução e a solução obtida.

Progressivamente, muitos alunos evidenciaram maior flexibilidade de pensamento, procurando compreender o problema e resolvê-lo recorrendo a uma estratégia adequada, que podia envolver, nomeadamente, fazer desenhos, fazer um esquema ou fazer uma tabela. Denotou-se ainda, designadamente nas interacções estabelecidas entre os alunos, uma maior preocupação em rever o processo de resolução e em avaliar a aceitabilidade da solução no contexto do problema.

4. Considerações finais

As actividades de formação desenvolvidas no âmbito do PFCM configuraram-se como oportunidades de crescimento pessoal, social e profissional do professor, proporcionando o desenvolvimento de competências profissionais essenciais à melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática. Com efeito, o desenrolar das sessões de formação em grupo, das sessões de supervisão em sala de aula, assim como o acompanhamento da actividade matemática dos alunos, evidenciou que muitos professores integraram na acção conhecimentos (re)construídos na formação.

Para tal, contribuíram vários aspectos, entre os quais se salienta: a existência de sessões de formação em grupo e de sessões de supervisão em sala de aula; as estratégias de formação usadas nos diferentes tipos de sessões; e o ambiente de formação em conjugação com o papel desempenhado pela formadora. Com efeito, o reconhecimento do acompanhamento de sala de aula como uma componente "muito importante" é um aspecto transversal nas opiniões expressas pelos PF. Em relação às estratégias de formação, os PF salientaram: a articulação teoria-prática; as oportunidades de resolver e discutir problemas e tarefas de natureza investigativa; a partilha, discussão e reflexão sobre a acção. Em relação ao ambiente de formação, entre os aspectos mais sublinhados pelos PF encontra-se: a abertura de espírito, aceitação, flexibilidade e disponibilidade intelectual em atender e dar resposta às solicitações e questões científicas e didácticas surgidas; a oportunidade de explicitar dúvidas e formular questões sem "medos"; e a segurança e apoio sentidos na planificação e no desenvolvimento do trabalho com os alunos, bem como na gestão de sentimentos associados ao processo de mudança, como, por exemplo, a insegurança e o receio de "correr riscos" rompendo com padrões habituais de actuação.

O exposto releva a pertinência e indispensabilidade de oportunidades de formação contínua que articulem diferentes tipos de sessões, incluindo sessões de formação em grupo e sessões de acompanhamento em sala de aula, assumindo um cenário de supervisão reflexivo, afirmando a reflexão antes, durante e após a acção como motor de (re)construção e/ou aprofundamento de saberes a serem reinvestidos nas práticas.

Neste enquadramento, importa que o grupo de formação se assuma como uma comunidade de aprendizagem radicada no trabalho cooperativo onde todos possam sentir que os seus contributos (sob a forma de sugestões, dúvidas, questões, …) são aceites e seriamente considerados; onde todos possam sentir que podem (e querem) partilhar: vivências de sala de aula; experiências e recursos didácticos; dúvidas e dificuldades sentidas na abordagem de determinados conteúdos; medos e inseguranças no uso de determinados recursos ou tarefas. Neste contexto, poder-se-á suscitar e alimentar o empenhamento e intencionalidade de uma actuação docente que fomente, por parte dos alunos, a construção e utilização de conhecimento matemático e o desenvolvimento de capacidades de pensamento, em particular de capacidades ligadas à resolução de problemas, ao raciocínio matemático e à comunicação matemática, de forma a orientar o ensino da matemática numa perspectiva de educação e não de uma mera instrução, que potencie a formação de cidadãos capazes de apreciar e utilizar a matemática nas diferentes esferas da vida.

ANEXO 1 − Propostas didácticas desenvolvidas e usadas na formação

Resolução de Problemas − Exemplo 1

O jogo desejado…
O João pretende comprar um jogo para a sua consola cujo custo é de 50 euros. Para tal começou a juntar dinheiro. No início tinha 4 euros. No final da primeira semana de poupança tinha 5 euros. No final da segunda semana tinha 7 euros e no final da terceira semana tinha 10 euros. Se continuar a juntar dinheiro a este ritmo, ao fim de 12 semanas já terá dinheiro para comprar o jogo?

- Quanto custa o jogo para consola que o João pretende comprar?
- Tendo em consideração a informação fornecida no enunciado do problema, completa o quadro seguinte:

Momento	Início	Fim da 1ª semana	Fim da 2ª semana	Fim da 3ª semana
Quantia (em euros)				

- Que quantia prevês que o João tenha no final da quarta semana?
  Justifica a tua previsão.
- Descreve, por palavras, uma estratégia que, em tua opinião, seja adequada para resolver o problema. Essa estratégia pode implicar o recurso a materiais, desenhos, esquemas, ...
- Resolve o problema, usando a estratégia que descreveste.
- Afinal, ao fim de 12 semanas o João já tem, ou não, dinheiro suficiente para comprar o jogo de consola?
  Porquê?

Resolução de Problemas − Exemplo 2

Dia de azar …
A Joana, ontem, esteve a jogar monopólio com os amigos. Era o seu dia de azar. Logo no princípio teve de gastar metade do seu dinheiro. Depois pagou 4 euros em impostos e, logo a seguir, perdeu metade do dinheiro com que tinha ficado. Nessa altura ficou com 12 euros, e, felizmente para ela, tiveram de terminar o jogo. Quanto dinheiro tinha a Joana no início do jogo?

- O que aconteceu nas sucessivas jogadas que a Joana fez durante o jogo do monopólio?
- Com quanto dinheiro ficou a Joana no fim?

- O que se quer saber?
- Descreve o que podes fazer para encontrar a resposta à questão formulada no problema.
- Resolve o problema, usando a estratégia que descreveste.
- Revê as respostas dadas às questões anteriores de forma a confirmar se o modo como pensaste e se os cálculos que fizeste estão correctos.
- Inventa e escreve um problema semelhante ao apresentado.

Investigações − Exemplo 1

Polígonos Regulares
Usando hexágonos regulares, congruentes, construiu-se a figura 1.

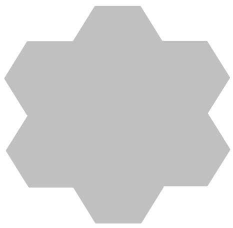


Figura 1

- Recorda o que é um hexágono regular. Quantos hexágonos regulares, congruentes, são necessários para construir a figura 1.
- Verifica, construindo a figura 1 com peças do *Pattern blocks*.
- Em vez de hexágonos regulares, congruentes, com que outros polígonos, e quantos, poderás compor a figura 1?
- Usando materiais manipuláveis (por exemplo, peças do *Pattern blocks*), descobre diferentes maneiras de compor a figura1 e regista-as.
- Que conclusões podes tirar?

Investigações − Exemplo 2

Poliedros
Os poliedros são figuras tridimensionais constituídas só por superfícies planas poligonais de tal forma que englobam uma porção finita e sem buracos do espaço.

- Utilizando materiais manipuláveis (por exemplo, material tipo *polydron*, polígonos em cartão, planificações em cartolina, …), constrói modelos de poliedros.
- Observa cada modelo de poliedro construído e descreve-o.
- Regista características de cada um dos poliedros construídos, numa tabela do tipo que a seguir se apresenta.

Poliedro	Características		
	Nº de Faces	Nº de Vértices	Nº de Arestas

- Procura descobrir uma relação entre o número de faces (F), arestas (A) e vértices (V) de um poliedro.
- Usando modelos de poliedros construídos com material polydron e/ou modelos de diferentes poliedros, verifica se a relação que descobriste se confirma.
- Com base na relação que descobriste, diz quantas arestas terá um poliedro que se tiver 5 faces e 6 vértices, quantas arestas terá? E se tiver 5 faces e 5 vértices, quantas arestas terá?
- O cubo é um **poliedro regular**. Com o material tipo *polydron* constrói outros poliedros regulares.

Bibliografia

Alarcão I. (2007) Professores reflexivos em uma escola reflexiva. 5ª.ed. Cortez. Editora, São Paulo. Brasil.

Boavida A, Paiva A., Cebola G., Vale I., Pimentel T. (2008): *A experiência matemática no ensino básico – Programa de formação em matemática para professores do1º e 2º ciclos do ensino básico*. Lisboa, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ball D, I. Goffney, Bass D. (2005):*The role of mathematics instruction in building a socially just and diverse democracy*. *The Mathematics Teacher*, 15 (1/2), 2-6.

Capra F. (1994):*A teia da vida*. 9.ed. Cultrix, São Paulo.Brasil.

Despacho conjunto nº 812/2005: Diário da República, 2ª série – nº 204, 24 de Outubro de 2005.

Despacho nº 6754/2008: Diário da república, 2ª série – nº 48, 7 de Março de 2008.

Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2004):Provas de aferição do ensino básico (4º, 6º e 9º anos). Análise comparativa (2001-2003) – Língua Portuguesa / Matemática". DGIDC, Lisboa.

Fullan M, Earl L. (2002): *United Kingdom national literacy and numeracy strategies*. Journal of Educational Change, 3, 1-5.

Gabinete de Avaliação Educacional (2004):Resultados do Estudo Internacional PISA 2003 – Programme for International Student Assessment". GAVE, Lisboa.

Gabinete de Avaliação Educacional (2007):PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses. GAVE, Lisboa.

Irwin K. C.,. Britt M. S (2005): *The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand numeracy project.* Educational Studies in Mathematics, 58, 169-188.

Japiassú H., Marcondes D. (1996): *Dicionário básico de filosofia*. 3.ed. Jorge Zahar, Rio de Janeiro.Brasil.

Loucks-Horsley S., Hewson P., Love N., Stiles K. (1998): *Designing professional development for teachers of science and mathematics.* The National Institute for Science education, Thousand Oaks.

Ministério da Educação (2001):Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências essenciais. Editorial do Ministério da Educação, Lisboa.

National Council of Teachers of Mathematics (1989): Curriculum and evaluation standards for school mathematics. NCTM, Reston.

National Council of Teachers of Mathematics (2000):Principles and standards for school mathematics. NCTM, Reston.

National Research Council (1996):National Science education standards. National Academy Press, Washington.

Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos (2000):Measuring student knowledge and skills. OCDE, Paris.

Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos (2003):The PISA 2003. Assessment Framework – Mathematics, reading, science, problem solving, knowledge and skills. OCDE, Paris.

Ponte P., Ferreira C., Varandas J., Brunheira L.,. Oliveira H (1999): *A relação professor aluno na realização de investigações matemáticas.* Projecto MPT e APM, Lisboa.

Ponte P., Serrazina L., Guimarães H., Breda A., Guimarães F., Sousa H.,. Menezes L, Martins E., Oliveira P. (2007): *Programa de Matemática do Ensino Básico DGIDC, Lisboa.*

Serrazina L.et al. (2005): *Programa de Formação Continua de Matemática para Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa, DGIDC

Tenreiro-Vieira C (1994): *O pensamento crítico na educação científica: Proposta de uma metodologia para a elaboração de actividades curriculares* (tese de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa

Zevenbergen R. (2004): *Technologizing numeracy: Intergenerational differences in working mathematically in new times*. Educational Studies in Mathematics, 56, 97-117.

Celina Tenreiro-Vieira. Professora requisitada no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico na Universidade de Aveiro-Portugal. Licenciada em Matemática / Ciências da Natureza; Mestre e doutora em Ciências da Educação (especialidade Didáctica), pela Universidade de Lisboa. Membro do Centro de Investigação em Didáctica e Tecnologia na Formação de Formadores da Universidade de Aveiro, tem desenvolvido estudos de investigação na área da formação de professores; Capacidades de Pensamento; Contextos de educação formal e não formal.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 93-109
ISSN: 1815-0640

Análisis de la enseñanza de la geometría en una escuela secundaria[1] argentina

Natalia Sgreccia; Celia Benetti; Luisa Menichelli; Stella Mezzelani; Judith Pittaro; Evangelina Cismondi; Natacha Duzevic; Jorgelina Frattini y Betiana Paschero.

Resumen

Se presenta una síntesis de los resultados de la investigación que se llevó a cabo durante el año 2008 en una escuela secundaria situada en el sur de la provincia de Santa Fe, Argentina. El equipo estuvo conformado por docentes, estudiantes y graduados recientes del Profesorado en Matemática, que se cursa en el mismo establecimiento en el turno vespertino. Se hallaron evidencias que permitieron confrontar los hallazgos con las hipótesis, así como dilucidar emergentes que podrían constituirse en futuras posibilidades de trabajo conjunto.

Abstract

We show a synthesis of the results of the research which was managed during the year 2008 in a secondary school of the south of the province of Santa Fe, Argentina. The team was integrated by five teachers, two students and two graduated teachers of the career of Training Teachers of Mathematics which is developed in the same institution at night. We found evidences that allowed us to confront the findings with the hypothesis, like as to elucidate emergences which might constitute in future possibilities of joint work.

Resumo

Apresenta-se uma sínteses dos resultados da investigação que teve lugar durante o ano 2008 numa escola secundaria situada no sul da província de Santa Fe, Argentina. A equipe esteve conformada por docentes, estudantes e graduados recentes do professorado em Matemática, que se cursa no mesmo estabelecimento no turno vespertino. Encontraram-se evidências que permitiram confrontar os descobrimentos com as hipóteses, assim como elucidar emergentes que poderiam constituir-se em futuras possibilidades de trabalho conjunto.

1. Introducción

¿Cuál ha sido el problema que motivó la investigación?

Entre los años 1960 y 1970 la enseñanza de la Matemática sufrió una transformación en sus contenidos y fundamentos como consecuencia del movimiento de renovación bourbakista, conocido como Matemática Moderna.

[1] La escuela secundaria en Argentina consta de 5 años, de 1° a 5°, y comprende alumnos de 13 a 18 años de edad.

Consecuentemente, la geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento. La exclamación que en 1959 realizara el matemático Dieudonné "¡Abajo el triángulo!" impulsaría a no incluir la geometría como objetivo prioritario de enseñanza en las orientaciones oficiales. La carencia de intuición espacial fue otra de las consecuencias del alejamiento de la geometría, defecto que hoy se percibe en las personas que se formaron en aquellos años. En los años 1970 se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no habían resultado muy acertados. En el ICME (Congreso Internacional de Educación Matemática) de 1976, el geómetra Atyiah determinó el regreso de la geometría a su status de objetivo prioritario de enseñanza al exclamar que la intuición geométrica sigue siendo la fuente más poderosa para la comprensión de muchos temas por lo que su enseñanza y aprendizaje deberían estimularse.

Entre los años 1970 y 1980 se abrió una discusión sobre las tendencias presentes en la enseñanza de la geometría y se inició una búsqueda de formas adecuadas para enseñarla a nivel mundial. Como resultado de ello, en los últimos treinta años la importancia de la geometría euclidiana ha venido sufriendo grandes variaciones. En nuestro país se han observado diferentes etapas en la importancia asignada a la geometría en el campo de la Educación Matemática: una que contemplaba un tratamiento específico basado en enunciado, demostración de propiedades y resolución de problemas específicos; otra, donde prácticamente quedó excluida en los aprendizajes y la actual, donde se declara su importancia básicamente como campo de motivación en relación con problemas concretos.

El profesor de Matemática que hoy se desempeña en la escuela media ha transitado en su formación previa al menos por uno de los dos primeros períodos mencionados. En la actualidad debería responder a lo normado en el Diseño Curricular Jurisdiccional[2] (DCJ), que difiere de las características que tuvo la enseñanza de la Matemática en las que él se formó. Alsina Catalá, Fortuny Aymemí y Pérez Gómez (1997) señalan que las consecuencias de la Matemática Moderna se pueden apreciar claramente en los profesores en ejercicio, ya sea por desconocimiento geométrico como por carencias en la didáctica específica, evidenciándose inseguridad para enseñar contenidos geométricos. Además, conocido es el hecho de que los modelos pedagógicos adoptados por los docentes se efectivizan en el aula a través de las configuraciones didácticas (Litwin, 1997) de sus clases y, a partir de ellas, los alumnos construyen sus aprendizajes. Haciendo referencia puntual a la escuela media, cabe preguntarse: ¿cómo influye el campo de formación académica de los profesores en la conformación de sus prácticas de enseñanza de la geometría?, ¿cuáles son las valoraciones pedagógicas de los docentes sobre la geometría como área de enseñanza?, ¿qué características asumen las actuaciones de los profesores al abordar la enseñanza de los contenidos y habilidades geométricas?, ¿cuáles son los indicadores de buenas prácticas, en función de los procesos reflexivos identificados, en la enseñanza de la geometría?

2. ¿Qué objetivos nos propusimos?

A continuación se presentan los objetivos propuestos:

[2] Con este término se hace referencia al currículum prescripto en la provincia de Santa Fe.

Específicos del tema de investigación:

Objetivo 1. Analizar la influencia del campo de formación académica de los profesores en la conformación de sus prácticas de enseñanza de la geometría en la escuela secundaria.

Objetivo 2. Identificar las valoraciones pedagógicas de los docentes sobre la geometría como área de enseñanza en la escuela secundaria.

Objetivo 3. Caracterizar las actuaciones de los profesores al abordar la enseñanza de los contenidos y habilidades geométricas en la escuela secundaria.

Objetivo 4. Encontrar indicadores de buenas prácticas en la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria en función de los procesos reflexivos identificados.

Propios del equipo de investigación

Objetivo 5. Introducir a los estudiantes del Profesorado en Matemática en la problemática de la investigación educativa en el área Matemática como componente importante para la reflexión y mejora de las prácticas educativas.

Objetivo 6. Conformar un equipo de investigación integrado por los docentes del Profesorado en Matemática en el cual se generen lazos de intercambio y producción.

3. ¿Por qué consideramos que se justifica investigar sobre este problema?

En experiencias anteriores (docencia, extensión e investigación) hemos notado que varios profesores en Matemática deciden no enseñar geometría en la escuela media, ya sea porque se sienten inseguros, no les gusta o no le dan importancia. Este hecho resulta de interés para indagar sobre el lugar que el docente le asigna a la geometría en la formación de un adolescente y observar de qué manera promueve su aprendizaje. En este sentido, se considera que lo que el docente realiza efectivamente en sus clases es un indicador concreto de qué importancia le asigna al estudio de la geometría en la escuela media. Esta investigación se centró en estudiar cómo se configura la geometría en el nivel medio.

Este recorte en el estudio se realizó porque: a) en esta etapa de la escolaridad la persona empieza a desarrollar el pensamiento formal, las abstracciones, con una toma de conciencia de la conformación de estructuras que den cuenta del mismo; b) la geometría, entendida como una Matemática del espacio, permite en este nivel educativo relacionar objetos concretos, del mundo sensible, con entidades teóricas y, al mismo tiempo, formalizarlas y operar con ellas como ideas matemáticas; c) si bien en los últimos años ha crecido la investigación en didáctica de la geometría, aún continúa siendo relativamente escasa, en comparación con otras áreas de la Matemática, y subsisten dificultades para el desarrollo del pensamiento geométrico.

4. ¿Cuáles fueron nuestros supuestos iniciales?

Hipótesis 1. El discurso del docente de Matemática, desde lo declarado, no siempre es coherente con sus prácticas de enseñanza de la geometría.

Hipótesis 2. Las prácticas de la enseñanza de la geometría que priorizan el avance lineal de contenidos, atendiendo exclusivamente a la variable tiempo, no contribuyen a aprendizajes significativos.

Hipótesis 3. Los momentos de discusión en la clase son una componente en la configuración de buenas prácticas de la enseñanza de la geometría en la escuela media.

5. En cuanto a los antecedentes, ¿con qué nos encontramos?

Se consultaron numerosas publicaciones (capítulos de libros, artículos especializados en revistas y documentos ministeriales) para la delimitación, caracterización y composición de las diversas categorías de análisis y para la detección de los aspectos vacantes en esta área, los cuales giran alrededor de:

* Demandan propuestas concretas que realcen el papel educativo de la geometría. La tensión radica en que, en la práctica, la geometría sigue siendo “la pariente pobre” de la Educación Matemática y, por otro lado, se han producido avances muy importantes en cuanto a investigaciones y dispositivos para esta parte de la Matemática (Morales Santana, 2007).

* Ejemplifican experiencias en geometría donde los aprendizajes de los alumnos se favorecen mediante intervenciones adecuadas del profesor, las cuales propician la investigación y la resolución de problemas. Además, hay casi innumerables estudios sobre el potencial didáctico de diversos recursos para geometría (Flores, 2005).

* Consideran nociones, como intuición, imaginación, creatividad, visualización, entre otras, como imprescindibles para pensar en geometría (Alsina, 2007).

En el encuadre teórico se consideraron los conceptos de enseñanza y aprendizaje, en general (Trillo y Sanjurjo, 2008) y en geometría en particular (Santaló, 1999); conocimiento matemático (Alagia, Bressan y Sadovsky, 2005) y, en especial, geométrico (Broitman e Itzcovich, 2008); contenidos y habilidades geométricas en la escuela secundaria (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003); nociones de espacio y objetos geométricos (Itzcovich, 2008); vinculaciones de la geometría con la historia y el lenguaje, particularizándose además en las definiciones (Villela, 2008); recursos y materiales didácticos específicos (Gómez, 2002); trabajo sobre los errores en las clases de geometría (Mántica, Nitti y Scaglia, 2006).

6. Algunas consideraciones metodológicas

El objeto de estudio fueron las prácticas de enseñanza de la geometría en la escuela secundaria y la unidad de análisis estuvo conformada específicamente por tales prácticas en una escuela secundaria, desde 1° hasta 5° año, del sur de la provincia de Santa Fe (Argentina). Concretamente la muestra estuvo constituida por diez clases (dos de cada curso) de cuatro profesores (uno trabajaba en dos cursos).

El enfoque metodológico fue fundamentalmente cualitativo, el cual permitió indagar, analizar y comprender prácticas de enseñanza de la geometría en la escuela secundaria de referencia. El alcance fue descriptivo, caracterizando las prácticas de enseñanza de la geometría en dicha escuela, y correlacional, estableciendo relaciones entre las categorías emergentes de la etapa previa. Las estrategias de recolección fueron entrevistas semiestructuradas a cuatro docentes de Matemática del nivel medio y observaciones de diez clases de geometría. Lo recolectado fue transcripto, identificándose cada acto de habla. Para el tratamiento de la información se procedió al diseño de matrices donde se explicitaron dimensiones de análisis (ver Desarrollo), con sus respectivas categorías y modalidades, elaboradas por este equipo. Se analizó el discurso para estudiar la complejidad de las interacciones que acontecen en el acto educativo (Burbules, 1999; Lemke, 1997; Van Dijk, 1998). Luego se realizó un análisis cruzado, donde se estudió comparativamente lo recogido en las entrevistas (“el decir”) y en las clases (“el hacer”) de cada profesor.

Los recursos utilizados fueron grabador periodístico y notas de campo para ambas técnicas, y una filmadora para el registro en video de todas las clases observadas.

7. Principales resultados

Las dimensiones de análisis se consideraron para cada docente y clase, ordenándose lo que emergió en cada categoría (las modalidades) en tablas, constituyéndose 60 (15x4) tablas para las entrevistas (ya que hubo 15 categorías de análisis y 4 docentes) y 140 (14x10) tablas para las clases (ya que hubo 14 categorías de análisis y 10 clases).

7.1. Entrevistas

Se presenta el análisis descriptivo y correlacional, de lo recolectado en las entrevistas, considerando a los docentes como parte de un colectivo institucional.

Dimensión 1. Formación docente en geometría

1.1. Formación inicial. Todos los docentes estudiaron geometría métrica y analítica en su formación inicial. Excepto un docente, todos también aprendieron geometría proyectiva en dicha formación. Salvo un caso, no se desarrollaron contenidos geométricos en las prácticas de residencia de su carrera de grado y en todos los casos pareciera que la selección estuvo a cargo del docente, ya sea de residencia o del curso donde fueron a hacer las prácticas.

1.2. Formación continua. Dos docentes realizaron varios cursos en geometría, mientras que uno se perfeccionó en geometría como parte de un curso más amplio de Matemática y el restante no realizó cursos de capacitación. Tres de los docentes realizaron postítulos, uno en gestión y otros dos en Matemática y Estadística, donde estudiaron aspectos epistemológicos de la geometría y en particular las geometrías no euclidianas.

1.3. Impacto de ambas formaciones (1.1 y 1.2) en las prácticas pedagógicas. Todos los docentes identifican como conductista a su forma inicial de enseñar geometría y se perciben cuestionándose dicho enfoque en la actualidad hacia modos más bien constructivistas (como se explicitó en un caso), exploratorios, manipulativas e investigativos (como se mencionó en dos casos). En cuanto a su historia escolar, en dos casos se hace referencia a una enseñanza tradicional, otro docente comenta que se trataban demostraciones sin vinculaciones a situaciones cotidianas y el restante no recuerda, quien dice poner el acento en actividades motivadoras en sus prácticas, mientras que los otros tres docentes no establecen una vinculación explícita entre su historia escolar y lo que desarrollan en sus prácticas actuales.

Dimensión 2. Contenidos geométricos

2.1. Selección de contenidos. Para la selección de contenidos, en un caso se hace referencia a un trabajo conjunto entre colegas, en otro caso (docente que había iniciado sus actividades en la escuela recientemente) a una selección ya realizada por otro y los dos docentes restantes mencionan contenidos geométricos puntuales. En cuanto a lo que se aborda efectivamente en clase, aparecen diversas respuestas (uno cada uno): todos los de la formación inicial; todos los seleccionados; según las particularidades del grupo y la profundidad que asumirá el contenido con ese grupo; aún no desarrolló contenidos geométricos. Refiriéndose a las demostraciones, en dos casos se mencionan teoremas puntuales de los primeros años de escuela secundaria, en un caso se hace referencia a pruebas o argumentaciones construidas en conjunto en la clase y en otro caso se condiciona la toma de decisión en relación a las demostraciones según el nivel de los alumnos. En relación a los contenidos prioritarios para la formación de un adolescente es llamativa la disparidad de respuestas, por lo que resultaría productivo que los docentes se dispusieran a discutir y consensuar sobre este aspecto en el marco de la institución.

2.2. Intencionalidad y Temporalización. En tres casos los docentes valoran distintas facetas de la geometría (motivación, desarrollo del pensamiento, aplicación, soporte de otros ejes), mientras que el docente restante no realiza distinciones sobre esta rama de la Matemática. En general aparece la geometría intercalada con otras ramas de la Matemática en distintos momentos del año y en dos casos se mencionan unidades específicas.

2.3. Representaciones gráficas. Los docentes acuerdan en que las representaciones gráficas están presentes en diversos ejes de Matemática, no sólo geometría, y en un caso se hace referencia a los diversos lenguajes del área. También coinciden en la importancia de las representaciones, tanto para resolver problemas (un caso) como para visualizar situaciones (dos docentes). En cuanto a las habilidades asociadas, se mencionó (uno cada uno): comunicación en la socialización de las actividades; dibujo como modo concreto de materialización; construcción, descripción y reflexión sobre la teoría como retroalimentación; procedimiento que se efectúa con ciertas herramientas a partir de un modelo del docente.

Dimensión 3. Trabajo áulico

3.1. Obstáculos e ideas subyacentes. En cuanto a los obstáculos en las clases de geometría, en los tres casos que se mencionó tenerlos, pareciera que los mismos son externos al docente: tiempo de la planificación, elementos de geometría y rechazo de los alumnos hacia la geometría. Todos dicen indagar, pareciera desde la oralidad, sobre las ideas previas o subyacentes y en dos casos se explicita hacerlo mediante problemas o lluvia de ideas.

3.2. Comunicación en el aula. Todos los docentes hacen referencia a una buena comunicación, de intercambio con sus alumnos, en el aula. En dos casos se mencionan a las producciones escritas y a los cursos numerosos como ámbitos donde a veces se dificulta tal comunicación.

3.3. Vinculación entre motivación y distintos ejes del área Matemática. Aquí aparece una llamativa disparidad en las respuestas de los tres docentes que explicitaron sus apreciaciones al respecto. En un caso se hace referencia a la cotidianeidad, en otro a las funciones y en otro caso no se pone el acento en el contenido sino más bien en los grupos. En dos casos acuerdan que las expresiones algebraicas suelen no motivar tanto a los alumnos.

Dimensión 4. Recursos didácticos

4.1. Recursos didácticos a disposición del docente. En cuanto a lo que los docentes utilizan, todos manifestaron hacer uso de numerosos y variados recursos. También todos acuerdan en que la institución los provee, o los traen ellos o incluso sus alumnos.

4.2. Algunos recursos didácticos específicos, con intencionalidad. En cuanto al uso del material concreto y la formalización que se realice, se observan diversas apreciaciones. En los tres casos en donde la respuesta se centra en la formalización, se concibe como (uno cada uno): puesta en común en el grupo-clase; teoría que presenta el docente; elaboración de secuencias de pensamiento, mediante el interrogatorio. El cuarto docente concibe a la formalización como una parte del proceso que puede estar antes o después del uso de material concreto y siempre antes que la aplicación. Aquí emerge la inquietud de qué está entendiendo cada docente en relación a la noción de formalización, vinculándose tal concepción con lo que efectivamente se realiza en las clases de los distintos años del secundario y, más aún, con una posibilidad de coherencia y articulación en este sentido.

En cuanto a los software que podrían alentar un trabajo en geometría dinámica, un docente menciona varios, dos docentes mencionan uno cada uno y el docente restante dice no conocer. En ningún caso se especifican los modos de utilización en clase y en un caso se hace referencia a que contribuye a la motivación de los alumnos. En relación a los libros de texto, todos coinciden en no seguir estricta y exclusivamente una sola editorial y en que suelen consultar la biblioteca de la escuela. En dos casos, además, se hace referencia a material enviado por el Ministerio de Educación. Refiriéndose a la historia de la geometría, el accionar de los docentes es muy variado. Su inclusión en las clases, tiene que ver con (uno cada uno): lo que emerja a partir de la curiosidad de los alumnos; el relato o la narración sin la especificidad del tratamiento del contenido; la introducción breve de algún contenido; en forma transversal y profundizándose a medida que se desarrollan los contenidos para construir una concepción no estática de la Matemática. Resultaría productivo que los docentes exploren sobre los potenciales de la historia de la geometría, o de la Matemática en general, para elaborar posibles itinerarios didácticos acordes con la evolución del conocimiento disciplinar.

Dimensión 5. Valoración del docente

5.1. Vínculo del docente con la geometría. En cuanto a las sensaciones de los docentes hacia la geometría, en dos casos se habla de gusto, especificándose en uno de ellos que dicho gusto también es por parte los alumnos, a pesar de limitar las estrategias por falta de tiempo, y en el otro caso se declara un mayor gusto en la actualidad (luego de haber preparado una materia completa sobre geometría). Otro docente manifiesta miedo o respeto, por sentir que no fue tan formado como en otras ramas de la Matemática, mientras que el docente restante hace referencia a la faceta de concreción de la geometría para la resolución de problemas.

5.2. Vínculo entre el docente y los alumnos, a propósito de la geometría. Al referirse al contagio del gusto hacia la geometría, las respuestas de los docentes priorizaron diversos aspectos. En dos casos se hizo referencia al modo de trabajo del contenido en la clase, como ser la faceta concreta (o del mundo sensible) de la geometría, distinguiéndola de la faceta abstracta (o del mundo de las ideas), y el conocimiento del contenido por parte del docente acompañado por estrategias didácticas que ayuden a entender la explicación. En los otros dos casos se mencionaron cuestiones más generales, como la creatividad del docente, el entendimiento sobre la posibilidad de resolución de las situaciones planteadas, el entusiasmo y la participación activa como vías para que los alumnos disfruten en las clases. Al expresar qué le dirían a un alumno de secundario sobre qué es la geometría, se constató que (uno cada uno): se le asoció el conocimiento del entorno (en distintas escalas); se la concibe como rama de la Matemática que se ocupa del espacio (en dos y tres dimensiones); se la concibe como herramienta de la Matemática que se ocupa del espacio (en dos y tres dimensiones); se hizo referencia a las figuras (en distintas dimensiones y posiciones).

5.3. Vínculo del adolescente con la geometría. No realizaron distinciones entre la geometría y otros ejes de Matemática en cuanto a la importancia para la formación de un adolescente.

Dimensión 6. Perfil docente

6.1. Antecedentes profesionales y vocación docente. La trayectoria de los docentes es variada, siendo dos casos similares entre sí. Un docente cuenta con una trayectoria de más de 30 años de antigüedad en la docencia, transitando por los distintos niveles educativos, incluso en actividades de gestión institucional desde hace más de 20 años. Otro docente tiene un poco menos de 10 años de antigüedad en la docencia, habiendo volcado fuertemente su trabajo en Física y Química durante estos años. Los otros dos docentes con aproximadamente 20 años de antigüedad en la docencia, con un trabajo concentrado en Matemática en el nivel medio, teniendo además algunas horas de Física. En cuanto a la elección de la profesión, en dos casos se hace referencia a la Matemática por una cuestión de accesibilidad o comodidad, manifestándose además el interés de relacionarse con adolescentes. Los otros dos docentes hacen referencia al gusto por la Matemática y la enseñanza, especificándose en un caso que es desde la infancia y en el otro, el interés por la parte humana. Todos los docentes volverían a elegir la profesión docente, diciéndose en un caso que no necesariamente Matemática.

7.2. Observaciones de clases

Se presenta el análisis descriptivo y correlacional de lo recolectado en las **observaciones de clases**, que se realizó considerando cada par de clases del mismo curso como una unidad.

- **1º año**. Espacio físico: aula. Ubicación de alumnos: pequeños grupos.

Dimensión 1. Momentos en la gestión de la clase

1.1. Apertura. No se realiza una presentación explícita del tema, pero sí se desarrollan distintas actividades tendientes a introducir los nuevos contenidos. La exploración de saberes previos no se evidencia al principio de las clases sino durante el transcurso de las mismas a través de preguntas y actividades propuestas.

1.2. Desarrollo. Las actividades propuestas son diversas, favoreciendo la comunicación de ideas por parte de los alumnos: interpretación, construcción, deducción, investigación y aplicación. No se observa un trabajo sobre el error propiamente dicho, pero sí momentos puntuales donde el docente realiza observaciones de lo realizado o dicho por los alumnos.

1.3. Cierre. No se realiza una síntesis general de la clase y no se evidencia metacognición. Se plantean distintas tareas, individuales y grupales, en diferentes momentos de las clases.

1.4. Aspectos transversales. El clima áulico es propicio, pero se registran momentos de murmullo entre los alumnos, en los cuales el docente debe realizar pedidos de silencio.

Dimensión 2. Tratamiento de la geometría en la clase

2.1. Contenidos. Conceptuales: figuras y cuerpos geométricos, teorema de Pitágoras. Procedimentales: construcción y análisis de figuras geométricas, investigación y deducción, resolución de distintas actividades. Actitudinales: participación activa de los alumnos.

2.2. Secuenciación. Las actividades propuestas implican la participación activa de los alumnos favoreciéndose el trabajo de discusión grupal. Se utilizan diferentes recursos, principalmente concretos, para favorecer el tratamiento de los contenidos procedimentales.

2.3. Estrategias didácticas específicas. Las estrategias utilizadas (trabajo grupal, trabajo en el pizarrón e interrogatorio didáctico) se relacionan con los contenidos desarrollados.

2.4. Recursos didácticos. Son variados (concretos y en papel impreso) y se usan en distintos momentos, tanto por el docente como por los alumnos. El docente proporciona los recursos a los alumnos a partir de los cuales se desarrolla la mayor parte de las clases.

Dimensión 3. Discurso del docente

3.1. Lenguaje oral. Las explicaciones se acompañan con un lenguaje claro y preciso, favoreciendo el aprendizaje de ciertos términos matemáticos. Principalmente se utiliza el tiempo verbal presente y en ciertas ocasiones otros tiempos verbales según la intencionalidad.

3.2. Preguntas efectuadas. Mayormente las preguntas son enunciadas con "qué", del tipo afirmativas/negativas y apuntan al "cómo" realizar algunas actividades; tienen como función principal solicitar información y confirmar/negar.

3.3. Respuestas otorgadas. La mayor parte es de tipo afirmativa y para aclarar sobre la realización de actividades. Suele ser confirmar/negar. No se registran demasiados interrogantes de los alumnos, por lo que la cantidad de respuestas del docente es limitada.

3.4. Lenguaje corporal. Se expresa con seguridad desplazándose por los bancos, diferenciando su rol docente sin que eso implique perder la cordialidad del diálogo.

Dimensión 4. Acciones de los alumnos

4.1. Intervenciones de los alumnos. No son constantes, relacionadas con cuestiones planteadas por el docente o para solicitar mayor orientación en el desarrollo de las actividades.

4.2. Relación alumno-alumno. El diálogo entre los alumnos es respetuoso favorecido por las actividades grupales. La cooperación entre los alumnos no queda explícitamente registrada debido a las limitaciones del recurso tecnológico utilizado.

- **2º, 3° y 4° años**. Se omite la síntesis de su análisis en el presente artículo. Los interesados pueden consultarles a las autoras.

- **5º año**. Espacio físico: aula y sala de informática. Ubicación de alumnos: flexible.

Dimensión 1. Momentos en la gestión de la clase

1.1. Apertura. No se evidencia la exploración de saberes previos en el inicio de las clases, sí se consideran en el desarrollo. Se motiva a los alumnos haciéndolos participar.

1.2. Desarrollo. Hay diversidad de actividades: observación, construcción, discusión, interpretación, aplicación y fijación, algunas con encuadre histórico. No aparecen instancias de trabajo sobre el error, pero sí se realizan aclaraciones cuando se discute sobre significados.

1.3. Cierre. No se realiza una síntesis general de las clases. No se evidencia metacognición. Fuerte presencia del docente como orientador que favorece, a su vez, el trabajo autónomo.

1.4. Aspectos transversales. El clima áulico es propicio y permite que los alumnos dialoguen de otros temas mientras realizan las actividades, sin la necesidad de la intervención docente.

Dimensión 2. Tratamiento de la geometría en la clase

2.1. Contenidos. Conceptuales: polígonos regulares, estrellados y estrellas. Procedimentales: construcción de polígonos, reconocimiento de figuras y uso de software en la construcción. Actitudinales: participación activa y autónoma de los alumnos, valoración de las aplicaciones.

2.2. Secuenciación. Las actividades vinculan lo conceptual con lo procedimental, se trabaja lo conceptual desde la acción. Se evidencia razonamiento en las construcciones, que se realizan a través de diferentes procedimientos y recursos. No se observan emergentes en la clase.

2.3. Estrategias didácticas específicas. Las diversas estrategias utilizadas en los distintos momentos de la clase (preguntas, trabajo conjunto en el pizarrón, resolución de ejercicios, debate y construcciones) son coherentes con los contenidos desarrollados.

2.4. <u>Recursos didácticos</u>. Son variados (concretos, impresos e informáticos) y se usan en forma permanente, tanto por el docente como por los alumnos. Se registra lo desarrollado. Los alumnos cuentan con los materiales a utilizar (componente importante de estas clases).

Dimensión 3. Discurso del docente

3.1. <u>Lenguaje oral</u>. Se utiliza un lenguaje matemático claro y preciso favoreciendo la apropiación del mismo por parte de los alumnos. Se utilizan distintos tiempos verbales acordes a las intencionalidades. Los aportes de los alumnos son valorados por el docente.

3.2. <u>Preguntas efectuadas</u>. Mayormente de tipo afirmativas/negativas, enunciadas con “qué” y “cómo”, para solicitar mayor precisión y/o información, confirmar/negar y explicar.

3.3. <u>Respuestas otorgadas</u>. En su mayoría son afirmativas y responden al “qué”. Su función es confirmar/negar, aclarar contenidos y/o información, orientar las actividades y dar consignas.

3.4. <u>Lenguaje corporal</u>. Se desplaza por los bancos, con una postura erguida que marca su presencia y rol docente. Realiza mínimas gesticulaciones y se expresa con seguridad.

Dimensión 4. Acciones de los alumnos

4.1. <u>Intervenciones de los alumnos</u>. De manera espontánea y respetuosa, en respuesta a planteos realizados por el docente.

4.2. <u>Relación alumno-alumno</u>. Cuando la actividad lo requiere, los alumnos cooperan de manera considerable, natural y espontánea.

7.3. Análisis comparativo

Comparación entre “el decir” (relevado en la entrevista) y “el hacer” (de las clases) de los docentes: A (1° año), B (2° año), C (3° y 4° año) y D (5° año)

<u>Docente A</u>. Declara poseer formación, adquirida en forma tradicional y conductista, en geometría métrica y analítica, y haber realizado diversos cursos que incluyeron contenidos geométricos en su abordaje. En sus clases se observó el desarrollo de contenidos de geometría métrica. Declara que hoy tiende al trabajo desde la reflexión, construcción e investigación, que se vale de los contenidos para motivar “porque la geometría es observar y ver” y “ayuda a desarrollar el pensamiento” y concibe a la representación como una forma de comunicación.

Expresa abordar demostraciones desde lo heurístico grupalmente, usando construcciones y debatiendo. Lo antes dicho se observa en las dos clases en diversas instancias, como por ejemplo cuando guía a los alumnos para lograr el reconocimiento de elementos y propiedades de los cuerpos geométricos. Si bien, según lo manifestado, supo utilizar software y, a pesar de reconocer su importancia y valorarlos, hoy no los utiliza como recurso; los alumnos realizan búsquedas en Internet de tarea.

Con respecto al trabajo sobre el error, si bien expone que se discuten aciertos y errores, sostiene que “a los alumnos les cuesta, porque también les cuesta comunicarse”. En sus clases se evidencian algunas aclaraciones en ciertos momentos. También se observa la exploración de saberes previos, a través de interrogantes y actividades, que es coherente con lo manifestado por el docente, quien expresa que “a través de la indagación le interesa saber qué y cómo aprendieron sus alumnos”. Declara gusto por la geometría y trata de contagiarlo a sus alumnos haciendo ver que la geometría es un conjunto de conocimientos que permite analizar y reflexionar sobre el entorno (a distintas escalas), porque “mirando todo es geometría, todo se puede representar geométricamente”, dice. En sus clases se observa un muy buen diálogo, los alumnos intervienen, comunican sus ideas, participan y el docente trabaja los contenidos geométricos con placer y dedicación, desde lo real, con material concreto. Además hay una fuerte coherencia entre lo que declara y lo que se observa en sus clases sobre la importancia asignada al trabajo grupal de alumnos.

Docente B. Recibió una formación inicial amplia en geometría. En su formación continua no ha realizado cursos en geometría. Realizó un postítulo en Química, ya que su comienzo en la docencia estuvo relacionado con dicha asignatura y Física. Éste es el primer año que tiene una cátedra suya de Matemática donde está incluido un eje de geometría. En las clases observadas se realizaron actividades de motivación, entre otras, y se usaron recursos variados en los distintos momentos. En este caso no se puede establecer una relación con lo declarado en la entrevista porque expresa no haber tenido experiencias en la preparación de clases de geometría.

Las actividades propuestas muestran la intencionalidad de vincular lo conceptual con lo procedimental, pero su escasa experiencia y la no actualización en geometría tal vez generan inseguridad y lo llevan a cometer un error cuya corrección no resulta fácil. Según lo declarado en la entrevista, la selección, secuenciación y organización de los contenidos estuvo a cargo del docente que renunció a la cátedra.

Manifiesta trabajar con las ideas previas cuando comienza un tema y expresa hacerlo de diversas maneras; sin embargo en la primera clase observada no se pone de manifiesto, sí en la segunda. Durante la entrevista no expresa una sensación suya hacia la geometría, como tampoco de sus alumnos. Asimismo declara tener buena comunicación con los alumnos y esto se percibe en sus clases, aunque en un momento muestra enojo porque los alumnos no cumplen con la tarea. Se observan actividades que motivan a los alumnos, lo cual concuerda con lo dicho por el docente. No queda claro en la entrevista la importancia asignada a la geometría con respecto a otras áreas de la Matemática.

Docente C (3° año). Declara haber estudiado en su formación inicial geometría métrica, aplicada y proyectiva; en sus prácticas de residencia abordó contenidos geométricos, seleccionados por el docente a cargo del curso. Recuerda su historia escolar basada en el conductismo, teoría que ahora cuestiona. Cuando se lo interroga acerca de la formación continua, afirma que ha realizado varios cursos en Matemática, aunque no específicamente en geometría. En cuanto a los contenidos abordados en sus prácticas áulicas, se corresponden con lo declarado, los mismos pertenecen a los del DCJ, se observó la representación y el reconocimiento de figuras, no se observaron demostraciones. Afirma trabajar las ideas previas a través de situaciones problemáticas, hecho que no se observó en estas clases en particular.

Lo que sí se observó fue un interrogatorio casi continuo y en varias ocasiones el docente no responde directamente a las preguntas de los alumnos o contesta con otra pregunta. Hecho que, de algún modo concuerda con lo declarado cuando manifiesta que formaliza el contenido, luego de la utilización de material concreto, con un interrogatorio para "construir una secuencia de pensamiento". En las clases observadas utiliza como soporte informático el GraphMath, el uso de este recurso lo hacen en su mayor parte los alumnos y en forma muy escasa el docente, quien permanentemente orienta las actividades que desarrollan los alumnos.

Cuando se lo indaga acerca de la inclusión del contexto histórico, afirma que lo utiliza para demostrar que la "Matemática no es estática". Se observa contradicción cuando el docente declara como obstáculo la ausencia de los elementos de geometría y luego afirma que la institución cuenta con la mayoría de los elementos geométricos o él mismo los genera si no los hubiera. Tanto en lo declarado como en lo observado, existe buena y respetuosa comunicación entre docente y alumnos. El docente recorre los grupos orientando el desarrollo de las actividades que realizan los alumnos, promoviendo el trabajo autónomo, que pareciera que no alcanzan a lograr, ya que constantemente solicitan orientación para la realización de las actividades.

Cuando se lo indaga acerca de su sensación hacia la geometría, expresa que la misma es de miedo o de respeto, por no haberla desarrollado, "como corresponde", en su formación inicial. Además afirma que es necesario saber el contenido y utilizar diversas estrategias metodológicas que les haga ver la utilización de la geometría. Afirma que la geometría es una herramienta de la Matemática, tan importante como la aritmética, que permite analizar y trabajar con el plano y el espacio.

Docente C (4° año). Declara haber estudiado, en su formación inicial, geometría métrica, aplicada y proyectiva, con una metodología conductista, desarrollada sobre la base de demostraciones sin aplicación a situaciones cotidianas, que actualmente cuestiona. Además manifiesta no haber realizado demasiados cursos en geometría, sino inserta como herramienta para abordar otros contenidos, lo cual concuerda cuando dice que a sus alumnos les explica que la geometría "es una herramienta de la Matemática". Destaca que su sensación hacia la geometría es de "miedo o respeto por no haberla desarrollado como corresponde", aunque para él "es tan importante como la aritmética". En sus clases realiza continuas interrogaciones reflexivas y propuestas de actividades que involucran a los alumnos en el hacer, acordes con su cuestionamiento al conductismo, y se refiere al contenido a desarrollar, así como a las aplicaciones al arte y la naturaleza. Los contenidos tratados en las clases son coherentes con lo declarado por él como prioritarios a enseñar, como por ejemplo la representación y reconocimiento de figuras que no son estándar o la obtención de figuras dentro de otras. Además, pareciera que el docente ha tenido en cuenta el curso y la profundidad que necesita el grupo de alumnos, tal como lo manifestó oportunamente, ya que se observa un ambiente de mucho trabajo donde prevalecen las situaciones de diálogo con los alumnos, siempre relacionadas con los temas en estudio y la modalidad específica del curso. En cuanto a los propósitos manifestados en la entrevista, también se perciben en las clases, ya que pudieron apreciarse actividades disparadoras, de aplicación y de construcción. Dice indagar ideas previas a través de situaciones problemáticas y en lo observado lo realiza a través de una importante cantidad de preguntas. En varias ocasiones pregunta y no espera respuesta sino que responde él mismo o contesta con otra pregunta. Siempre responde en relación al contenido y valora las respuestas de los alumnos. Los recursos didácticos utilizados son los declarados, variados y multi-sensoriales, y se evidencia concordancia también en cuanto a lo manifestado acerca de la formalización del contenido luego de la utilización del material concreto. Dice que la escuela cuenta con la mayoría de los elementos y, si fuera necesario, él mismo los genera o construye, aspecto que también se observa en sus clases. La comunicación en el aula entre docente y alumnos es muy buena, según lo manifestado en la entrevista y observado en las clases. Expresa que es necesario saber el contenido geométrico y utilizar estrategias metodológicas que les hagan ver a los alumnos la explicación, lo cual concuerda con lo observado.

Docente D. Recibió una formación inicial amplia en geometría, si bien manifiesta no haber abordado contenidos de geometrías no euclidianas en su formación inicial. En su formación continua ha realizado varios cursos en geometría, más un Postítulo en Matemática y Estadística, pero destaca su preparación como autodidacta en cuanto a la profundización y actualización de los contenidos que aborda en sus prácticas áulicas de la asignatura Geometría Aplicada, donde debe trabajar exclusivamente contenidos geométricos. En las dos clases observadas se realizaron actividades de construcción a través de diversos procedimientos y con variados recursos. Los recursos didácticos empleados concuerdan con lo declarado en la entrevista y con la intencionalidad que pone de manifiesto, desde el diseño de actividades puntuales, el docente. Se evidencia el aprovechamiento de los mismos a través de las multifunciones otorgadas, del encuadre teórico que actuó como sostén de los criterios de decisión y de la aplicación a situaciones concretas. Las actividades propuestas evidencian vínculos entre los contenidos conceptuales y los procedimentales involucrados. Son variadas en el comienzo y desarrollo de la clase, sin embargo no se realiza una síntesis general de las mismas ni se evidencian instancias que propicien la metacognición. Los contenidos desarrollados en las clases están incluidos en el DCJ vigente. Según lo declarado, la selección, secuenciación y organización de los mismos se realiza en conjunto con sus pares de la institución. En sus clases se ve plasmada una coherencia entre sus prácticas de enseñanza y su discurso como docente, a pesar de su biografía escolar. Manifiesta realizar un trabajo sobre las ideas previas de los alumnos y hacerlo de diversas maneras; sin embargo, en la clase observada no se pone de manifiesto en forma explícita el trabajo con ideas o contenidos previos, aunque pareciera que éste fue tenido en cuenta en el diseño de las actividades. Dice que a sus alumnos, en general, no les gusta geometría; sin embargo tal apreciación no se llegó a percibir en el curso observado. Además, aunque no existe falta de comunicación, a decir del docente, éste desearía cursos menos numerosos para favorecer el acercamiento. Con este grupo no se observan problemas de comunicación, porque el clima áulico resulta propicio, los alumnos realizan actividades correctamente aunque dialogan sobre temas extracurriculares, sin que tales conversaciones lleguen a perturbar el trabajo y sin que el docente intervenga para censurarlos. Mantiene cierta postura y seguridad, que pone de manifiesto la diferenciación de su rol como docente. Se observan dos clases activas y participativas, con actividades pensadas para motivar a los alumnos, lo cual concuerda con lo declarado. Para él, la geometría es tan importante como otras áreas de la Matemática y se evidencia en las clases su gusto por enseñar, tal como lo manifiesta en la entrevista.

8. Conclusiones, reflexiones y emergentes

En cuanto a la primera hipótesis, el análisis cruzado (entre el "decir" y el "hacer" del docente) permitió vislumbrar, en términos generales, rasgos de coherencia entre lo que los docentes manifiestan sobre sus prácticas de geometría en la escuela media y lo que realizan efectivamente en sus clases; exceptuándose un caso donde se mencionó que a los alumnos no les gusta la geometría y en la clase pareció justamente lo contrario, así como otro caso donde se manifestó tener miedo o respeto hacia esta rama de la Matemática (por sentirse no tan bien formado) y sin embargo no se llegó a apreciar esta sensación en las clases. En cuanto al discurso del docente, quedan dos cuestiones interesantes para seguir indagando, las cuales emergieron en el presente estudio. Una tiene que ver con la forma en la que dicen haber aprendido geometría en su formación inicial, de tipo conductista, y la forma en la que manifiestan desempeñarse en la actualidad, y que se pudo observar en sus clases, con rasgos constructivistas que propician la exploración e indagación. Justamente el interrogante que emerge es cómo han hecho estos docentes para apropiarse de modos de enseñanza de la geometría diferentes a los que ellos manifiestan haber vivido como aprendices. Otra tiene que ver con la importancia asignada a la geometría en la formación de un adolescente, todos dijeron que es la misma para todos los ejes del área Matemática. Aquí no se conoce muy bien el por qué de esta afirmación ni si es lo que efectivamente se lleva a cabo en las clases (ya que sólo se observaron un par de clases de cada curso en las que justamente se trabajaron contenidos geométricos).

En cuanto a la segunda hipótesis, cabe mencionar que en las diez clases observadas se pudo evidenciar que las prácticas de la enseñanza de la geometría priorizaban el intercambio con los alumnos en pos de un mejor desempeño, sin que la variable tiempo pase a ser lo más importante, lo cual contribuyó a un trabajo enriquecido en búsqueda de comprensión de los contenidos geométricos involucrados. Este aspecto se relaciona íntimamente con lo que se pudo constatar en relación a la tercera, y última, hipótesis, la cual considera a los momentos de discusión en la clase como componentes de buenas prácticas de la enseñanza de la geometría en la escuela media, en el sentido de acciones docentes observadas que se justifican desde principios morales y epistemológicos (Fentesmacher, 1989) con indicadores puntuales variados, como por ejemplo: la trascendencia y diversidad de contenidos actitudinales puestos en acto y, en cuanto a los contenidos conceptuales y procedimentales, la búsqueda de relaciones entre los objetos geométricos en escena, la argumentación matemática como habilidad transversal en todo el nivel educativo y la vinculación con otras ramas de la Matemática y con otros aspectos (científicos o cotidianos) de la realidad.

En cuanto al objetivo 1 de la investigación, cabe señalar que, si bien los docentes manifestaron sentir que otras ramas de la Matemática han sido más fortalecidas en su formación inicial, todos ellos implementaron propuestas en sus clases que pudieron diseñar a partir de estudios posteriores (en distintos ámbitos). Queda para seguir discutiendo, en el marco de la institución, sobre los contenidos geométricos prioritarios y sobre el papel de la historia de la geometría en la escuela media.

Ya posicionándonos en el objetivo 2, las valoraciones de los docentes de la geometría sobre su importancia, son las mismas para todas las ramas de la Matemática. En cuanto a la sensación hacia ella, manifiestan diversidad, desde gusto o desafío hasta respeto o miedo. Desde su concepción, todos vinculan fuertemente a la geometría con el entorno.

En cuanto al objetivo 3, se destaca el uso intencionado de materiales y recursos didácticos para trabajar geometría, la interacción entre docentes y alumnos, así como el buen clima de trabajo, con presencia marcada del docente, como aspectos fortalecidos en la institución donde se llevó a cabo la investigación, evidenciado desde la coherencia entre lo que los docentes dicen y lo que efectúan en sus clases de geometría del nivel medio. Se considera que queda para seguir trabajando en el interior de la escuela, el diseño de actividades puntuales que impliquen la historia de la geometría, más allá de la narración de un hecho o anécdota, así como la asignación de momentos de síntesis o metacognición en las clases de geometría. En cuanto a las preguntas de los docentes, predominan las del tipo qué y cuánto por sobre las del tipo por qué. Se considera propicio insistir en este aspecto en pos de la generación de procesos reflexivos profundos. La estrategia didáctica que predomina es la explicación del docente, sin que se torne en conferencia, sino que prevalece el intercambio dialógico entre docentes y alumnos.

Con respecto al objetivo 4, las dimensiones (con sus respectivas categorías y modalidades) que el equipo de investigación diseñó para el análisis de las clases se constituyen en indicadores de buenas prácticas de la geometría cuando están cargados de decisiones acertadas desde lo moral y epistemológico.

Para finalizar, se quiere mencionar que los objetivos propios del equipo de investigación, objetivos 5 y 6, han sido logrados sobremanera, involucrándose todos los miembros en un trabajo sistemático, continuo y mancomunado.

Bibliografía

Alagia, H., Bressan A., Sadovsky, P. (2005): *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*, Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Alsina Catalá C., Fortuny Aymemí J., Pérez Gómez R. (1997): *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid, Síntesis.

Alsina C. (2007): *Educación Matemática e Imaginación*. Unión 11, 9-17.

Bressan A., Reyna I., Zorzoli G. (2003*): Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible.* Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años. Montevideo.

Broitman C, Itzcovich H. (2008*): La geometría como medio para 'entrar en la racionalidad.* Enseñar matemática 4, 55-86.

Burbules N. (1999): *El diálogo en la enseñanza*. Teoría y práctica. Amorrortu. Buenos Aires,

Fentesmacher G (1989):*Tres aspectos de la filosofía de la investigación sobre la enseñanza.* En: M. Writtrock (ed.) *La investigación en la enseñanza 1*, 149-179. Paidós. Barcelona.
Flores P. (2005):Comentario del libro.*La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula. Unió*n 4, 141-146.
Gómez J. (2002): *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Paidós. Barcelona.
Itzcovich H. (2008): *La Matemática escolar*., Aique. Buenos Aires.
Lemke J. (1997): *Aprender a hablar ciencia*, Paidós. Barcelona.
Litwin E. (1997): *Las configuraciones didácticas.* Paidós Buenos Aires,.
Mántica A., Nitti L., Scaglia S. (2006): *La Matemática. Aportes para su enseñanza.* Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe,
Morales Santana M. (2007):Comentario del libro: *Geometría para el siglo XXI*. Unión N° 11, 205-209.
Trillo F., Sanjurjo L. (2008): *Didáctica para profesores de a pie*. Rosario, H Sapiens.
Santaló, L. (1999): *Enfoques.* Troquel. Buenos Aires,
Van Dijk T. (1998): *Estructuras y funciones del discurso.* (12º ed.). Siglo XXI. México.
Villela, J. (2008): *Uno, dos, tres... Geometría otra vez.* (2° ed.). Aique. Buenos Aires,.

Datos de identificación de las autoras
Natalia Sgreccia, Celia Benetti, Luisa Menichelli, Stella Mezzelani, Judith Pittaro, Evangelina Cismondi, Natacha Duzevic, Jorgelina Frattini y Betiana Paschero.

Datos de identificación de la institución
Escuela Normal Superior N° 33 “Dr. Mariano Moreno”. Localidad: Armstrong. Provincia: Santa Fe. País: Argentina. Mail: terc33@arnet.com.ar. Teléfono: (0054) 3471 461102.

Datos de contacto de una de las autoras
Dirección electrónica: nataliasgreccia@gmail.com. Dirección postal: Av. Pellegrini 748 Piso 6° Dpto. 2. Ciudad: Rosario. Provincia: Santa Fe. País: Argentina. Ciudad: Rosario. Provincia: Santa Fe. País: Argentina. Teléfono: (0054) 341 4486827.

Breve reseña
Celia Benetti, Stella Mezzelani y Judith Pittaro son profesoras en Matemática y trabajan como formadoras de formadores en el Profesorado en Matemática de la Escuela Normal Superior N° 33 “Dr. Mariano Moreno” de Armstrong (Santa Fe, Argentina) desde hace más de 10 años. Luisa Menichelli, además de ser profesora en Matemática, es la rectora de la institución. Natalia Sgreccia, quien también es profesora en Matemática, fue docente en el Profesorado durante cuatro años, hasta principios del año 2008. Evangelina Cismondi y Jorgelina Frattini son estudiantes del Profesorado en Matemática de la institución. Natacha Duzevic y Betiana Paschero son graduadas recientes de la mencionada carrera.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 110-116
ISSN: 1815-0640

Turing: El hombre que sabía demasiado

Jesús Soto Espinoza

Resumen

La historia de los personajes que influyeron en las matemáticas está muy restringida al entorno de la ciencia que vivieron. Salvo escasas veces, cuando esta sale al pie de la calle se distorsiona para una mejor comercialización. Ese fue el caso de la película Enigma (2001), donde no se escatima en tergiversar la historia de Alan Turing, alejándola de la realidad de un personaje que contribuyó al avance de las matemáticas.

Abstract

The history of the personages that influenced in the mathematics is very restricted to the environment of science who they lived. Except a few times, when this comes at the foot of the street is distorted for a better marketing. It was the case in the film Enigma (2001), which does not scrimp in distort the history of Alan Turing, away from the reality of a personage that contributed to the advancement of mathematics.

Resumo

A história dos personagens que influíram nas matemáticas está muito restringida entorno da ciência que viveram. Salvo escassas vezes, quando esta sai à rua se destorce para uma melhor comercialização. Este foi o caso do filme Enigma (2001), onde não se poupa em deturpar a história de Allan Turing, distanciando-a da realidade de um personagem que contribuiu ao avance das matemáticas.

Introducción

“—¿Soñaré?

—Desde luego que soñarás. Todas las criaturas inteligentes sueñan, pero nadie sabe por qué. —Chandra se calló un momento, soltó otro anillo de humo de su cigarro, y agregó algo que nunca hubiera admitido ante un ser humano—. Tal vez sueñes con Hal, como yo muchas veces lo hago”. (Clarke,1982)

En realidad la pregunta primigenia no era esa, pero para la evolución siguiente a Hal la pregunta sí era pertinente. El Dr. Chandra necesitaba respuesta a otra pregunta: ¿qué ocurrirá cuando se conecten los circuitos desconectados de Hal?.

Tampoco era la pregunta. Ya catorce años antes Philip K. Dick se preguntó: ¿Sueñan los androides con ovejas eléctricas?, el mismo año que Hal tripula la Discovery. Philip K. Dick y Arthur C. Clarke sólo se preguntaban aquello que desconocían. También Isaac Asimov conocía la pregunta y sabía la respuesta al crear a Cutie, el primer robot que manifestó curiosidad por su propia existencia. (Asimov, 1950).

Estas preguntas se han diluido en la trama del celuloide, como la pregunta primigenia. Ya no importan, no se necesitan, es suficiente con que el héroe coja al asesino, acabe con los androides malos o arregle la computadora dañada. Lo injusto es cuando no sales en las películas porque tu trabajo ha sido encontrar un nombre en una trascripción radiofónica. Lo injusto es cuando no sales en las películas porque tu labor la has realizado en los sótanos de un bunker mirando fotografías. Lo injusto es cuando no sales en las películas porque tu misión se ciñe a empuñar una tiza y escribir en la pizarra. Lo injusto es cuando te llamas Alan Turing.

En 1950, Alan Turing, escribió un artículo científico donde planteó la pregunta primigenia: ¿puede pensar una máquina?. No tardó en ser denostado.

El Entscheidungsproblem

Se dice que Eisenhower comentó la importancia decisiva para la victoria, en la Segunda Guerra Mundial, del desciframiento del código de la máquina Enigma. Solo años después se pudo hacer pública esa información; incluso en el año 2000 se desclasificó informes del proyecto Colossus, que nos mostraba los esfuerzos de los ingleses en descifrar los códigos alemanes durante la guerra. No obstante, el anonimato, al que se obligó a algunos de los protagonistas, sigue relegándolos para la gran mayoría de las personas.

En septiembre de 1939, Turing, se presentó en Bletchley Park, la sede oficial del gobierno inglés para códigos y cifrado. El gobierno necesitaba matemáticos y criptógrafos y él era un joven dispuesto a ofrecer sus conocimientos. Como equipaje traía su mejor logro hasta la fecha: la solución al Entscheidungsproblem. (Turing, 1937).

El Entscheidungsproblem suponía el mayor problema de la lógica matemática planteado en esos momentos. Lo formuló David Hilbert en 1928, entre otras, con la pregunta: ¿Son las matemáticas decidibles, en el sentido de que exista un método definido que se pueda aplicar a cualquier aseveración matemática, y que determine si dicha aseveración es cierta?. A Turing le cautivó las preguntas de Hilbert, y, alentado por su profesor Max Newman, decidió afrontarlo. En abril de 1936 le entregó a su profesor un borrador de la solución a la cual había llegado y en mayo del mismo año se enteró de que alguien se le adelantó. Newman recibió un artículo de un profesor de la Universidad de Princeton, Alonzo Church, quien mediante otros razonamientos había resuelto el problema. No obstante, Newman consideró que la solución dada por Turing era lo suficientemente diferente e innovadora como para que se publicara en un artículo.

Turing publica en 1936 su artículo: “Los números computables, con una aplicación al Entscheidungsproblem”, y en él aparecen ideas que pocos matemáticos llegan a comprender. Newman lo convence para que marche a estudiar bajo la dirección de Church y les muestre sus ideas. Les enseña su trabajo llegando a agradar a su nuevo director cuando reconoce que su noción de computabilidad es equivalente a la introducida en el trabajo de Church. Pero Church le hace poco caso, tampoco consigue que otros le presten atención, incluso el célebre matemático de Princeton, John Von Neumann, desdeña sus “Números Computables” por tratarse de un trabajo sobre lógica. No parecería un problema de lógica tan importante cuando en un despacho cercano se encontraba Einstein trabajando en otros tipos problemas.

No obstante Turing está convencido que su trabajo presenta más posibilidades que las del tratamiento de la lógica simbólica. Es Church, curiosamente, quien llama al procedimiento ideado por su alumno “máquina de Turing”, término que pasaría a constituir un pilar fundamental de la informática que hoy conocemos. Turing concibe otra máquina capaz de ser programada para realizar cualquier tarea que pueda efectuar una máquina de Turing; una máquina, por ejemplo, “que juegue al ajedrez”, llegaría a comentar Turing. En palabras de Martín Gardner (1985): “la máquina universal [de Turing] es capaz de computar todo lo que sea computable”.

“Pocos miembros del público ordinario podrían haber identificado los retratos, pero cualquiera que hubiese sido admitido hasta tan lejos habría reconocido instantáneamente a John Neumann y Alan Turing, los dioses gemelos del panteón de la computación”. (Clarke, 1982)

Turing había construido su “máquina” para resolver una pregunta, ahora se enfrentaba a otra.

La máquina Enigma

La guerra siempre busca nuevas ideas y, en el curso de criptografía y cifrado que recibió tras volver de Princeton, se han fijado en él. En Bletchley Park tienen la esperanza de que les ayudará a descifrar la máquina Enigma. No sólo son sus cualidades en matemáticas, en Princeton construyó un sistema electrónico para cifrar mensajes basado en la multiplicación de grandes números. Su previsión del futuro seguía en aumento, hoy en día la criptografía se cimienta en la multiplicación de grandes números primos. Sin embargo, en aquellos días, la criptografía se basaba en cifrados polialfabéticos.

Este procedimiento de cifrado resulta sencillo: se cambia cada letra del mensaje original por otra de manera arbitraria. La forma de realizarlo se necesitaba que fuera compleja. Ya Julio Cesar lo utilizó en sus mensajes, desplazando las letras del alfabeto en tres unidades. Aunque a finales del XIX, resolver estos acertijos, constituía el divertimento de los principiantes, había que ponerlo más difícil.

Hacía falta una máquina que modificase los caracteres moviendo múltiples rotores a una pulsación de una tecla, y diferente para cada pulsación, y diferente para cada combinación, y diferente para cada giro, y ...

En la década de 1920 la automatización de las máquinas permite construir artilugios muy especializados. En particular, el gobierno alemán se fija en una máquina del ingeniero Arthur Scherbius. Disponía de un mecanismo de cifrado rotatorio, que la posibilitaba tanto para cifrar como para descifrar mensajes, la llaman Enigma. Los ingleses también disponen de una: Typex, y los americanos de otra: SIGABA. Pero los alemanes se jactan por el hecho que los cifrados realizados con la suya resultan indescifrables, sin la máquina y sin el código de cifrado. Lo cierto es que se necesita una buena memoria para almacenar el número de las posibilidades de cifrado.

Al comienzo de la Segunda Guerra Mundial, los ingleses ponen su empeño en descubrir las claves de la máquina Enigma. Forman un equipo y, entre los elegidos, designan a Turing para que se encargue de los entresijos matemáticos. No partían a ciegas. Ante la presunción alemana, un grupo de polacos consiguió leer durante años mensajes secretos intercambiados con la máquina Enigma. Los polacos no esperaron al comienzo de la guerra, ya en 1929 se apropiaron de una máquina Enigma, y cada año que pasaba se esforzaban en mejorar los procedimientos de desencriptación en cada modificación sobre ella. Una autentica carrera: los alemanes modificando la máquina para hacerla cada vez más invulnerable, los polacos remodelando los procesos de ruptura de cifrado. Los aliados le deben mucho al grupo de polacos encabezados por el joven matemático Marian Rejewski, sin su esfuerzo apenas habrían avanzado en Bletchley Park.

Cuando estalló la guerra todos los trabajos polacos se refugiaron en Francia y después en Inglaterra. Con ellos, otra máquina: La Bomba, el invento polaco que rompía los mensajes de la Enigma. Sin embargo, esta máquina pecaba de muchos inconvenientes. Cada avance alemán significaba un cambio sustancial en la mecánica de la Bomba, se necesitaba construir muchas y el proceso resultaba lento y tedioso. Para 1939 el ejército alemán elevó la complejidad de Enigma a una altura duramente alcanzable por la Bomba.

Urgía una nueva concepción, un nuevo enfoque. Ahora Turing disponía de la posibilidad de diseñar su máquina para resolver el problema. Y lo hace, la llaman la Bombe, y es la segunda generación de la Bomba polaca. Todos reconocen a Turing como el gran artífice del proyecto. Esta máquina resulta más compleja y al tiempo más fácil de modificar para adaptarse a las evoluciones de la Enigma. En 1942 el descifrado de los mensajes alemanes se ejecutaba tan veloz que, a veces, dudaban de que los alemanes no se dieran cuenta.

Al fin, Turing demostró que su máquina podía resolver muchos problemas. Pero nadie se enteró.

¿Pueden pensar las máquinas?

En 1950 Turing publica en la revista Mind su artículo “Computing Machinery and Intelligence”, fue el principio del área de la informática que hoy denominamos inteligencia artificial. El artículo empezaba diciendo: “Me propongo examinar la cuestión: ¿Pueden pensar las máquinas?”.

La carrera por las computadoras había comenzado en la década del 40. Los esfuerzos de los ingleses y americanos, en concebir máquinas capaces de realizar grandes cálculos, alientan los desarrollos de los primeros prototipos. Tras los trabajos de Turing en la Bombe, ven el potencial de su utilización. Los ingleses afrontan otro gran proyecto: Colossus. Destinado a descifrar los códigos alemanes de la máquina Lorenz SZ40/42. Colossus utiliza las ideas de Turing con las nuevas innovaciones mecánicas. El director del proyecto Max Newman combina la experiencia en la Bombe con las aportaciones que al otro lado del Atlántico está realizando Von Neumann.

A ellos dos se les había adelantado un ingeniero alemán en crear el primer computador prototipo de lo que hoy utilizamos. Entre 1939 y 1941, Konrad Zuse, fabrica el Z3 que contiene la mayoría de las características de una computadora moderna, según la definición dada por Von Neumann y sus colegas en 1946. Pero pocos se enterarán de ello. Un bombardeo acabará con la computadora y el escaso interés, por parte del gobierno alemán, no contribuye a que su siguiente proyecto avance más rápido y transcienda a más gente. En su convicción por Z3, Zuse, llega a decir a sus amigos que su máquina sería capaz de jugar al ajedrez, como la máquina de Turing. Años más tarde se demostraría que Z3 cumple los requisitos para ser una máquina de Turing universal.

Los ingleses y los americanos no prestan atención. En EEUU se creen que ENIAC es el primer computador de la historia. Von Neumann sabe que no. Los ingleses se han adelantado con el proyecto Colossus, pero no le preocupa: sabe que no lo dirán. El proyecto que prepara Von Neumann sí saldrá a la luz, será el EDVAC y su arquitectura sí marcará historia. Nunca reconocerán que en las entrañas de sus diseños se hallan las ideas de Turing. Los secretos son secretos.

A Turing, como a Newman, le prohíben hablar de sus trabajos en Bletchley Park; de sus trabajos con la Bombe y Colossus. No obstante sabe demasiado, la guerra ha terminado y la nueva era de las computadoras está naciendo. Los ingleses no pueden permitirse apartar a un genio. Turing no quiere trabajar con Newman y se encarga del diseño de ACE (Máquina de Computación Automática). El ofrecimiento vino de la mano de Charles Galton Darwin, nieto de Charles Darwin. Sin embargo, su mente se centra más en las posibilidades teóricas que en los resultados prácticos. Su antiguo profesor, Newman, también anda enfrascado en un nuevo proyecto. Él tiene más contacto con el mundo real, sabe que en 1944, Howard H. Aiken, con una subvención de IBM, pone en funcionamiento la Harvard Mark I, construida en la Universidad de Harvard y que se usó para el cálculo de tablas de balística en la guerra del pacífico. Von Neumann ha emprendido su gran proyecto en computación y lo terminará antes de 1950, el gobierno norte-americano está apoyándole y los ingleses no pueden quedarse atrás. Intenta convencer a Turing: ACE es un proyecto teórico muy ambicioso, pero poco real. Le pide a Turing que se una a su grupo en la Universidad de Manchester para construir la Manchester Mark I, y lo consigue. En 1948 Turing deja de lado ACE para trabajar con su antiguo profesor y amigo, no a muchas personas puede llamarlas amigas. El carácter retraído y tímido de Turing no cambia, sigue intentando desarrollarlo todo el sólo, sin ayuda de nadie.

Realiza un lenguaje de programación para el proyecto de Newman, pero no olvida su idea de ACE. En las “altas esferas” sí, les ofende el abandono de Turing y saben que es homosexual. No lo apoyarán más, incluso...

La BBC organiza una mesa redonda sobre inteligencia artificial para retransmitirla por el Tercer Programa el 14 de enero de 1952, él junto a tres más: Newman, Geoffrey Jefferson y Richard Braithwaite, un antiguo compañero. Jefferson no duda en reírse de la pregunta de Turing y de su test, mientras Turing balbucea sobre teoría computacional. No es hombre con don de palabra y no desea pelear, está cansado de esconderse. Su amigo tampoco le ayuda, puede perjudicar el proyecto donde están trabajando, y Braithwaite actúa de moderador sin hacer nada por apoyar la causa de la máquina pensante.

“Sobre si Hal pudiera realmente pensar, era una cuestión que había sido establecida por el matemático Inglés Alan Turing en los años cuarenta. Turing había señalado que, sí se podía llevar a cabo una prolongada conversación con una máquina, indistintamente mediante máquina de escribir o micrófono, sin ser capaz de distinguir entre sus respuestas y las que podría dar un hombre, en tal caso la máquina estaba pensando, por cualquier sensible definición de la palabra. Hal podía pasar con facilidad el test de Turing.” (Clarke, 1968).

El mismo año que Clarke escribe “2001: Una odisea espacial”, Dick hace que el caza recompensas Rick Deckard aplique el test de Voigt-Kampff para diferenciar humanos de androides. Pocos verán en la escena de “Blade Runner”, cuando Deckard examina, mediante la prueba Voight-Kampff, a Rachael, para determinar si es una replicante o no, el test de Turing.

Los cinco de Cambridge

En 1952 comienza el principio del fin. Durante su vida aprendió a vivir con secretos, pero algunos creyó que necesitaba guardarlos. No pregonaba abiertamente su homosexualidad, tampoco la escondía. Lo acusaron de ultraje a la moral pública y lo sentenciaron a tratar su cuerpo con estrógenos; eran el mismo tipo de teorías médicas que más tarde nos mostraron en “La naranja mecánica” con el tratamiento Ludovico, o la lobotomía en “Alguien voló sobre el nido del cuco”. El hombre que cuidaba su cuerpo, para participar en competiciones atléticas, vio como engordaba y le abultaban los pechos.

Ya no es seguro mantenerlo trabajando en los proyectos gubernamentales de criptoanálisis. Estamos en los tiempos del inicio de la guerra fría: yo te espío, tu me espías. Para mayor psicosis, al servicio secreto inglés le ha salido una oveja negra, o más bien cinco; pero ellos no lo saben. Los Cinco de Cambridge trabajan para los rusos. Guy Burgess y Donald Maclean abandonan el país cuando se enteran que poseen evidencias de sus actos de traición. En ese mismo año, 1951, otro miembro de los Cinco, John Cairncross, reconoce que pasó documentos importantes. El MI6 descubre que los rusos manejan información sobre el código Enigma. Cairncross trabajó en Bletchley Park y quizás conoció a Turing. Para el MI6 no importa el escaso interés político de Turing. Él ante su falta de trabajo y la humillación en su país admite haberse planteado la idea de irse a Francia en busca de trabajo. Al servicio secreto inglés no le da igual.

Al terminar la guerra los ingleses y americanos, que compartieron todos los conocimientos sobre Enigma, decidieron vender el excedente de máquinas en su posesión. Total, sabían como descifrarla. No extrañaría suponer que los compradores creían en la segura invulnerabilidad del prodigio alemán. No obstante temen la fuga de cerebros. La conclusión de la guerra desencadenó muchas carreras: la carrera de los rusos por conseguir la bomba atómica, la carrera por la aviación a reacción, la carrera por los científicos alemanes... En “El buen Alemán” los americanos no escatiman en recatar crímenes contra la humanidad con tal de llevarse vivos a científicos alemanes. Turing resulta ser un personaje incómodo.

Oficialmente Turing se suicida, como Marilyn Monroe. Extraoficialmente..., extraoficialmente no hay nada. Su hastío por la vida a la cual lo llevaron constituye motivo suficiente para un suicidio. En julio de 1954 no le queda nada, después de menoscabar sus teorías, a principios de 1952, todo fue un acúmulo de mala suerte:

le roba su amante, lo acusan de ultraje a la moral pública, lo condenan a la castración química, lo echan del trabajo.... Sólo una manzana, encima de la mesilla, junto a la cama, donde duerme, como Blancanieves, con un mordisco y rociada de una solución de cianuro.

En 2001 se realizó la película "Enigma" basada en la obra homónima de 1995 de Robert Harris, para mayor escarnio: inglés, sobre un joven matemático que trabaja en Bletchley Park, durante la Segunda Guerra Mundial, en la oficina central de la criptografía británica, destripando los entresijos de la máquina Enigma y con una trama de espionaje por medio. Su nombre: Tom Jericho, y no se parece en nada a Alan Turing.

Algunos nos gustaría pensar que no se suicidó; que fue el resultado de una genuina historia al estilo de John le Carré; que algún día será el héroe protagonista de una película de espías. Al fin y al cabo, como titula David Leavitt en su libro, Alan Turing era "El hombre que sabía demasiado".

Bibliografía

Asimov, I. (1950): *Yo, Robot.*

Clarke, A. (1968): *2001: Una odisea espacial*. New American Library, Hutchinson, Arrow.

Clarke, A. (1982): *2010: Odisea II*. Ultramar Editores. Barcelona, España.

Gardner, M. (1985): *Circo Matemático.* Alianza Editorial. Madrid, España.

Lahoz Beltrá, R. (2005): *Turing. Del primer ordenador a la inteligencia artificial*. Editora Nivola. Madrid, España.

Leavitt, D. (2006): *El Hombre que sabía demasiado: Alan Turing y la invención de la computadora*. Ed. Antoni Bosch. Barcelona.

The MacTutor History of Mathematics Archive. Página web de la Universidad de Saint Andrews: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

The Turing Digital Archive: http://www.turingarchive.org/

Turing, A. (1937): *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.* Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2, Vol. 43.

Turing, A. (1950): *Computing machinery and intelligence*. Mind, Vol. LIX.

Jesús Soto Espinosa, Doctor en Matemáticas por la Universidad de Alicante, España. Es profesor de la Universidad Católica San Antonio en Murcia, España, desde el año 1997, impartiendo clases de matemáticas en la Escuela Politécnica. Actualmente comparte la investigación, en clasificación y lógica difusa, con la afición por la divulgación científica. jsoto@pdi.ucam.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 117-129
ISSN: 1815-0640

Número infinito[1] como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos de la ESO[2]

Juan A. Prieto Sánchez.

Resumen

El fin de esta investigación es indagar en determinados aspectos del conocimiento del número infinito, mediante la comparación de series[3] numéricas finitas e infinitas según Russell, en los alumnos de la ESO. Para ello hemos construido un modelo evolutivo susceptible de comparación empírica. Se realizaron entrevistas semi-estructuradas para analizar las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias, y con ello dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explique las competencias del alumnado.

Abstract

The aim of this research is to investigate certain aspects about the knowledge of the infinity number, through a comparison of finite and infinite numerical series according to Russell, in ESO students. For that purpose, an evolutionary model susceptible of an empirical comparison has been created. Semi structured interviews were carried out in order to analyze the peculiar situations founded, just like the processes, skills and strategies; and with the help of these points, we may be directed towards an evolutionary model that explains the competences of students.

Resumo

A finalidade desta pesquisa é indagar em determinados aspectos o conhecimento do número infinito, mediante a comparação de séries numéricas finitas[1] e infinitas segundo Russel, nos alunos da ESO. Para isto construímos um modelo evolutivo susceptível de comparação empírica. Realizaram-se entrevistas semi-estruturadas para analisar as situações singulares encontradas, assim como os procedimentos, destrezas e estratégias, e com isto dirigir-nos em direção a um modelo evolutivo que explique as competências do alunado.

1. Introducción

De las posibles formas de abordar este concepto, utilizamos comparaciones entres conjuntos finitos e infinitos de series numéricas (Russell. 1982) para describir el conocimiento lógico en alumnos de la ESO.

[1] Entendemos número infinito en este artículo como cardinal infinito
[2] ESO: Educación Secundaria Obligatoria, comprendida entre los 13 y 16 años.
[3] Cuando nos referimos a series numéricas, en todo el artículo, como conjunto de números relacionados entre sí y que suceden unas a otras.

Un estudio exploratorio nos dio una idea de cómo realizar las tareas que realizaron los alumnos. Posteriormente, se realizaron las entrevistas. Una vez que fueron analizadas las situaciones singulares encontradas, pudimos dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explicara las competencias del alumnado.

Las respuestas a las tareas analizadas denotaron la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos permitió caracterizar diferentes perfiles del conocimiento de la comparación entre series numéricas finitas e infinitas, así como su evolución. Todo ello nos llevó a clasificar los alumnos de la muestra en distintos niveles.

2. Antecedentes

Los antecedentes de este trabajo los buscamos en distintos campos teóricos:

- ***Epistemología matemática***.

De una forma generalizada desde las teorías de Aristóteles, con el concepto de infinito potencial y actual, hasta las ideas de Cantor concernientes a cardinales infinitos. Específicamente, y dado la amplitud de antecedentes en este campo de las matemáticas, nos hemos centrado en las teorías de Russell en "Los principios de la Matemática" (1903) en su intento de comparar lo finito con lo infinito.

- ***Educación Matemática***.

Nos hemos basado en la extensa bibliografía y su estudio realizada por Bruno D'Amore (1996).

- ***Psicología***

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados, es sobre el método de inducción para series numéricas. Según Ortiz (1997), las investigaciones y trabajos se podrían agrupar en los siguientes apartados y referencias significativas:

- La inducción como una capacidad (Pellegrino, 1976).
- Análisis de procesos cognitivos (Holzmann, 1983).
- Elaboración de la información (Sternberg, 1986).
- Errores del razonamiento inductivo (Ross, 1981).

Estos a lo que se refieren a la psicología cognitiva, con respecto al constructivismo piagetiano se podría distinguir dos interpretaciones:

- La inducción como instrumento intelectual (Inhelder, 1955; Oleron, 1967).
- La inducción como generalización de estructuras (Moreno y Sastre, 1983).

3. Modelo evolutivo del conocimiento

3.a. Objetivo

Nos proponemos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre la comparación de series numéricas finitas e infinitas que explicara e integrara los siguientes factores:

✓ La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
✓ Los tipos de series que se toman en consideración.
✓ La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello fue necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el alumno acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias.
- Examinar el desarrollo curricular y analizar su incidencia en las tareas y competencias en estudio, teniendo en cuenta que el desconocimiento.
- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que elegimos para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores (13 años) a las superiores (16 años), resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal. Se presentan, a continuación, los distintos niveles.

<u>NIVEL I</u>: Los alumnos no distinguen entre lo finito y lo infinito.

<u>NIVEL II</u>: Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de pocos términos y estos son los primeros.

<u>NIVEL III</u>: Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de un mayor número de términos.

<u>NIVEL IV</u>: Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con pocos términos iniciales.

<u>NIVEL V</u>: Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con mayor número de términos iniciales.

Pero en el proceso de validación, debemos distinguir dos etapas desde el punto de vista metodológico: la construcción del modelo y la valoración empírica del modelo.

3.b. Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado buscamos una prueba que forme parte de un diseño experimental adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, que no es otro que el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes estados de conocimiento y las transiciones de unos estados a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974). Dicho método puede tener la siguiente forma:

> *Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones* (Piaget y Apostel, 1986; Bermejo y Lago 1991; Sophian, 1995; Ortiz y González, 1998; Fernández Escalona, 2001).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos estados que entran a formar parte del modelo evolutivo y la comparación entre los mismos. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los estados. Por tanto, la prueba consta de cinco tareas, una por cada estado.

3.c. Tareas asociadas a los niveles del Modelo Evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

El procedimiento seguido queda sistematizado en el siguiente cuadro, el que explicamos a continuación del mismo:

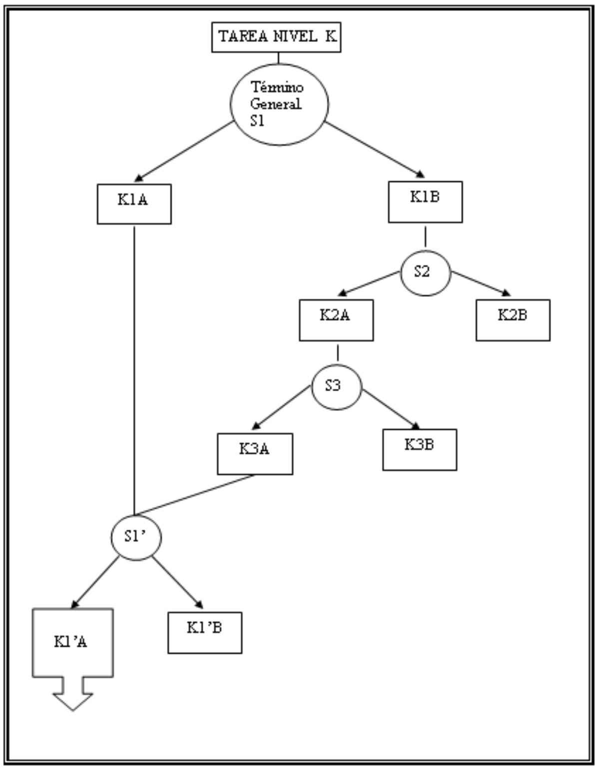


Gráfico 1. Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico.

- Cuando indicamos nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores I, II, III, IV y V.
- La tarea específica para cada uno de los estados, se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1. Está situación es la presentación de una serie numérica a partir del término general.
- La situación S1 divide a los alumnos en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A, y la segunda como K1B.
- A los alumnos de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los alumnos de K1B en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los alumnos de la categoría K2B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.
- La situación S3 divide a los alumnos de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los alumnos de la categoría K3B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir la Situación S1 o bien la situación S1', la misma que resolvieron los de la categoría K1A.
- Los alumnos de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden, ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3. Si no la resolvieran quedarían en la categoría K1'B y serían considerados de un nivel inferior.
- Los alumnos que después del proceso precedente están en K1'B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y están en un estado inferior al considerado.
- Los alumnos que están en K1'A, bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los alumnos del nivel en cuestión.

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos, algunas consideraciones generales sobre las situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas-ordinales del estado.

- **Tareas asociada al Nivel II**

<u>Situación 1</u>:

Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) y cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series divergentes básicas de la forma:

$$a_n = n + k \,, \qquad\qquad a_n = k.n$$

Situación 2:

Situación a la cual llegan aquellos alumnos que no han superado con éxito la anterior tarea, o bien no entendieron la pregunta, o bien desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación, se les explica en qué consiste el término general y se les ayuda a elaborar la serie a partir de él. Si fuera necesario, es decir, si no lograran generar los términos a partir del general, se les presentan las series desarrolladas para que las comparen.

Situación 3:

Situación a la cual llegan aquellos alumnos que han superado con éxito la situación 2. Se les presentan algunas series muy parecidas a las de S1 para que las elaboren y comparen.

Situación 1´:

Situación a la que llegan aquellos alumnos que superaron con éxito la situación S1 o aquellos que superaron con éxito la situación S3. En este caso la tarea será similar pero con un mayor número de términos en el caso de la serie numérica finita.
Aquellos alumnos que no supieron diferenciar las series finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel I y los que lo supieron diferenciar pasan a las tareas programadas siguientes.

- **Tareas asociada al Nivel III**

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan sólo que a las series numéricas finitas las diferencia un mayor número de términos.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito, llegando a la situación S1’, pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel II.

- **Tareas asociada al Nivel IV**

Situación 1:

Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) y cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series convergentes básicas de la forma:

$$a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k \,, \qquad a_n = \frac{1}{n+k} \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones que preceden, en las que los alumnos superan o no estas tareas, son similares a la expuesta en las tareas asociadas al nivel II, pero ahora trabajando con series convergentes.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1’, pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.

- **Tarea asociada al Nivel V**

Tareas y situaciones similares a las anteriores, tan solo que a las series numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', se catalogan en el nivel V. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

4. Estudio empírico cualitativo

4.a. Preliminar

Como la pretensión general del estudio empírico es validar un modelo evolutivo sobre un conocimiento concreto: el número infinito; la prueba que consideramos adecuada es la entrevista clínica semiestructurada en base a lo que reseña White y Gunstone (1992) refiriéndose a las entrevistas sobre conceptos; Cohen y Manion (1990) en cuanto a las entrevistas semiestructuradas y al análisis de tareas; o Piaget y Apostel (1986) sobre el método clínico y las entrevistas clínicas.

Cuando los alumnos se enfrentan a tareas no usuales en la enseñanza, pueden manifestar el estado real de comprensión de los conocimientos. Esto a diferencia de otras tareas rutinarias, en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En este sentido, las tareas que hemos considerado en la prueba (entrevistas clínicas semiestructuradas) creemos que son adecuadas para analizar el estado real de comprensión del infinito en los alumnos por varios motivos:

- Las situaciones concretas pensadas para la prueba parten de un material original en el que confluyen esquemas lógico-matemáticos del número infinito.
- No son tareas usuales en la educación reglada, con lo cual se evitan los aspectos rutinarios que se puedan dar y además se permite que aflore la comprensión del conocimiento deseado.
- La determinación de las tareas viene precedida por la construcción de un modelo evolutivo.
- Las tareas asociadas a los niveles del modelo teórico manifiestan las características lógico-matemáticas de cada uno de los mismos.

4.b. Propósito del estudio

Con esta parte de la investigación se pretende aplicar un modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante la comparación de series numéricas y comprobar, con alumnos de ESO (13 a 16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real. También caracterizar cada uno de los diferentes niveles de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento

4.b. Tareas

Las tareas consisten en lo siguiente:

- Se trata de comparar dos pares de series numéricas, una finita y otra infinita. Las series presentadas son las básicas, del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel I.

- Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en este nivel II.
- Se trata de comparar dos pares de series numéricas, una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.
- Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas son catalogados en el nivel superior V, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

4.d. Desarrollo de la entrevista

A continuación expresamos la forma en que procedimos en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo teórico. El procedimiento general fue el siguiente:

Para cada uno de los niveles su tarea asociada conlleva, a su vez, a tres situaciones. Para la situación S1 (situación inicial primera de la tarea K) se realizará una clasificación de respuestas atendiendo a que el alumno realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación S2 (segunda de la tarea K). Si no realizara con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar la situación S3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar una tarea similar a la situación S1 modificada llamada S1'. Si la realizara correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

Fotos: Desarrollo de las entrevistas.

4.e. Resultados y conclusiones de las pruebas

Diremos que un alumno ha superado con éxito la tarea del Nivel K si realiza correctamente la situación S1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría K1A. En el caso que un alumno se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 4 según se indica en el apartado siguiente. Vamos a considerar, que el alumno da la respuesta que se le asignará en las tablas correspondientes si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

4.f. Análisis de respuestas

En primer lugar[4] presentamos una tabla, que recoge el resumen de respuestas de cada uno de los alumnos según las tareas, situaciones dentro de las tareas y, si procede, la estrategia utilizada. Para la interpretación correcta de las tablas debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Cada casilla de la primera fila indica que se va a evaluar la resolución de la tarea asociada al nivel correspondiente. Al pasar de un nivel a otro, la línea de separación entre columnas queda marcada por el grosor de la misma.
- Para cada una de las tareas asociada a un nivel, se consideran las situaciones que la determinan. Se empieza con la situación 1 y se termina con la misma. Esto se refleja en la segunda fila de las tablas.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno cuyas respuestas se registran en esa misma fila. Los números que aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad.
- Los alumnos están agrupados por edades, al pasar de un curso a otro en la tabla, la línea de separación entre filas tiene mayor grosor.
- Las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 2)[5] se rellenan si aparecen en blanco las casillas (A, Nivel K, 1)[6]. Para cada alumno se rellena la casilla (i, Nivel K, 3) si anteriormente ha sido marcada la casilla (A, Nivel K, 2).

[4] Para el análisis cualitativo de respuestas nos hemos basado en la metodología seguida en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de C. Fernández Escalona (2001).
[5] La primera componente de la terna, i, toma los valores A ó B. Respecto a la segunda componente, la letra K varía entre II y V.
[6] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la primera columna del Nivel K en la tabla.

Análogamente se da esta misma situación entre las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 1)[7] y (A, Nivel K, 3).

- Los recuadros de coordenadas (A, Nivel K, 1), con K variando entre II y V, indican que los alumnos han superado el nivel que se indica en la terna.
- El número que aparece en las casillas sombreadas correspondientes a las coordenadas (A, Nivel K, 1), indica la estrategia seguida por el alumno en la tarea asociada al nivel que se considera en la terna.

La codificación de las estrategias se registra en el siguiente cuadro:

TAREAS ASOCIADA A LOS NIVELES	ESTRATEGIAS
II	1. Ensayo y error. 2. Contar. 3. Comparar series. 4. Razona sobre el nº infinito .
III	1. Ensayo y error. 2. Contar. 3. Comparar series. 4. Razona sobre el nº infinito.
IV	1. Ensayo y error 2. Calculadora 3. Comparar series. 4. Razona sobre el nº infinito.
V	1. Ensayo y error. 2. Calculadora. 3. Comparar series. 4. Razona sobre el nº infinito.

Debemos puntualizar que, para cada nivel, las estrategias codificadas como *1* y *2* son propias de niveles inferiores, *3* y *4* corresponden a esquemas lógico-matemáticos propios de los niveles en cuestión o a niveles superiores. Una vez realizadas todas las aclaraciones pertinentes pasamos a presentar la tabla de resultados de los alumnos.

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'
1° CURSO	A. 12	A	4				4							4	4			
		B																
	C. 12	A																
		B																
	E. 12	A	3				2											
		B																
	P. 12	A	4				4							3	4			
		B																
	T. 12	A				1	1											
		B																
2° CURSO	P. 13	A				2												
		B																
	B. 13	A																
		B																
	I. 13	A	1															
		B																
	M. 13	A																
		B																
	I. 13	A																
		B																

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'
3° CURSO	P. 14	A				1												
		B																
	T. 14	A				1												
		B																
	L. 14	A				3	4				4				4			
		B																
	MA. 14	A	3				3							4	4			
		B																
	A. 14	A																
		B																
	M. 14	A	3				4				4				4			
		B																

4° CURSO	B. 15	A				3	3				3				3			
		B																
	A. 15	A				3	3				3				3			
		B																
	R. 15	A																
		B																
	C. 15	A																
		B																
	G. 15	A	2				2											
		B																
	M. 15	A	1															
		B																

Tablas. Distribución de respuestas de cada alumno por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.

[7] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la cuarta columna del Nivel K en la tabla

Cabe aclarar que el sombreado de la cuadrícula indica que el alumno ha llegado a realizar esa tarea en dicho nivel. El número que aparece, es la estrategia utilizada para contestar positivamente.

5. Resultados y conclusiones

Hemos establecido un modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante comparación de series y comprobado la utilidad y eficacia del modelo para describir el comportamiento real.

Hemos caracterizado cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento. Dicha caracterización es:

Nivel I

Se caracterizan porque son capaces o no de etiquetar los elementos de una serie numérica diferenciándolos unos de otros, pero sin establecer comparaciones entre ellos y si lo hacen, sin encontrar diferencias.

Nivel II

Se caracterizan porque además de construir las series numéricas convergentes infinitas, saben diferenciarlas sustrayendo un número pequeño y primeros de elementos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos y términos primeros.

Nivel III

La característica fundamental es: saben distinguir las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de una cantidad mayor de número de términos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cualesquiera.

Nivel IV

Sus características son: construyen tanto series finitas como infinitas y diferencian éstas con pocos términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas convergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

Nivel V

Se caracterizan porque saben distinguir sucesiones finitas e infinitas, a las que la diferencian con mayor número de términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas convergentes cualesquiera.

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en el nivel V, los alumnos que alcanzan ese nivel son los que resuelven la tarea asociada al estado IV con estrategias superiores.

Por otro lado, hemos comprobado que es posible determinar pruebas para el nivel de estos alumnos que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidos por tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas implicados en cada una de ellas.

Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

Bibliografía

Bermejo, V.; Lago, M. (1991).*Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos*. Madrid. C.I.D.E.

Claparède, E. (1976). Prefacio en, J. Piaget, *Le Langage et la pensèe chez l'enfant, 9ª ed. Neuchâtel:* Delachaux et Niestlé.

Cohen, L.; Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid.

D'Amore, B. (1996). *El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática*. Epsilon nº 36, 341-360.

Fernández Escalona, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Holzmann, T. (1983). *Cognitive variables in series completion*. Journal os Educational Psychology 75, 603-618.

Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant á la loguique de l'adolescen.* París.

Inhelder, B.; Sinclair, H.; Bovet, M. (1974). *Aprendizaje y estructuras de conocimiento.* Morata. Madrid.

Moreno y Sastre. (1983). *Aprendizaje y desarrollo intelectual*. Barcelona. Gedisa.

Olerón, P. (1967). *Las actividades intelectuales*. En Trité de Psychologie Expeérimentale (VII) L'Intelligence. Presses Universitaire de France.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, A., González, J.L. (1998). *El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número.* Aula: Revista de enseñanza e investigación educativa. N° 10. Universidad de Salamanca. 65-87.

Pellegrino, J.W. (1976). *Components of inductive reasoning*. En R. Snow, P.A.

Piaget. J.; Apostel, L., y otros (1986). *Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética*. Barcelona. Paidós

Ross, L. (1981). *The teaching of the thinking*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. Referenciado en Nickerson, R.S. (1985).

Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Madrid. Espasa Calpe (Versión original es de 1903).

Sternberg, R. (1986). *Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence*. Cambridge: University Press.

Sophian, C. (1995). *Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets.* Child Development, v66 n2. 559-577.

Vinh-Bang. (1966). *La mèthode clinique et la recherché en psychologie de l'enfant.Psychologie et èpistemologie gènétique*: thèmes piagètiens, Paris, Dunod, 67-81.

White, R. ,Gunstone, R. (1992). Probing understanding. The Falmer Press. London.

Juan Antonio Prieto Sánchez. Licenciado en CC Físicas. Certificado-Diploma de Estudios Avanzados en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática (Tesina) Málaga, bienio 2002/2004.Master Didáctica de las Matemáticas, Puerto Real, bienio 2007-08. Profesor de educación secundaria de matemáticas. j_prieto_sanchez@hotmail.com

Dirección: Dra. Catalina Fernández Escalona.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 130-139
ISSN: 1815-0640

Concepções dos formadores de professores de matemática

Armando Traldi Junior

Resumo

Neste artigo apresentamos um estudo qualitativo sobre as concepções dos formadores de professores de Matemática, Thompson (1992), que ministram aulas de Cálculo Diferencial e Integral. O estudo foi realizado com o objetivo de verificar qual a relação entre as concepções dos formadores de professores de Matemática e as recomendações das diretrizes para os cursos de licenciaturas em Matemática. Ao final do estudo, entre as considerações, destacamos a necessidade do conhecimento por parte dos formadores de professores, da didática específica do Cálculo Diferencial e Integral, para atuarem nos cursos de licenciatura em Matemática.

Abstract

In this article I am presenting a qualitative study of the concepts of math teacher trainers, Thompson (1992), providing lessons differential and integral calculus. The study was performed to verify that the relationship between the concepts of math teacher trainers and recommendations of the guidelines for the degrees in mathematics courses. The end of the study, among the considerations, highlight the need of knowledge on the part of teacher trainers, specific differential calculus teaching and in full, to serve in undergraduate courses in mathematics

Resumen

En este artículo presentamos un estudio cualitativo sobre las concepciones de los formadores de profesores de Matemática, Thompson (1992), que dictan clases de Cálculo Diferencial e Integral. El estudio fue realizado con el objetivo de verificar cual la relación entre las concepciones de los formadores de profesores de Matemática y las recomendaciones de las directrices para los cursos de Licenciaturas en Matemática. Al final del estudio, entre las consideraciones, destacamos la necesidad del conocimiento por parte de los formadores de profesores, de la didáctica específica del Cálculo Diferencial e Integral, para actuaren en los cursos de licenciatura en Matemática.

1. Introducción

Este artigo tem como propósito abordar as concepções de formadores de professores de Matemática que ministram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um determinado curso de licenciatura em Matemática, no Brasil, e relacioná-las com as recomendações das diretrizes nacionais para a formação de professores da educação básica, em graduação (2001).

Com as mudanças na educação no cenário nacional, em todos os níveis de ensino, consideramos as diretrizes nacionais para a formação de professores da educação básica, em um curso de graduação, um importante documento para reflexões sobre os cursos de licenciatura em Matemática. Este documento procura identificar problemas a serem enfrentados no campo curricular e institucional pelos cursos de licenciatura, e mostra alguns princípios orientadores, nos quais destacamos a coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor.

Diante das novas perspectivas acerca da formação inicial nos cursos de licenciatura, o papel do formador de professores de Matemática, tanto das disciplinas pedagógicas como específicas, sofre transformações importantes. Formar professores não mais significa fornecer conhecimentos técnicos para melhor ensinar Matemática, mas criar oportunidades para apropriação de conhecimentos relacionados à sua prática profissional.

São muitos os autores que discutem a importância do professor nas mudanças curriculares, Escudero, (1992); Alarcão, (2001); Pires (2002). No entanto, apesar da importância do formador de professores, ainda conhecemos muito pouco suas concepções.

O interesse pelo estudo das concepções dos professores baseia-se no pressuposto de que existe nestas um substrato conceitual que tem um papel determinante em sua ação e nas possibilidades de desenvolvimento profissional. Em um período de mudanças no cenário educacional, julgamos relevante compreender quais são as concepções dos professores que atuam nos cursos de Licenciatura em Matemática sobre a Matemática e o processo ensino-aprendizagem dessa ciência.

Elegemos para esse estudo os formadores de professores de Matemática que ministram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pois são muitos os pesquisadores que indicam que essa disciplina é tratada, na maioria dos cursos, com um forte caráter de transmissão de verdades prontas, como Lanchini (2001). E outros como Cornu (1991), Tall (1991) e Azcárate *et al* (1996) destacam que a área de conhecimento do Cálculo Diferencial Integral é: a) rica em noções, ora em conformidade, ora em contradição com as idéias intuitivas dos alunos, o que deve ser levado em conta no seu ensino sob a pena de causar obstáculos; b) uma diversidade de registros de representações nas quais seus conceitos são apresentados; c) de caráter unificador que se manifesta, desde que sua abordagem no ensino leve em conta as diversas dimensões Matemáticas de um dado conceito (no quadro da álgebra, da geometria, da geometria analítica); d) abordagem de noções estudadas na educação básica (número real, infinito, continuidade, limite, função); e) aplicada em outras áreas do conhecimento.

Notamos assim, que o desenvolvimento da Didática do Cálculo Diferencial e Integral, em consonância com a formação do formador de professores que ministram essa disciplina nos cursos de licenciatura revela uma ligação relevante de ser compreendida de maneira racional.

Neste quadro é que o estudo foi realizado, com o objetivo de verificar qual a relação entre as concepções dos formadores de professores de Matemática que ministram aulas de Cálculo Diferencial e Integral e as recomendações das diretrizes para os cursos de licenciaturas em Matemática. O Professor, Concepções e Conhecimento Profissional

Atentando para os múltiplos problemas enfrentados nos sistemas educativos, que têm produzido um generalizado insucesso escolar, a investigação na área da educação vem insistindo numa perspectiva de diversas variáveis no estudo dos processos de ensino-aprendizagem, considerando relevantes domínios, como, por exemplo, o conhecimento profissional do professor.

Um dos autores que tem tido um papel de destaque no estudo sobre o conhecimento de professores é Shulman (1986). Para esse autor, a base do conhecimento se refere a um repertório profissional que contém categorias de saberes que subjazem à compreensão que o professor deve ter do conteúdo que vai ensinar. O autor explicita várias categorias dessa base de conhecimento conhecimento do conteúdo específico, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do currículo, conhecimento dos alunos e de suas características, conhecimento dos contextos educacionais, conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais que podem ser agrupadas em conhecimentos específicos, didáticos e curriculares.

No Brasil destacamos que, a partir da década de 80, na área da Educação Matemática, começam a surgir pesquisas que têm como foco as concepções dos professores, incluindo docentes de diferentes níveis de ensino. Thompson (1992) investiga as relações entre as concepções dos professores e suas práticas pedagógicas. Os resultados mostram que as concepções dos professores transformam-se continuamente e afetam de modo significativo sua prática em sala de aula.

Ponte *et al* (1998), por sua vez, destacam que, embora a concepção seja parte integrante do conhecimento profissional, nem sempre há coerência entre a concepção e a prática. Ao ampliarmos o foco para o saber docente, é necessário compreendermos, o que é esse saber docente, como é constituído e como pode ser percebido na ação.

Para Zabalza (1991) torna-se claro que as pesquisas sobre os saberes docentes procuram ir além dos dados objetivos e das condutas explícitas dos professores, abordando o conjunto de estruturas internas que lhe dá sentido. Há, porém, pressupostos diferentes em relação a essas estruturas internas. Alguns autores defendem que os professores constroem sua ação de forma reflexiva, ou seja, racionalmente, Tardif (2002). Portanto, só é considerado saber aquilo que é justificado e, com isso, é explicitada a razão da ação.

No entanto, há uma outra tendência, com a qual concordamos, que é a influenciada pela etnometodologia, que considera que a estrutura interna determinante da ação do docente consiste de juízos, crenças, teorias e saberes implícitos. Entre os autores que defendem essa posição temos Connelly & Clandini (1990) afirmando que o fazer está intimamente ligado ao “conhecimento pessoal prático”.

Para Elbaz (1983), todas as espécies de conhecimento do professor estão integradas e filtradas pelos valores e crenças pessoais, constituindo, assim, um saber que orienta a sua prática profissional. Ele enfatiza o componente prática do saber dos professores e ressalta que o conhecimento do professor é essencialmente prático, isto é, é um saber fazer. Para esse autor, grande parte do conhecimento decisivo para a prática profissional é mais implícita do que explícita.

2. Realização Do Estudo

A metodologia de pesquisa utilizada neste estudo é a qualitativa e interpretativa, Bogdan e Biklen (1994). A investigação iniciou-se com a constituição de um grupo colaborativo (Boavida e Ponte, 2002), formado por sete professores, que nomeamos como P1, P2, P3, P4, P5, P6 e P7, mais o investigador, que também é professor do curso. Esse curso é ministrado em uma instituição particular do estado de São Paulo. Vale ressaltar que no estado de São Paulo, segundo o cadastro do INEP (Instituto Nacional de Estatística e Pesquisa) temos cento e oitenta e um cursos de licenciatura em Matemática cadastrados em 2004 e, desse total, cento e sessenta são ministrados em instituições particulares. Portanto, não corremos riscos em afirmar que, a maioria dos professores da educação básica está sendo formada pelas instituições particulares.

Esse grupo foi constituído a partir do convite do coordenador do curso aos professores que estavam ministrando ou já tinha ministrado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, nessa instituição ou em outra. Todos os professores que foram convidados manifestaram interesse em participar do grupo com o propósito de estudarem os objetivos do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de licenciatura em Matemática. Esse grupo é bastante heterogêneo, tanto no que se refere à experiência profissional, como formação acadêmica:

Quadro Resumo dos Professores: Formação Acadêmica e Experiência Profissional

Profesor	Formação (área/ano/tipo)			Experiência Profissional		
	Graduação	Mestrado	Doutorado	Educação Básica	Ensino Superior	Disciplina de CDI
P1	Licenciatura em Matemática 1998. Privada	Educação Matemática 2001. Privada	Educação Matemática Iniciado em 2004	8 anos	2001	2001
P2	Bacharelado em Matemática 1998. Pública	Matemática 2001. Pública	Matemática Iniciado em 2001 Pública	3 anos	2000	2000
P3	Licenciatura em Matemática 2000. Privada	Educação Matemática 2002. Privada		1 ano	2000	2000
P4	Bacharelado e Licenciatura em Matemática	Matemática 1993. Privada		15 anos	1984	1984
P5	Bacharelado e Licenciatura em Matemática 2002. Privada	Educação Matemática Iniciado em 2003. Privada		3 anos	2004	2004
P6	Bacharelado em Física. 1990. Pública	Ciências Física 1993. Pública	Ciências Física 1999	1 ano	1988	1988
P7	Bacharelado e Licenciatura em Matemática. 1983	Iniciou Matemática 1991.Privada		1 ano	1988	1988

Para Bogdan e Biklen (1994) a “Investigação Qualitativa” tem como estratégias mais representativas: a “observação participante” e a “entrevista em profundidade”. Em relação à observação participante, os autores enfatizam que a modalidade mais utilizada é aquela em que o investigador introduz-se ou já faz parte do mundo das pessoas que pretende estudar, e tenta conhecê-las, permitindo que elas o conheçam, e elabora um registro escrito de tudo que observa. A outra estratégia, chamada pelos autores de entrevista em profundidade, é o tipo de entrevista "não estruturada". Esta entrevista é usada pelo investigador que tem como objetivo compreender, em detalhes, o que pensam os atores da educação (professores, estudantes, diretores), e como desenvolvem seus quadros de referências. A estratégia usada na coleta da maioria dos dados apresentados neste artigo foi à entrevista semi-estruturada, porém, também fizemos a observação dos encontros.

Ao todo foram oito encontros do grupo ocorridos no período de agosto de 2004 a maio de 2005, esses encontros eram de aproximadamente duas horas, aos sábados, e com a periodicidade de uma vez por mês. As entrevistas aconteceram individualmente nos meses de abril e maio de 2004.

3. Concepções dos Formadores

Foi possível discutir o conhecimento curricular ou pedagógico dos docentes, com algum detalhamento, na entrevista semi-estruturada. Para a nossa análise, usaremos as seguintes vertentes do conhecimento: curricular, pedagógica e específica, Shulman (1986).

3.a. Conhecimento Pedagógico

1. História da Matemática. Uma possibilidade de abordar os conceitos matemáticos

Para Zúñiga (1987) a História da Matemática tem um papel importante como possibilidade de esclarecimento do sentido das teorias e dos conceitos matemáticos que deverão ser estudados. Para esse autor, para atender tal objetivo não seria suficiente apenas apresentar breves informações introdutórias dos conceitos, mas efetivamente utilizar a ordem histórica da construção matemática devidamente adaptada ao estado atual do conhecimento.

Como os sujeitos de nossa investigação abordam a História da Matemática em suas aulas?

A partir da resposta de P1 podemos dizer que, apesar de abordar fato histórico, não o faz como metodologia de ensino e, sim, apenas para situar o conceito cronologicamente.

Em relação a fatos históricos, geralmente solicito que eles façam uma pesquisa sobre o tema, por exemplo, sobre Leibniz e Newton ao estudar as derivadas, mas por falta de tempo nem sempre discuto em sala de aula. (P1-Entrevista: abril/2004).

A resposta de P2 nos mostra que também não há abordagem do conteúdo por meio de problemas relacionados à História da Matemática.

Em relação a fatos históricos, geralmente conto algumas historinhas, por exemplo, como Newton e Leibniz desenvolveram as Derivadas. (P2 – Entrevista: maio/2004).

A resposta de P6 mostra que usa a História da Matemática na perspectiva que Zúñiga (1987) afirma não ser suficiente para atingir os objetivos, apresentando apenas breves informações introdutórias dos conceitos.

Os professores P3, P4, P5 e P7 afirmaram que não abordam fatos históricos por falta de tempo para cumprir o conteúdo, ou falta de conhecimento sobre o assunto.

Podemos afirmar que nenhum dos professores analisados aborda a História da Matemática como metodologia de ensino, isto é, utilizando efetivamente a ordem histórica da construção matemática devidamente adaptada ao estado atual do conhecimento.

2. Abordagem de conceitos matemáticos por meio de situações- problema

Em nossa dissertação de mestrado fizemos uma discussão sobre as diferentes possibilidades de proposição de problemas em sala de aula, apoiados em Boavida (1992), que nos mostrou diferentes momentos de apresentarmos um problema: como justificação - os problemas são incluídos no currículo para justificar o ensino da matemática; como motivação - o objetivo é interessar os alunos pelo ensino de determinados conteúdos matemáticos; como recreação - procura-se, antes de qualquer coisa, que os alunos se divirtam com a matemática que já aprenderam; como veículo - os problemas constituem um veículo por meio do qual pode ser apreendido um novo conceito ou competência; como prática - fundamentalmente os problemas constituem a prática necessária para reforçar conceitos e competências ensinadas diretamente.

O estudo por diletantismo é um atrativo para algumas pessoas, mas não para todas. De fato, a maioria das pessoas sente-se mais motivada ao estudo quando é capaz de perceber que o conhecimento adquirido será útil para sua vida. Portanto, acreditamos que partir de um problema para chegar a um conceito matemático é muito mais significativo para o aluno.

Como os professores analisados utilizam os problemas no processo ensino-aprendizagem?

Os professores P1, P2, P3, P4, P5, P7 afirmaram que apresentam problemas para os seus alunos, mas quando solicitamos que descrevessem em qual momento da aula e quais os tipos de problemas, percebemos que todos apresentavam o que Boavida classifica como “prática”, isto é, para os alunos aplicarem os conhecimentos já estudados.

P6 afirmou utilizar a metodologia de resolução de problemas na maioria de suas aulas, mas quando solicitamos que o professor descrevesse uma dessas aulas, percebemos, por sua descrição que utiliza a idéia de motivação e não a de veículo, isto é, no início da aula apresenta um problema relacionado ao tema que será abordado, mas, em seguida, define o objeto matemático, propõe exemplos e exercícios.

3. Utilização de Tecnologia nas Aulas (computador e/ou calculadora).

O professor P1 afirmou utilizar o laboratório de informática em aproximadamente 30% de suas aulas. Questionamos para que ele o utilizava, e o professor respondeu que era para o aluno perceber as diferentes conversões entre os registros de representação de funções. Para isso, utiliza o “software winplot”. Também, afirmou que é uma ferramenta útil e contribui para a aprendizagem do aluno.

P6 afirmou usar o laboratório em 10% de suas aulas. Quando questionamos com qual objetivo, o professor respondeu que era para que o aluno conhecesse o “software winplot”, porém ele mesmo afirmou que a maioria dos alunos acaba usando-o apenas nas duas ou três aulas acompanhadas por ele e, depois, não usa mais.

O Professor P2 afirmou “é muita burocracia imposta pela instituição que desanima, então não preparo aula para o laboratório, apesar de achar importante.” P2 foi o único dos professores que comentou não incentivar o uso da calculadora, “mas deixo os alunos usarem em sala de aula, pois geralmente, o aluno da licenciatura tem calculadora simples que não dá dicas de como construir gráficos”.

Podemos perceber que apesar das pesquisas de Dall’Anese (2000) e Souza Júnior (2000) considerarem a grande contribuição que a tecnologia traz para o processo ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, com exceção dos professores P1 e P6, os demais não usam a informática e P2 tem restrições em relação ao uso de calculadora.

Destacamos que o laboratório de informática é usado sistematicamente pelo curso de Licenciatura em Matemática, em todos semestres, pela disciplina de Geometria.

3.b. Conhecimento Curricular

1. Contribuições mais Relevantes da Disciplina para o Curso

Segundo Azcárate *et al* (1996) os conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral podem contribuir para que o aluno tenha ferramentas para resolver problemas de diferentes áreas de conhecimento. Ao mesmo tempo, as Diretrizes Nacionais para Formação de Professores (2001) recomendam que os formadores dos professores preparem os futuros docentes da educação básica para mostrarem as aplicações da Matemática em diferentes áreas de conhecimento.

Consideramos, assim, o Cálculo como a área de conhecimento que tem conceitos que podem ser usados como ferramenta para resolver problemas internos da Matemática, por exemplo, encontrar a equação da reta tangente a uma curva num dado ponto. Também resolver problemas de outras áreas de conhecimento, como por exemplo, na Física - velocidade média e instantânea; na Pesquisa Operacional na resolução de problemas de otimização.

Ao analisarmos as respostas dos professores em relação aos objetivos de ensinar Cálculo Diferencial e Integral no curso de Licenciatura em Matemática, percebemos que os professores P2, P3, P6 e P7 não têm como objetivo ensinar os conceitos dessa área de conhecimento e, sim ensinar as ferramentas matemáticas que os alunos utilizam e que depois serão seus objetos de ensino. Podemos ter como hipótese que por esse motivo o curso de Cálculo recebe críticas de alunos recém-licenciados, que não percebem a aplicação dessa disciplina. A seguir mostramos algumas respostas dos formadores:

Possibilita ao aluno usar ferramentas que depois irá ensinar

(P2- Entrevista: maio 2004).

Desenvolver a base que será necessária para entender o Cálculo, e depois ele irá usar essa base (P3 – Entrevista: maio 2004).

O Cálculo tem ferramentas para que os futuros professores possam saber tudo sobre funções, além de ampliar o raciocínio, ganhar mais confiança para trabalhar com os alunos e prever situações (P6- Entrevista: maio 2004).

Para resolver os problemas de Cálculo os alunos precisam de ferramentas que usarão como professores (P7- Entrevista: maio/2004).

2. Seqüência de Conteúdos

Há uma discussão bastante ampla na forma de organização de conteúdos de Matemática proposta para a educação básica feita pela comunidade científica. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997) trazem em um de seus capítulos que os professores, ao organizarem seus currículos, devem analisar alguns pontos, que, entre eles, destacamos:

As possibilidades de colocar em seqüência os conteúdos são múltiplas e decorrem mais de conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que da idéia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida *a priori* (1998, p.53).

Pires (2000) também faz uma discussão sobre esse tema e afirma:

Embora admitindo-se que existam etapas necessárias a serem cumpridas antes de se iniciar outras e que há que se escolher, enfim, um certo percurso, não se justifica o condicionamento tão forte que em geral é observado nos programas (2000, p.67).

A autora também ressalta que na prática podem ser observadas duas características marcantes no plano de ensino: a exigência de definir uma progressão no tempo, considerando o curso, série e bimestre, para o desenvolvimento dos conteúdos que devem ser ensinados e a necessidade de verificar se os conhecimentos adquiridos pelo aluno lhes dão condições de prosseguir, ou seja, se ele tem "pré-requisitos necessários".

Quais são as concepções dos professores entrevistados em relação à seqüência de ensino proposta em Cálculo Diferencial e Integral?

Todos os professores apontaram que seguem a seqüência proposta nos livros didáticos, isto é, limite, derivada, aplicação das derivadas, integral e aplicações das integrais. Porém destacaram que alguns teoremas ou definições, quando acham que será muito complicado para o aluno entender, "eles pulam". Destacamos uma das respostas:

Nunca pensei em outra seqüência para ensinar os conteúdos [referindo a seqüência limite, derivada, aplicação das derivadas, integrais e aplicações das integrais] (P1 – Entrevista: abril/2004).

4. Considerções

Destacamos que este estudo proporciona a possibilidade de confirmar a necessidade de uma mudança curricular ser pensada em conjunto com o formador Escudero (1992). Principalmente, por concordamos que todas as espécies de conhecimento do professor estão integradas e filtradas pelos valores e crenças pessoais, constituindo, assim, um saber que orienta a sua prática profissional, Elbaz (1983).

Considerando as concepções dos professores analisadas neste estudo, notamos a ausência parcial ou total de entendimento dos mesmos dos conhecimentos didáticos ressaltados por Cornu (1991), Tall (1991) e Azcárate *et al* (1996) ao abordarem os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, impedindo assim, de colocarem em prática as recomendações das diretrizes para a formação de professores da educação básica.

Consideramos que o presente trabalho contém evidências da falta de conhecimento das diferentes abordagens metodológicas (considerando os aspectos histórico e situação-problema), por parte de alguns professores (P2 e P6). Assim como a não utilização da informática como uma ferramenta que contribuí no processo ensino-aprendizagem, conforme demonstram diversos estudos Dall'Annese (2000) e Souza Júnior (2000).

No aspecto curricular, há presente no grupo a prática de seguir a seqüência proposta nos livros textos de uma forma linear. Quando questionados o porquê da abordagem de determinado conteúdo, por exemplo, o estudo de limite, o objetivo está em retomar alguns procedimentos da educação básica que será ferramenta do futuro professor desse nível de ensino.

Por último, cabe destacar que concordamos com Azcárate (1999) que critica as vertentes de Shulman (1986) ressaltando que o problema em relação ao conhecimento didático do conteúdo não deve ser visto como a transformação do conhecimento em outro mais acessível (transposição didática), mas sim, em elaborar um conhecimento diferente das disciplinas, um conhecimento profissionalizante da Matemática.

Acrescentamos que esse conhecimento é necessário ao professor de Cálculo Diferencial e Integral e que o trabalho colaborativo, conforme propõem Boavida e Ponte (2002) pode ser uma metodologia de estudo que proporcione aos formadores de professores o conhecimento didático necessário para atuarem nos cursos de licenciatura em Matemática.

Bibliografía

Azcarate, C.; Casadevall , E.C.; Bosch, D. (1996).*Cálculo diferencial e integral*. Síntesis, Madrid. España.

Azcarate, P. .(1999) *El conocimiento profesional: Naturaza, fuentes, organización y desarrollo*.Quadrante, Lisboa, v. 8, 111-138,

Alarcao, I.(2001 *Professor-investigador: Que sentido? Que formação*? In: CAMPOS, B. P. (Org). Formação profissional de professores no ensino superior**.** Porto: Porto Editora, v.1, 21-31.

Boavida, A.M. (1992) *Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática*? In: PONTES, J.P. (Org.). Educação Matemática. Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, 115-122.

Boavida, A.M.; Ponte, J.P.(2002) *Investigação colaborativa: potencialidades e problemas.* Refletir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM,.14-39.

Bogdan, R.; e Biklen, S.K. (1994)Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Porto Editora.

Connelly, F. e Clandinin, J. (1990).*Stories of Experience and Narrative Inquiry*. Educational Researcher. V.19, N. 5, 2-14.

Cornu, B. Limits. (1991) In: TALL, D. (Org). Advanced mathematical thinking. Boston/Londres: Kluwer Academic, p. 153-166, DALL'ANESE, C. Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

Elbaz, F. (1983)*Teacher thinking: A study of pratical knowledge.* London: Croom Helm. ESCUDERO, J. M. L. Los Desafios da las Reformas Esc*olares*. Sevilha: Arquétipo, 1992.

Lanchini, J. (2001)*Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo*. In: BOSCO, J. e LANCHINI, J. A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FMARC. 144-190.

Ministério da Educação, (2001)Diretrizes curriculares nacionais para formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação*.* Brasília. Brasil

Ministério da Educação - Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. BRASIL.

Pires, C.M.C*.(*2002).*Reflexões sobre os cursos de matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica.* Educação Matemática em Revista, São Paulo, SBEM, v. 11A, 44-56, abril,

Ponte, J. (1994) *Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning*. In: BAZZINI, L. (org.). Theory and practice in mathematics education. Cidade: Grado,.

Ponte, J.; Olivera, H.; Cunha H.; & Segurado, I. (1998).*Histórias de investigação matemáticas.* Lisboa: IIE.

Shulman, L. S.(1986).*Those who understand: knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14,

Shon, D. (1987). *The reflective practitioner*. São Francisco: Jossey-Bass,

Souza Junior, A.J. (2000) de. *Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral*. Campinas,. Tese de doutorado - UNICAMP.

Tall, D. (1991*) Advanced mathematical thinking*. Boston/Londres: Kluwer Academic.

Tardif, M (2002).*Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, Thompson, A. G.(1992).*Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research.* Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillan. 127-146,

Zabalza, M. A. (1991).*Diários de aula – contributo para o estudo dos dilemas práticos dos professores.* Porto: Porto Editora.

Zúñiga, A.R. (1987)*Algunas implicaciones de la filosofía y la historia de las matemáticas en su enseñanza.* Revista Educ., Costa Rica, s.e., 11 (1), 7-19.

Armando Traldi Jr. Professor titular de Matemática do Instituto Federal de Educação Tecnológica de São Paulo. Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Assessor de Formação de Professores de Matemática da Prefeitura de São Paulo. Participante do Grupo de Pesquisa Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores - PUC-SP.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 140-149
ISSN: 1815-0640

Diseño de una e-actividad sobre aplicaciones de las integrales en Economía como cuaderno de trabajo para el alumno

Concepción Paralera Morales; Ana María Martín Caraballo

Resumen

Este artículo muestra el desarrollo de una actividad dirigida a mejorar la comprensión del uso de las integrales en algunos conceptos que se imparten en los Estudios de Economía. Los alumnos han elaborado una e-actividad con los contenidos y ejercicios, que les sirve como cuaderno de trabajo. De esta manera se fomenta el aprendizaje autónomo e individualizado. Para la elaboración de la misma, se ha utilizado la calculadora Classpad 300.

Abstract

This work describes the development of an activity aimed at improving the understanding of the use of integrals in a degree in Economics. The students have carried out an e-activity, which can be used as a workbook, with different contents and exercises. This procedure promotes an individual and autonomous learning process. This activity was performed with Classpad 300.

Resumo

Este artigo mostra o desenvolvimento de uma atividade dirigida para melhorar a compreensão do uso das integrais em alguns conceitos que são distribuídos nos estudos de economia. Os estudantes elaboraram uma e-atividade com conteúdos e exercícios, que lhes servirá como caderno de trabalho. Desta maneira se fomenta a aprendizagem autónoma e individual. Para a construção da mesma, se utilizou a calculadora Classpad 300.

1. Introducción

Una de las opciones que presenta la ClassPad 300 es la creación de ejercicios electrónicos que van a ser utilizados posteriormente por el alumnado como si se tratase de “un cuaderno de trabajo”, permitiendo al alumno un aprendizaje autónomo e individualizado, así, cada alumno aprende a su propio ritmo y de acuerdo a sus propios métodos de resolución.

Las e-actividades pueden consistir, como cualquier problema de un libro de texto tradicional, en líneas de texto, cálculos algebraicos, funciones, representaciones gráficas de funciones y análisis de diferentes parámetros relacionadas con las mismas, geometría en 2D y 3D, gráficos de cónicas, gráficos estadísticos, resoluciones numéricas, notas, enlaces de geometría dinámica, hojas de cálculo, etc.

Por otra parte, como si de un "libro de ejercicios" se tratara, permiten al alumno comprobar el éxito o no del problema tratado en los siguientes aspectos:

- Visualización del desarrollo y progreso en un ejercicio.
- Revisión, repetición, comprensión de los puntos ya aprendidos.
- Reflexión.
- Vía de actualización del trabajo en formato electrónico.
- Motivación y preparación para la vida real.

En este trabajo se propone al alumno que realice una actividad que puede desarrollar con la calculadora gráfica CLASSPAD 300. Esta actividad está dirigida a los alumnos de primer curso de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas y la Diplomatura en Ciencias Empresariales (por tanto, son alumnos que están en su primer año de universidad).

La actividad propuesta, se divide en dos partes; en la primera de ellas el alumno debe buscar los conceptos propuestos por el profesor y elaborar el material con el que va a trabajar en un documento de Word y, en la segunda, realizar una e-actividad con los contenidos, incluyendo tres actividades propuestas donde se aplique la materia seleccionada así como la posterior resolución de las mismas con la calculadora. Los resultados que el alumno obtenga los presentará en el mismo documento de Word al que se ha hecho referencia anteriormente, capturando las pantallas necesarias para que quede constancia de cómo se ha realizado.

El tema propuesto para el alumno es una aplicación de las integrales en Economía, en concreto, con aplicaciones de las integrales definidas. Para ello, debe definir los siguientes conceptos; excedente del consumidor, excedente del productor y en las medidas de concentración de la renta, las curvas de Lorenz, el índice de Gini y su interpretación.

2. El desarrollo de los contenidos

Sea $p= D(q)$ la curva de demanda de cierto artículo y $p= O(q)$ la curva de la oferta del mismo artículo. Denotamos por q la cantidad del artículo que puede venderse a un precio p por unidad. En general, la función de demanda es una función decreciente indicando que los consumidores dejarán de comprar si el precio se incrementa. Por otro lado la función de oferta es una función creciente porque los productores proveerán más si consiguen precios más altos.

- **Excedente del Consumidor**

A medida que el precio se incrementa, la demanda decrece. Esto implica que los consumidores estarían dispuestos a comprar el artí ulo a un precio más alto que el precio de equilibrio en el mercado p_0, que es en realidad el que deberían pagar.

Definición: El excedente del consumidor es la diferencia entre lo que el consumidor está dispuesto a pagar por la compra de q_0 unidades y lo que realmente paga. Habitualmente se denota por EC.

De esta forma, la siguiente integral definida nos permite calcular el valor del excedente del consumidor:

$$EC = \int_0^{q_0} \left(D(q) - p_0 \right) \cdot dq = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_o \cdot q_o$$

- **Excedente del Productor**

De manera similar, en un mercado de libre competencia existen también productores que estarían dispuestos a vender un artículo a un precio menor que el de equilibrio de mercado p_0, que los consumidores deben en realidad pagar.

Definición: El excedente del productor se define como la diferencia entre lo que le supone al productor la venta de q_0 unidades (al precio unitario p_0) y lo que obtendría vendiendo cada unidad de forma separada. Habitualmente se denota por EP.

El excedente del productor se calcula mediante la integral definida:

$$EP = \int_0^{q_0} \left(p_0 - O(q) \right) \cdot dq = p_o \cdot q_o - \int_0^{q_o} O(q)dq$$

Otras de las aplicaciones de las integrales definidas es el cálculo de las medidas de concentración de la renta y desigualdad que pasamos a describir brevemente:

- **Medidas de concentración de la renta**

En Economía, a menudo es de interés conocer la distribución personal de la renta en una población y relacionado con ello, disponer de un número que indique cómo se concentra la riqueza en dicha población. Para estos dos fines se utilizan habitualmente dos descriptores que reciben el nombre de Curva de Lorenz e Índice de Gini.

Curva de Lorenz

Esta curva se utiliza para estudiar la distribución personal de los ingresos. Así, si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, e y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos viene dada por la recta, $y = x$ (equidad perfecta).

Toda curva de Lorenz se encuentra entre la línea de perfecta equidad y la línea de perfecta desigualdad (hay un individuo que recibe toda la renta y el resto no recibe nada). Las curvas de Lorenz pueden utilizarse para comparar gráficamente distribuciones de rentas de distintos dominios geográficos siempre y cuando dichas curvas no se corten. Cuanto más próxima esté la curva de Lorenz de la diagonal (equidad perfecta), más equitativa será la distribución de la renta de ese país o región. Otra forma de observar la curva de Lorenz es estimando el área de la superficie que se encuentra entre la curva y la diagonal. Esa superficie se llama área de concentración. Cuanto mayor sea esta área, más concentrada estará la riqueza y cuanto más pequeña sea, más equitativa será la distribución de la renta del país o región representado.

Índice de Gini

El índice Gini, G, es un índice de concentración de la riqueza y equivale al doble del área de concentración. Este índice toma valores entre 0 y 1. de esta forma, cuanto más cercano a 0 sea G, menor será la concentración de la riqueza y la distribución de la renta será más equitativa. En cambio, cuanto más próximo sea a 1, mayor será la concentración de la riqueza, con lo que mayores serán las desigualdades de la distribución de la renta en la población establecida.

Dada la curva de Lorenz *L(x)* que representa a una distribución de la renta, el índice de Gini se define como:

$$\boxed{G = 2 \cdot \int_0^1 (x - L(x)) \cdot dx}$$

3. El desarrollo de los contenidos seleccionados con CLASSPAD

En primer lugar el alumno debe seleccionar en la calculadora el tipo de operación que va a realizar, en este caso una e-activity.

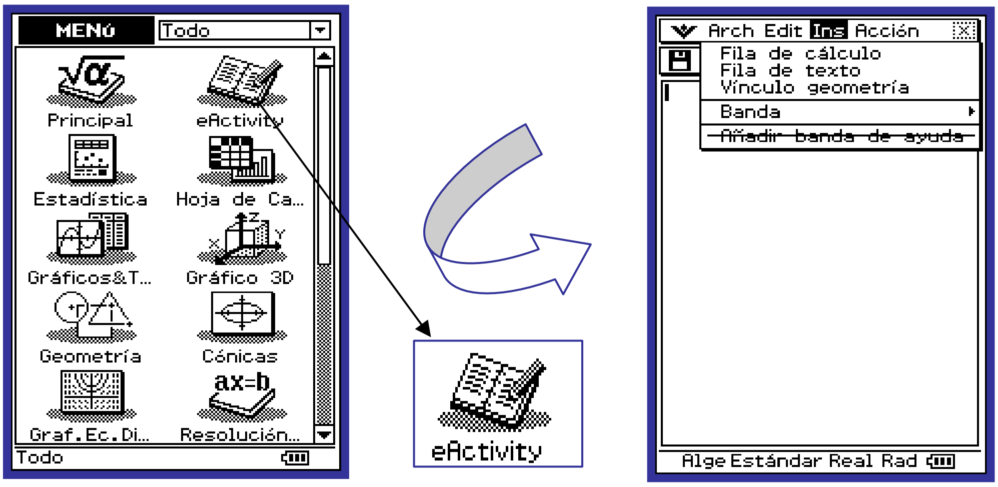


Figura 1 Figura 2

Para insertar los datos en la e-activity el alumno puede utilizar las líneas de texto, de cálculo, las bandas de datos o de ayuda. Las líneas de texto permiten ver y editar texto directamente en la ventana de la e-activity (no hay limitación en el número de líneas que pueden contener); las líneas de cálculo, realizar cálculos cuando se introduce una expresión matemática; las bandas de datos de una aplicación se usan para insertar datos desde otras aplicaciones de la CLASSPAD (éstas contienen un nombre y un botón de expansión para ver los datos en una ventana inferior) y por último, las bandas de ayuda donde se puede añadir un texto de ayuda a cualquier banda de datos.

La primera acción que se realiza con la calculadora es insertar una banda de datos donde el alumno pondrá sus datos para identificar la e-activity que está realizando, tal y como puede observarse en la Figura 3.

En la Figura 4 se comienzan a desarrollar los contenidos que se han detallado anteriormente.

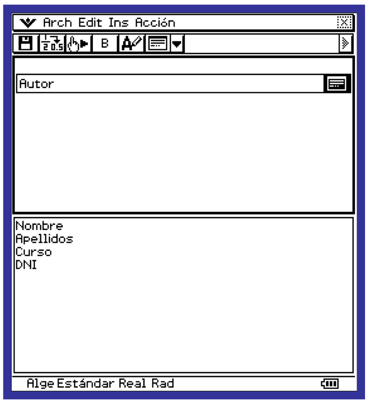


Figura 3

Figura 4

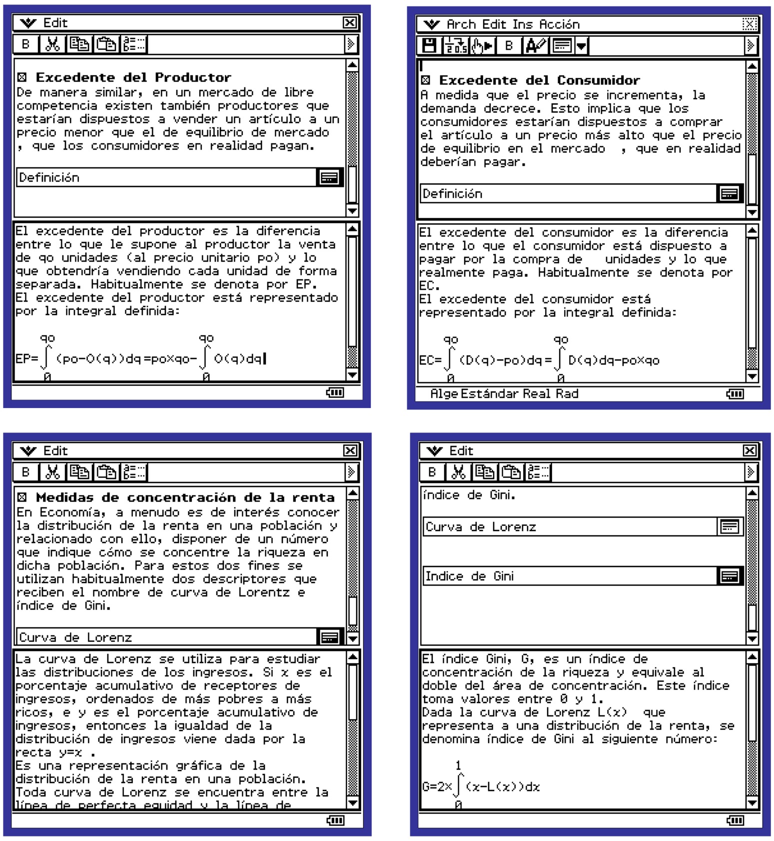


Figura 5

En las pantallas que aparecen en las Figuras 5 y 6 quedan detallados el resto de contenidos.

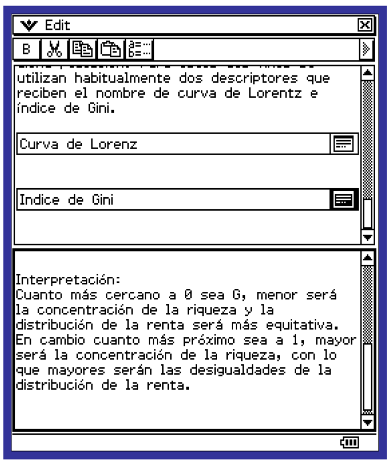


Figura 6

4. Actividades propuestas por el alumno

En este apartado el alumno debe incorporar las pantallas correspondientes a cada uno de los problemas propuestos tal y como puede observarse en la Figura 7, y que posteriormente tendrán que resolver con la calculadora.

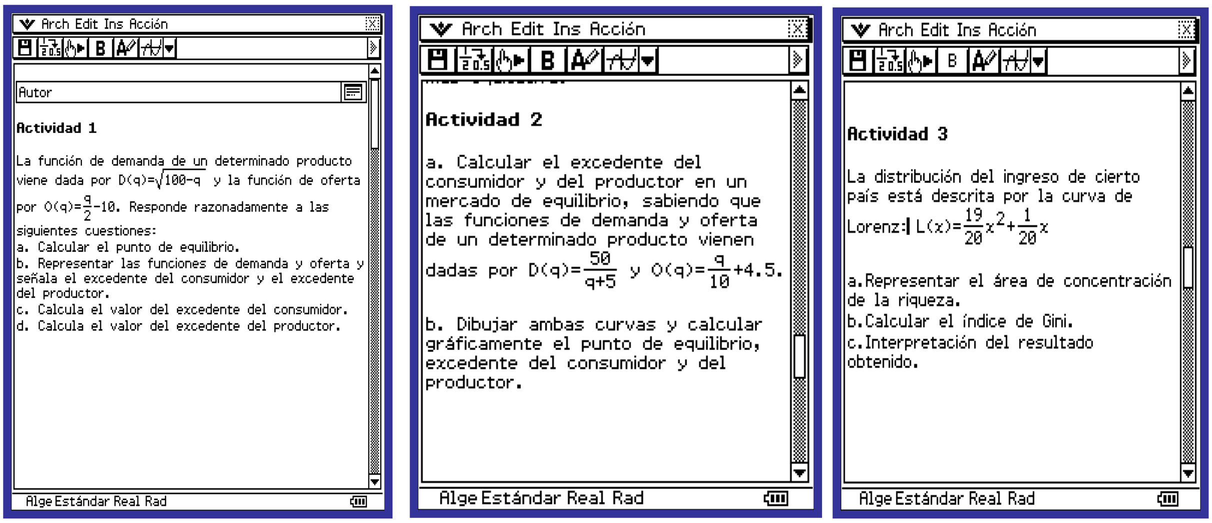


Figura 7

5. Resolución de las actividades con la CLASSPAD

Actividad 1

En primer lugar el alumno debe buscar cuál es el punto de equilibrio resolviendo la ecuación que resulta de igualar las funciones de oferta y demanda según se puede ver en la siguiente figura:

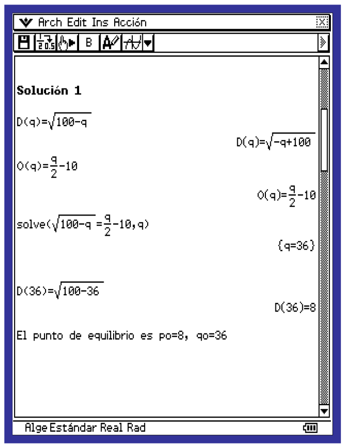


Figura 8

Una vez obtenido el valor de q_o, el correspondiente p_o se calcula sustituyendo en la función de oferta o demanda

A la hora de obtener gráficamente el excedente del consumidor y del productor, el alumno previamente debe insertar una banda de datos de gráfico y definir las funciones que va a representar. Una vez seleccionada la banda de gráfico, ésta aparece en la parte inferior los ejes donde aparecerán representadas las funciones tal y como puede verse en la siguiente figura:

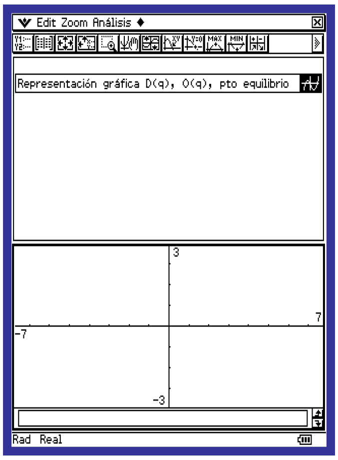


Figura 9

El siguiente paso a dar es definir las funciones. Una vez realizado, se representan tal y como puede observarse en la Figura 10, donde podemos ver el punto de equilibrio, y las regiones correspondientes al excedente del consumidor y del productor.

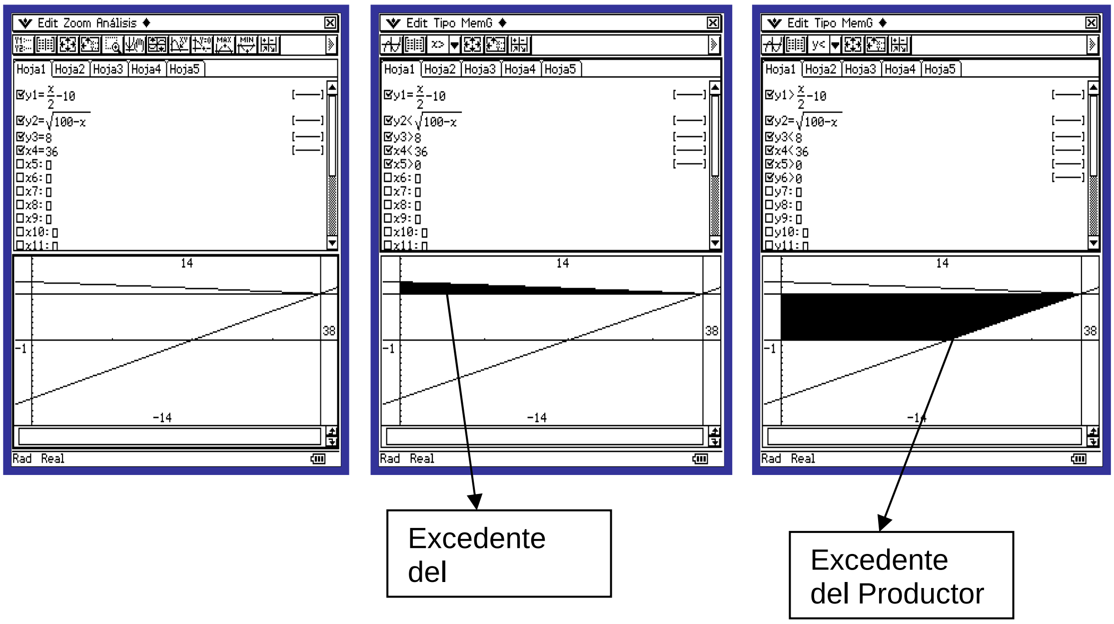


Figura 10

Una vez que se ha realizado la representación gráfica, el siguiente paso es calcular analíticamente cuál es el valor correspondiente al excedente del consumidor y del productor. En este punto es necesario insertar líneas de texto en primer lugar y de cálculo después, que nos permitan obtener el valor numérico de ambas expresiones.

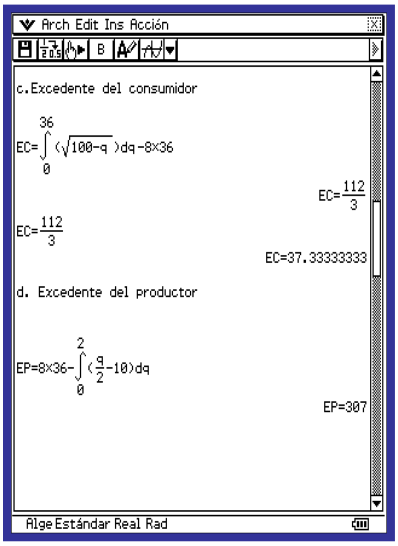


Figura 11

Actividad 2

De igual modo en esta otra resolución se alternan las líneas de texto con las de cálculo para poder ir resolviendo el problema. Los resultados numéricos se pueden expresar también en formato decimal.

Una vez calculado el punto de equilibrio como la intersección entre las curvas de oferta y demanda, calculamos gráficamente el excedente del consumidor y del productor, indicado en la siguiente figura:

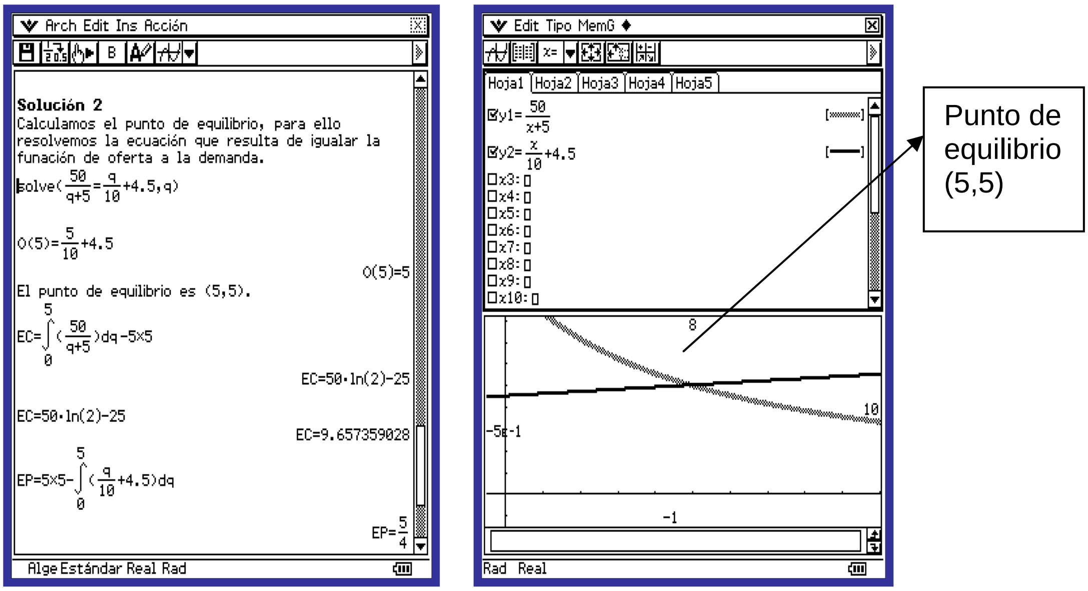


Figura 12

Las regiones que determinan el excedente del consumidor y del productor pueden observarse en la Figura 13:

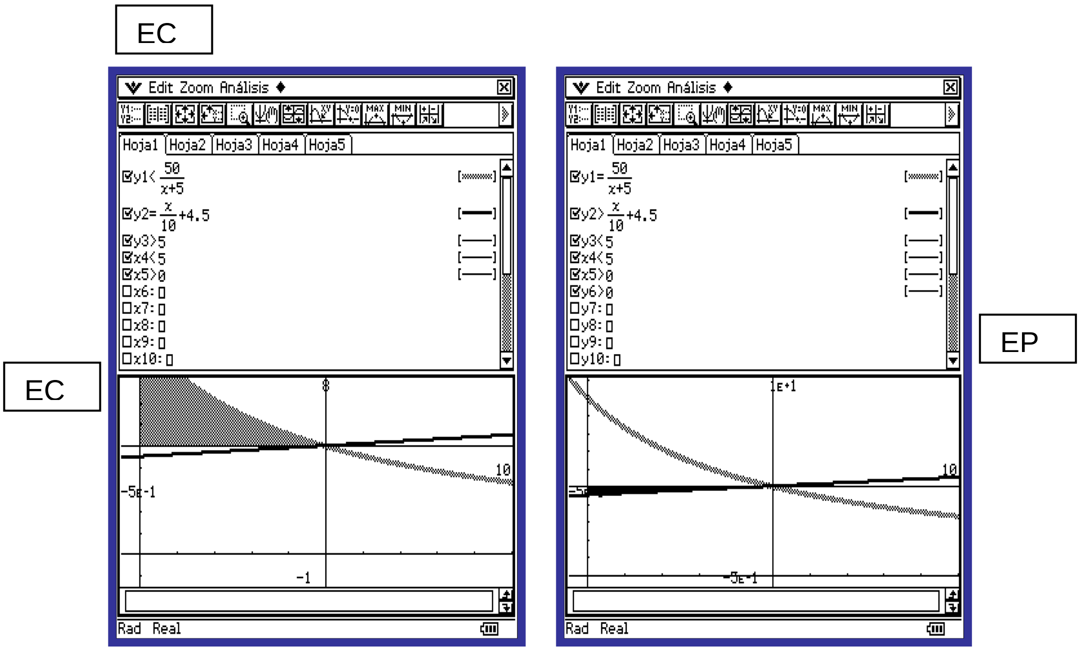


Figura 13

Actividad 3

Como se ha visto anteriormente, otra aplicación de la integral definida es el cálculo del área de concentración de la riqueza, así como del índice de Gini.

En este caso el alumno debe, en primer lugar, representar la curva de Lorenz, así como la línea de perfecta equidad. Para ello puede hacer uso de una banda de gráfico.

A continuación, para poder representar él área de concentración de la riqueza, hacemos la intersección de las regiones que determinan ambas curvas, obteniendo la región que mostramos en el siguiente gráfico, para lo que previamente habrá que haberlas definido (Figuras 14 y 15).

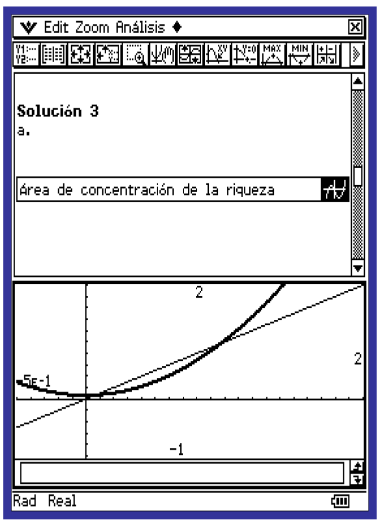


Figura 14

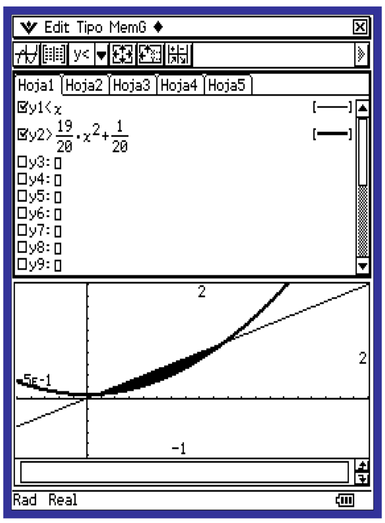


Figura 15

Por último, en la figura 16 se muestra el cálculo del índice de Gini y la interpretación del resultado obtenido:

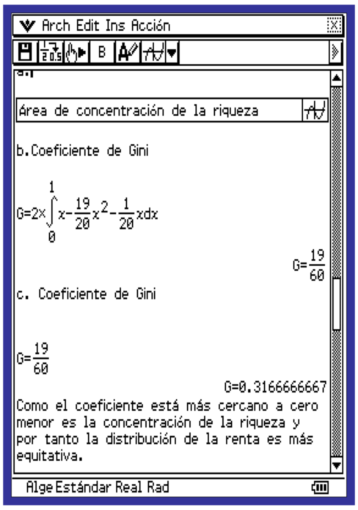


Figura 16

Una vez que el alumno finaliza el desarrollo de los contenidos y ejercicios propuestos, así como la realización de los mismos, debe elaborar el documento (en el procesador de textos) donde se recogerán todas las pantallas necesarias para ver cómo se han ido aplicando las distintas herramientas de la calculadora. Una vez finalizado se evaluará dicho trabajo mediante unas pautas que se indican en el epígrafe siguiente.

6. La evaluación del alumnado

Para la evaluación de la actividad realizada por el alumno se tendrán en cuenta:

- La rigurosidad con la que se hayan tratado los conceptos propuestos en la elaboración del documento (20%).
- Uso de la calculadora para el desarrollo de los conceptos (30%).
- Número y calidad de las actividades propuestas (20%).
- Resolución de las mismas con la calculadora (30%).

Se valorará positivamente a aquellos alumnos que deseen hacer una presentación de su e-activity mediante la aplicación de la herramienta de presentaciones de la calculadora.

Bibliografía

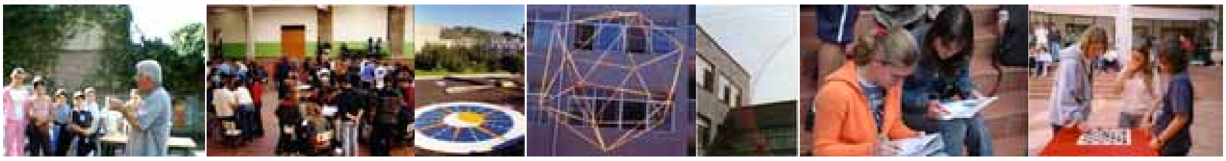
Arya, J.C.; Lardner, R.W. (2002). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. Pearson Educación, México.

Haeussler, F., Ernest, JR. (2003). *Matemáticas para la Administración y Economia*. Pearson Educación. Décima edición, México.

Concepción Paralera Morales. Ana Mª Martín Caraballo. Licenciadas en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, Doctoras por la Universidad Pablo de Olavide (Doctorado en Administración y Dirección de Empresas) y profesoras en la Universidad Pablo de Olavide. cparmor@upo.es , ammarcar@upo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 150-156
ISSN: 1815-0640



Aplicación de Juegos Lógicos en Juventud Salesiana

Iván Roberth Rojas Marticorena.

Resumen

En La Institución Educativa Salesiano “Santa Rosa” de La Ciudad de Huancayo, (Junín - Perú) venimos celebrando todos los años en el mes de agosto como preámbulo al día central de nuestra patrona Santa Rosa el evento “Juventud Salesiana” con diversas actividades que desarrollamos a lo largo del mes sin tener que interrumpir las clases. El Área Matemática pondrá en escena “***La aplicación de juegos lógicos en Juventud Salesiana 2008*”**. Las actividades que propusimos consistieron en evaluaciones por equipos e individuales, a la vez se dieron juegos lógicos orientados a los números naturales, geometría, las cuatro operaciones y habilidades operativas que permitieran saber y conocer. Se tuvieron en cuenta cuatro categorías: nivel básico (7 a 9 años), nivel intermedio (10 a 12 años), nivel medio (13 y 14 años) y nivel avanzado (15 y 16 años).
Es un proyecto de innovación que puede servir de inspiración para otros similares que, obviamente, en cada caso se adaptarán al nivel de conocimientos del grupo de estudiantes al que va dirigido. Resultó una entretenida actividad.

Abstract

Silesian school in Santa Rosa ", The city of Huancayo, (Junín - Perú) been held every year in the month of August as a prelude to the central day of our patron saint Santa Rosa event" Youth Salesiana "with various activities developed throughout the month without having to interrupt classes. The Area - Mathematics will stage games Implementation of logical Salesian Youth 2008 -. The proposed activities consist of evaluations by teams and individual at once logical games were targeted at the natural numbers, geometry, the four operations and operational skills and knowledge to enable. In which he had four categories: basic (7 - 9 years), intermediate (10 - 12 years), middle (13 - 14 years) and advanced (15 - 16 years).
Innovation is a project that can serve as an inspiration for others like that, obviously, in each case adapted to the level of knowledge of the group of students who are targeted. Was a fun activity.

Resumo

Na instituição Educativa Salesiana “Santa Rosa” da Cidade de Huancayo, (Junín – Peru) celebramos todos os anos no mês de agosto como preâmbulo ao dia central da nossa patrona Santa Rosa o evento “Juventude Salesiana” com diversas atividades que desenvolvemos durante o mês sem ter que interromper as aulas. A Área Matemática colocará em cena - **A aplicação de jogos lógicos na Juventude Salesiana 2008**-. As atividades que propusemos consistiram em avaliações por equipes e individuais conjuntamente se deram jogos lógicos orientados aos números naturais, geometria, as quatro operações e habilidades operativas que permitiram saber e conhecer. Na qual se teve quatro categorias: nível básico (7 – 9 anos), nível intermediário (10 – 12 anos), nível médio (13 – 14 anos) e nível avançado (15 – 16 anos).

É um projeto de inovação que pode servir de inspiração para outras similares que, obviamente, em cada caso se adaptarão ao nível de conhecimentos do grupo de estudantes ao qual vai dirigida.

Introducción

En este trabajo se presentan y analizan cuatro juegos: “***construir puentes***”, “***circuitos numéricos***”, “***sudoku >,<***” y “***kenken***” desde un punto de vista matemático. Remarcando así una parte lúdica de las matemáticas, la teoría de juegos. La enseñanza de la matemática sigue siendo un valioso tema de investigación, en la medida que podamos conocer o descubrir nuevas estrategias para lograr en los estudiantes un mejor aprendizaje. Por ello proponemos la utilización de juegos lógicos como estrategia para la enseñanza de la matemática en los tres niveles de educación del Colegio Salesiano “Santa Rosa”.

Marco teórico

Reconocer los beneficios de considerar la matemática como un gran y sofisticado juego en las actividades de esta asignatura, experimentar situaciones didácticas (juegos) en el aula de clase promueve el desarrollo de la creatividad y del pensamiento lateral.

La experiencia directa tiene la virtud de motivar y ejercitar los sentidos pues interviene la vista, el oído, el tacto, estímulos, sensaciones y reacciones que el alumno puede practicar como observar, tocar, ordenar, clasificar, plasmar, etc. Es sabido que el juego es la forma natural en que nuestros educandos adquieren conocimientos, habilidades, destrezas, hábitos y actitudes.

Por lo tanto la actividad lúdica constituye una vía muy efectiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el desarrollo humano. No debemos considerarlo como una mera recreación sin sentido, al contrario, lo que no debemos es dejar de incorporarlo a nuestra práctica pedagógica permanente.

Este proyecto pretende contribuir a:

- Incrementar la cultura matemática.
- Crear un clima lúdico de aprendizaje de las Matemáticas.
- Generar actitudes positivas hacia esta ciencia.
- La atención a la diversidad.

Con todo ello queremos llevar a cabo nuestros principios pedagógicos:

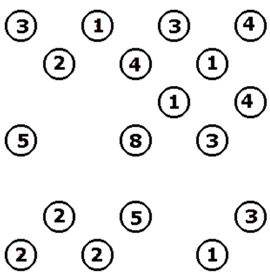
- El aprendizaje y la enseñanza es un viaje y el maestro sólo es el guía.
- Las Matemáticas se enseñan en un lugar, en un tiempo y en ciertas condiciones que hay que tener en cuenta.
- La enseñanza de las Matemáticas debe ser adecuada y partir de la experimentación.
- Las Matemáticas deben (o deberían) provocar sentimientos positivos.
- Enseñar Matemáticas es compartir un trabajo abierto y una inquietud por descubrir.

Aplicación de los Juegos

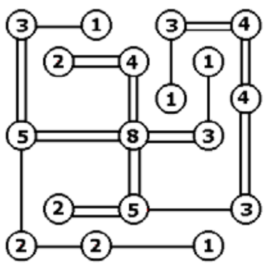
a) Construir puentes

La tarea consiste en conectar cada isla por medio de puentes horizontales o verticales, tomando en cuenta las siguientes reglas:

1. El número de puentes conectados a una isla es igual al número que aparece en ésta.
2. Como máximo puede haber dos puentes entre dos islas.
3. Los puentes no pueden atravesar otras islas o puentes.
4. Al final se debe tener un camino continuo que unirá todas las islas.



Puentes 7×7



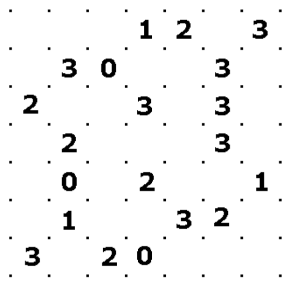
Puentes resuelto

b) Circuito numérico

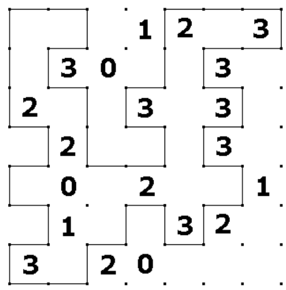
El objetivo es unir puntos a través de líneas horizontales o verticales de modo tal que se forme un único circuito cerrado, esto respetando las reglas que se dan a continuación:

1. Cada número indica la cantidad de líneas que lo deben rodear. Las casillas vacías pueden estar rodeadas por un número arbitrario de éstas.

2. Las líneas no pueden cruzarse ni formar ramas separadas.



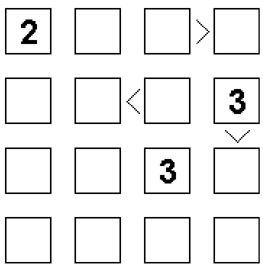
Circuito numérico 8×8



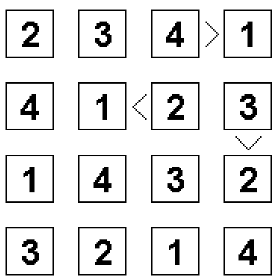
Circuito numérico resuelto

c) Sudoku <,>

El objetivo es rellenar la cuadrícula a fin de que cada fila y cada columna contengan los dígitos del 1 al 4, sin repetirse. Los números deben estar ubicados según el signo mayor que (>) y/o menor que (<) que se indica entre algunas casillas.



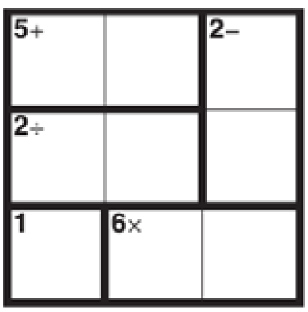
Sudoku >,< 4x4



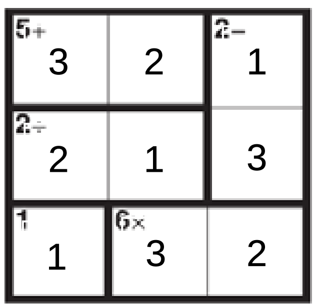
Sudoku >,< 4x4 resuelto

d) Kenken

El objetivo es rellenar la cuadrícula a fin de que cada fila y cada columna contengan los dígitos del 1 al 3, sin repetirse. Los números deben estar ubicados según la operación y el resultado presentados en cada sector.



Kenken 3x3



Kenken 3x3 resuelto

Metodología empleada

Este trabajo se fundamenta en la elaboración, aplicación y evaluación de juegos lógicos sistematizados, a la vez, en la interpretación de los mismos. Las reflexiones tienen como referencia básica la experiencia de los juegos lógicos en juventud en la I.E.P. Salesiano "Santa Rosa", ubicada en la ciudad de Huancayo. Se presentan a continuación algunos activadores que fueron tenidos en cuenta:

1. Actitud ante los problemas:

- Lograr que los problemas a los que se enfrenta el alumno tengan sentido para él;
- Motivar a los alumnos a que usen su potencial creativo;
- Estimular su curiosidad e invitarlos a analizar los problemas desde diferentes perspectivas, así como redefinirlos de una manera más adecuada.

2. La forma de utilizar la información:

- Estimular la participación de los alumnos a descubrir nuevas relaciones entre los problemas y las situaciones planteadas;
- Evaluar las consecuencias de sus acciones y las ideas de otros, así como presentar una actitud abierta en relación con dichas ideas y propiciar la búsqueda y detección de los factores clave de un problema.

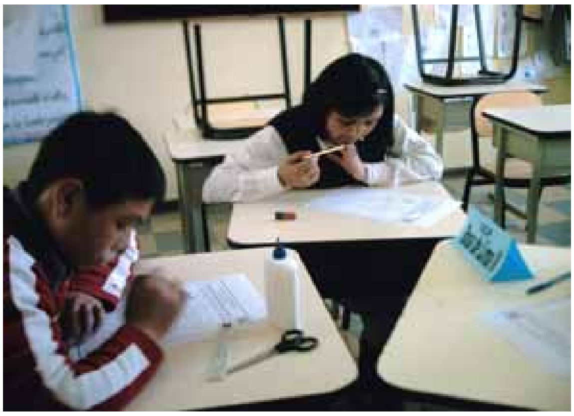
3. Uso de materiales:

- Usar apoyos y materiales novedosos, esto con el fin de estimular el interés en los alumnos.

4. Clima de trabajo:

- Generar un clima sereno, amistoso y relajado en el aula.

Desarrollo de Juventud, algunos ejemplos y análisis de los resultados



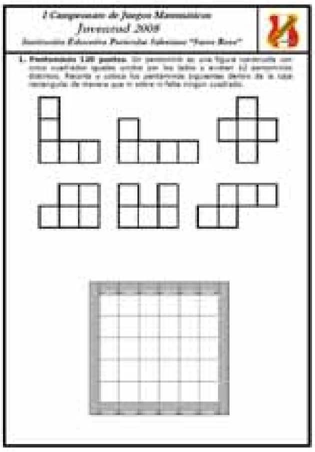


Figura 1. Competencia de juegos por equipos.

Figura 2. Competencia de juegos individuales.

SALESIANO
"SANTA ROSA"

Juegos Matemáticos Salesiano

Construir Puentes **ÁREA LÓGICO MATEMÁTICA**
NIVEL: 1º PRIMARIA
TALLER DE JUEGOS LÓGICOS **Juego nº 01**

Temporalización 4 semanas

CONTENIDOS	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO	EVALUACIÓN
<u>Procedimientos</u> - Calculo mental - Uso de memoria - Búsqueda de estrategia <u>Hechos/conceptuales</u> - Números naturales del 1 al 9 - Noción de adición, sustracción. <u>Actitudes/valores</u> - Recreación, mediante el uso de elementos lúdicos que comparten un trabajo matemático. - Colaboración en la organización del juego. - Gusto por ser riguroso. - Atención simultánea al propio y al juego de los demás.	- Ser capaz de identificar las ubicaciones de las cifras. - Ser capaz de memorizar. - Ser capaz de utilizar estrategias para dibujar las líneas correctas. - Ser capaz de colaborar con los compañeros para resolver los posibles conflictos y realizar las tareas conjuntamente. - Ser capaz de atenerse a las reglas de juego.	- Sesión 1 —— - Sesión 2 —— - Sesión 3 —— - Sesión 4 —— Ver contenido sesiones en: secuencia de actividades para cada sesión.	10 min. 45 min. 30 min. 30 min. 45 min. 10 min.	- Observación directa y conversación. - Tabla de observación y conversación al inicio. - Tabla de observación y conversación al final de conclusión. - Control de cálculo.
MATERIALES: Hojas instructivas	**ORIENTACIONES:** En la primera sesión, al presentar el juego hacer referencia a los otros juegos de memoria que ya conocen. Conversación inicial. Tema ¿qué podrás aprender de este juego?			

Lic Ivan Rojas Marticorena

Figura 3. Malla del juego a aplicarse.

A modo de reflexión podemos decir que la aplicación de los juegos lógicos en juventud salesiana se orientó al cambio rutinario de concursos convencionales que se ven en nuestros medios, ya que estos últimos no conducen al desarrollo de capacidades (destrezas y/o habilidades). Nuestra proyección es aplicar juegos lógicos en el aula en las relaciones de enseñanza–investigación, y también en los criterios de validación de resultados una vez aplicados los mismos.

Bibliografía

Alem, J.P. (1984). *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial Gedisa. Barcelona, España.
Brandreth, Gyles. (1989). *Juegos con números*. Editorial Gedisa. Barcelona, España.
Rodríguez Vidal, Rafael. (1982) "*Diversiones matemáticas*". Editorial Reverté. Barcelona, España.
Gardner, Martin. (1989) *Juegos Matemáticos*. Editorial Selector S.A. México.
www.Puzzlesport.nl
www.akiloyunlari.com

Ivan Roberth Rojas Marticorena. Director de La Revista de Educación Matemática Phi. Licenciado en Educación. Actualmente Profesor de la I.E.P. Salesiano "Santa Rosa", Huancayo-Perú. Ha publicado artículos en diferentes revistas de educación matemática y trabajos de investigación en educación. Líneas de investigación: pensamiento lógico, numérico, juegos matemáticos y lógicos.
E-mail: **irojasm5@hotmail.com**, **ivanrojasmarticorena@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 157-161
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

¿Programación lineal en primaria?

Problema

$$\text{Minimizar } (n+m+p+q+r)$$

sujeto a:

$$n+3m+5p+7q+9r=24$$

$$n,\ m,\ p,\ q,\ r \in \{0,1,2,3\}$$

Este problema tiene su origen en la creación de problemas de optimización para estudiantes de educación básica, con el propósito de estimular la "intuición optimizadora"[1]. Como en el Perú se considera un capítulo de introducción a la programación lineal en el quinto año de secundaria y en los textos y en las clases correspondientes el énfasis no está precisamente en lo intuitivo sino más bien en lo algorítmico, insistiéndose en los métodos gráficos, a los cuales el estudiante puede mecanizarse sin tomar conciencia del verdadero significado de máximo o de mínimo en el contexto del problema, se me ocurrió crear un problema cuya solución no sea posible usando los métodos gráficos de dibujar la región convexa correspondiente a las restricciones y de hallar el valor numérico de la función objetivo en los vértices de tal región. Sabiendo que este recurso funciona a lo más con tres variables, pensé en un problema con cinco variables. Así surgió este, que con un texto adecuado correspondiente a este planteamiento formal, puede ser resuelto aún por niños de segundo grado de primaria, como lo demuestran las experiencias didácticas realizadas en España y en Perú, luego de un valioso enriquecimiento de ideas y propuestas, en el marco de la transposición didáctica, las situaciones didácticas y la ingeniería didáctica, que ha dado lugar a una comunicación en el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), en coautoría con E. Lacasta, M. R. Wilhelmi y J. Pascual [2]. En tal trabajo, el objetivo de la situación que se diseña es doble: "por un lado, la intervención razonada en los sistemas didácticos; por otra parte, producir conocimiento sobre la forma en la que se construyen y comunican problemas de optimización relativos a la medida, en edad infantil".

---

[1] Sobre la existencia de la intuición optimizadora puede revisarse Malaspina y Font (2009) Optimizing intuition, en Proceedings of PME 33, vol 4, 81-86 y en Malaspina (2009) Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú.

[2] Lacasta E., Malaspina U., Pascual J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis *a priori* de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educción Matemática XIII*. (pp. 247–258). Santander: SEIEM.

Ideas iniciales y conjetura didáctica

Estas ideas fueron expuestas en el IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas que tuvo lugar en febrero del 2009.[3] El texto inicial correspondiente a la presentación formalizada hecha al inicio de este artículo, fue el siguiente:

> *Expresar el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto* $\{1,3,5,7,9\}$. *Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

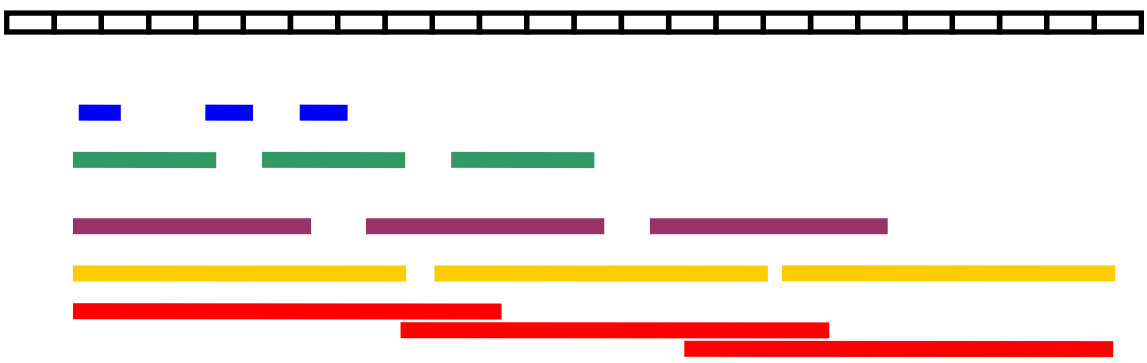
Observemos que el número de veces que se emplee cada sumando está dado por los valores que pueden asumir las variables m, n, p, q, r. Ciertamente, podría no usarse alguno de los sumandos, y eso está considerado al ser cero uno de los posibles valores de estas variables.

Reflexionando a partir de este texto, conjeturé que con una adecuada presentación lúdica el problema podría ser resuelto no solo por estudiantes de secundaria sino también por niños de primaria.

Así, pensé en el siguiente material didáctico:

- un “camino rectilíneo” de 24 unidades de longitud.
- palitos de colores diferentes, siendo cada color de un número determinado de unidades: 1, 3, 5, 7 ó 9 (La unidad de medida para los palitos y para el camino debe ser la misma)

  De cada color debe tenerse tres palitos.



Y en la siguiente actividad:

> *Construye un camino del mismo tamaño que el camino que tienes, poniendo los palitos uno a continuación de otro y sin sobreponerlos.*

[3] Malaspina, U. (2009). Problemas de Optimización en la Educación Básica: Reflexiones y Propuestas. En Gaita, C. (Editora). *Actas IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. (pp. 45-59). Lima: Departamento de Ciencias-Maestría en la Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Con las siguientes preguntas, para responderlas gradualmente, en trabajos individuales y luego grupales:

1. *¿Cuántos palitos usaste?*
2. *¿Cuál es el menor número de palitos que puedes usar?*
3. *¿Cuál es el mayor número de palitos que puedes usar?*
4. *¿Puedes construir el camino con sólo 5 palitos?*

Observemos que los sumandos de 24 ahora son palitos concretos y que la restricción $n, m, p, q, r \in \{0,1,2,3\}$ está dada en la disponibilidad de los palitos (a lo más tres de cada tamaño). La pregunta 2 corresponde al problema original.

Transposición didáctica

La presencia de Miguel R. Wilhelmi en la conferencia y el interés que despertó en él el problema propuesto con la conjetura didáctica, llevó a hacer un análisis más sistemático de lo expuesto, en el marco de la transposición didáctica y de la ingeniería didáctica. Así, luego de trabajos conjuntos con Eduardo Lacasta, Miguel R. Wilhelmi y José Pascual, de la Universidad Pública de Navarra, se obtuvo el artículo mencionado en la nota 2, que fue presentado, aceptado y expuesto en el XIII Simposio de la SEIEM, realizado del 10 al 12 de septiembre del 2009. En él se presentan cinco situaciones problemáticas en el marco de una pequeña historia de la celebración de una boda preparada con anticipación, por lo cual se debe cubrir con lonas la gran alfombra de ingreso de los novios, de modo que no se superpongan y que no cubran más de la superficie exacta de la alfombra. Se reparte material didáctico correspondiente a la alfombra y a las lonas (la alfombra es como el camino y las lonas son como los palitos considerados en la conjetura didáctica) y – una a una – se les pide a los niños que en grupos formados con a lo más cuatro integrantes, resuelvan las siguientes situaciones:

- *Situación 1:* Cubrir la alfombra
  (Sin indicación alguna acerca del número de lonas que usen).
- *Situación 2*: Cubrir la alfombra usando solo 6 lonas.
- *Situación 3*: Pedir por escrito 6 lonas para cubrir la alfombra.
  (En este caso los niños solo disponen de una lona de cada color /tamaño y deben arreglárselas para saber con cuales 6 lonas pueden cubrir la alfombra.)
- *Situación 4*: Cubrir la alfombra con el menor número posible de lonas.
- *Situación 5*: Cubrir la alfombra con el coste mínimo.
  (Para esta situación, se les entrega material similar al que han venido usando, pero cada color/tamaño de lona tiene un precio. Cuanto más largas, más caras.)

Observemos que la situación 4 es la que corresponde al problema original.

En términos generales, prácticamente todos los grupos de niños de segundo de primaria con los que se ha hecho la experiencia didáctica, tanto en España como en Perú, resuelven todas las situaciones presentadas. Con la quinta es con la que más dificultades tienen, pero hay grupos que muy rápidamente llegan a la solución óptima.

Es muy interesante observar cómo más del 50% de los grupos resuelve la primera situación usando espontáneamente el mínimo número de alfombras. Este es un hecho, que – personalmente – considero abona a favor de mi conjetura de existencia de la intuición optimizadora. Cabe mencionar también que quedé muy gratamente sorprendido al ver cómo niños entre 7 y 8 años de edad resuelven la quinta situación problemática, que yo no consideré en mi propuesta inicial. (Considero que también éste es un valioso mensaje sobre la intuición optimizadora.)

Evidentemente, las experiencias didácticas fueron muy valiosas y tenemos el propósito de continuar con el análisis a posteriori y las consiguientes propuestas y reflexiones.

Soluciones formales

Terminaré este artículo mostrando dos soluciones formales al problema original y usando el texto propuesto en las ideas iniciales:

> *Expresar el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto* $\{1,3,5,7,9\}$*. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

Ciertamente es importante que estas soluciones las conozcan los profesores y nos hacen ver que el problema es también aplicable a jóvenes de secundaria, aun sin su contexto lúdico.

Solución 1.[4]

- Como se trata de minimizar el número de sumandos, es natural usar más los sumandos mayores. Las mayores aproximaciones a 24 (por defecto) las obtenemos con dos veces 9 y con tres veces 7.
  - Usando dos veces 9 es imposible obtener 24 con un solo sumando adicional, pues 18 es par y los posibles sumandos son todos impares;
  - Usando tres veces 7, se obtendrá 24 usando por lo menos un sumando más.
- Este análisis ya nos dice que el menor número de sumandos de 24 tiene que ser **mayor que 3.**

  En el lenguaje usual de la programación lineal, la función objetivo en este problema es $f(n,m,p,q,r)=m+n+p+q+r$. Así, afirmamos que el valor óptimo de la función objetivo tiene que ser mayor que 3.
- Como no es posible usar tres veces 9, porque ya se tendría 27, se usa sólo dos veces ($r=2$). Las seis unidades que faltan (24 – (9 + 9)) se pueden completar de dos maneras:

[4] Observemos que el número de sumandos de 24, escogidos del conjunto $\{1,3,5,7,9\}$, es el número de palitos (o de lonas) en los contextos lúdicos propuestos.

  - Usando dos veces 3 ($m = 2$), ó
  - Usando una vez 5 y una vez 1 ($p = 1$ y $n = 1$).

- De este modo se tiene
  - En el primer caso: $n = 0,\ m = 2,\ p = 0,\ q = 0,\ r = 2$, con lo cual el valor de la función objetivo es 4.
  - En el segundo caso: $n = 1,\ m = 0,\ p = 1,\ q = 0,\ r = 2$, con lo cual el valor de la función objetivo es 4.
- Con las restricciones impuestas en el problema, la función objetivo tomará sólo valores enteros no negativos y es imposible que obtenga los valores 0, 1, 2 y 3. Como se acaba de mostrar que el valor 4 es obtenible, **el valor mínimo (óptimo) de la función objetivo es 4.**

Esta solución formaliza en cierto modo muchas reacciones naturales para responder la pregunta 2 hecha en el apartado de las ideas iniciales y la conjetura didáctica, y para la situación 4 propuesta en el apartado de la transposición didáctica.

<u>Solución 2</u>

Recordemos que $n + 3m + 5p + 7q + 9r = 24$.

- ($n + m + p + q + r$) tiene que ser par.
  (Basta observar que: $n + m + p + q + r = 24 - 2m - 4p - 6q - 8r$ es par.)
- ¿ $n + m + p + q + r = 0$?
  No es posible, pues esto significa que $n = m = p = q = r = 0$; es decir, cada sumando cero veces, y así es imposible obtener 24
- ¿ $n + m + p + q + r = 2$?
  No es posible, pues tendría que usarse sólo un sumando dos veces o sólo dos sumandos, una vez cada uno. Así a lo más se conseguiría:
  - Que $n + 3m + 5p + 7q + 9r = 18$, con $n = m = p = q = r = 0$ y $r = 2$ ó
  - Que $n + 3m + 5p + 7q + 9r = 16$, con $q = r = 1$ y $n = m = p = 0$.
- ¿ $n + m + p + q + r = 4$?
  Sí es posible, pues, por ejemplo:
  $n = 1,\quad m = 0,\quad p = 1,\quad q = 0,\quad r = 2$, implica que $n + 3m + 5p + 7q + 9r = 24$.
- En consecuencia, el **mínimo valor** de ($n + m + p + q + r$) es **4**, pues es el menor valor par obtenible por $n + m + p + q + r$, con las restricciones dadas en el problema.

Con esta solución se responde también a la pregunta 4, formulada en el apartado de las ideas iniciales y la conjetura didáctica: es imposible obtener 24 con un número impar de sumandos escogidos del conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 162-166
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

RELACIÓN PARA “CALC”

Javier Fernández López

Resumen

Son muchas las posibilidades que hoy en día nos da una hoja de cálculo. Como herramienta libre y gratuita, que además viene por defecto en la última versión de Guadalinex; vamos a utilizar Calc, de la suite ofimática Openoffice.

Abstract

There are many possibilities that today gives us a worksheet. As a free tool that also comes by default in the latest version of Guadalinex; Let's use Calc, of the suite OpenOffice.

Resumo

São muitas as possibilidades que hoje em dia nos dá uma folha de cálculo. Como ferramenta livre e gratuita, que ademais vem por defeito na última versão de Guadalinex; vamos utilizar Calc, da suite ofimática Openoffice.

Introducción

En este caso, vamos a hacer un simulador de un lanzador de dados con el fin de mostrar a los alumnos que son ciertas las leyes de los grandes números, esto es, que cuando el número de tiradas es muy alto, se cumplen exactamente las probabilidades previstas.

Esto nos ayuda a que el alumnado vea que la teoría y la práctica coinciden realmente, puesto que en un número de tiradas bajo, parece que ambas se contradicen.

Ejercicio 1

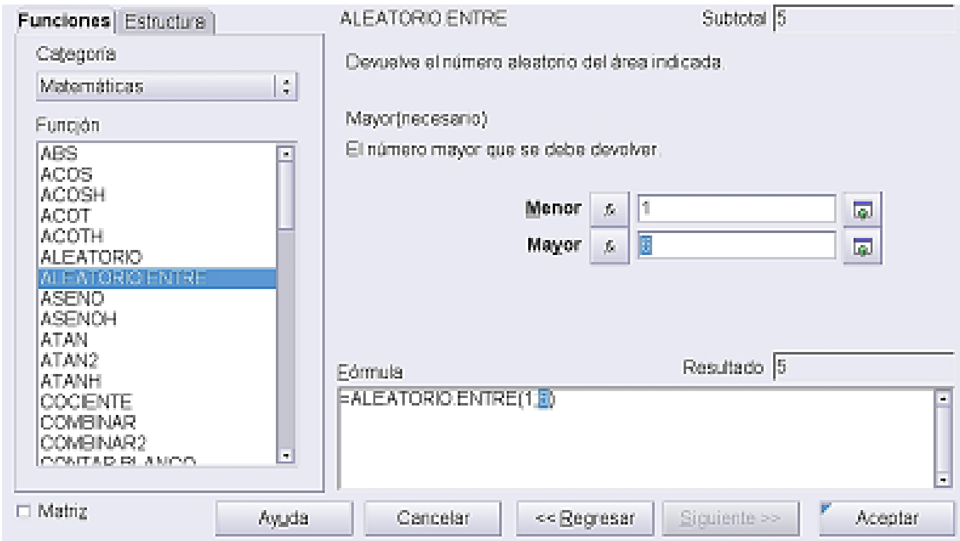
Realiza en Calc un simulador de lanzador de dados y comprueba que conforme aumentamos el número de tiradas, la probabilidad de cada uno de los sucesos se acerca al valor $\frac{1}{6}$.

Solución

Abrimos Calc. Para generar el simulador de un lanzador de dados vamos a utilizar una función que situaremos por comodidad en la casilla A1. Pinchamos entonces en A1, y le damos a *Insertar/Función*, o bien le damos a Control+F2.

Dentro de la categoría de *Matemáticas*, elegimos la opción *ALEATORIO.ENTRE*; que será la que nos haga las veces de dado. En la siguiente ventana, introducimos los valores mínimo y máximo que queremos tener en la generación de datos, por lo que insertaremos los números 1 y 6, para que así consigamos, efectivamente, que sea un dado. Cuando hacemos esto, Calc ya nos genera el primer resultado.

Sólo nos queda aceptar y tendremos nuestro simulador de dados generado.



Ahora tenemos un simulador de dado en la casilla A1. Para tener más de uno basta con seleccionar la celda A1, y pinchar sin soltar sobre la esquina inferior derecha de la celda, y bajar el ratón hasta el número de casilla en las que queremos generar más simuladores de dados.

Para el primer cálculo vamos a hacer 50 simuladores de dados, y vamos a realizar el estudio.

En la celda C4 escribiremos x_i para insertar los posibles sucesos elementales del experimento aleatorio: 1, 2, 3, 4, 5 y 6; en las filas inferiores.

En la celda D4 escribiremos n_i que será la columna de las frecuencias absolutas. Para calcularla vamos a introducir una función que calcule para cada suceso elemental. el número de veces que se repite entre las 50 tiradas.

Seleccionamos la celda D5, y elegimos *Insertar/Función*. Dentro de la categoría de *Matemáticas*, debemos elegir *CONTAR.SI*.

Los argumentos de esta función son, por una parte, las celdas que van desde A1 hasta A50, y por otra, el criterio debe ser C5. Para cada suceso elemental debemos definir la misma función de manera que los argumentos también van desde A1 hasta A50, mientras que el criterio si cambia siendo la casilla donde está situado el suceso elemental.

Las funciones correspondientes a cada suceso elemental: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente son las siguientes:

=CONTAR.SI(A1:A50;C5)

=CONTAR.SI(A1:A50;C6)

=CONTAR.SI(A1:A50;C7)

=CONTAR.SI(A1:A50;C8)

=CONTAR.SI(A1:A50;C9)

=CONTAR.SI(A1:A50;C10)

En la casilla D11, situaremos la suma de las frecuencias absolutas, que por supuesto deben ser 50. La función para este cálculo es *SUMA*.

En la columna E situaremos las frecuencia relativas. En E4, escribiremos f_i. En las casillas inferiores insertaremos para cada suceso elemental la función que calcula el cociente entre la frecuencia absoluta de cada suceso elemental y el número de tiradas realizadas.

La función para E5 es:

=D5/D11

Por último en la columna F, con el título en F4 de p_i, insertaremos la frecuencia relativa de cada suceso elemental, pero en forma de fracción. Para ello basta con copiar el dato de la columna E en la columna F, y cambiar las propiedades de las celdas. Esto último se hace, seleccionando las 6 celdas, eligiendo *Formato/Celdas*. En la pestaña de *Números*, pinchamos en *fracción* dentro del apartado *Categorí.*

Para mejorarlo estéticamente cambiamos el color de fondo de los títulos y bordeamos la tabla de frecuencias y probabilidades. El resultado final es:

x_i	n_i	f_i	p_i
1	3	0,06	1/9
2	4	0,08	1/9
3	11	0,22	2/9
4	10	0,2	1/5
5	9	0,18	1/6
6	13	0,26	1/4
	50	1	1

Como vemos la probabilidad de que salga 3 es el doble de la probabilidad de que salga 2.

Aumentamos ahora el número de tiradas. Para ello extendemos hasta la casilla A100, la función simuladores de lanzamiento de dados.

Copiamos la tabla anterior, y la pegamos situando x_i, en la casilla C13. Rectificamos los datos de la tabla.

Concretamente, tenemos que rectificar varias cosas, a saber:

- Cada A50 por A100.
- A cada número de los que salen en las funciones del resto de celdas hay que sumarle 9, o sea, de C5 a C14; de D5/D11 a D14/D20, etc.

x_i	n_i	f_i	p_i
1	11	0,11	1/9
2	16	0,16	1/6
3	16	0,16	1/6
4	18	0,18	1/6
5	18	0,18	1/6
6	21	0,21	1/5
	100	1	1

Ahora podemos observar que el resultado nos acerca la probabilidad de algunos sucesos elementales a lo que debería ser, o sea, $\frac{1}{6}$. De cualquier manera, aún tenemos algún suceso elemental, como es en este caso el 1, cuya probabilidad es muy baja.

Vamos a aumentar el número de tiradas a 200. Realizando el mismo proceso, extender hasta la casilla A200 el simulador; pegando la tabla con x_i en la celda C22; cambiando el A100 por el A200, y sumando a cada número restante de las funciones de las celdas 9 unidades, obtendremos la siguiente tabla:

x_i	n_i	f_i	p_i
1	19	0,1	1/9
2	39	0,2	1/5
3	37	0,19	1/5
4	31	0,16	1/6
5	34	0,17	1/6
6	40	0,2	1/5
	200	1	1

Como resultado, podemos comprobar que las probabilidades vuelven a ser parecidas. Aumentamos ahora las tiradas a 1000.

Realizamos los mismos cambios, y obtenemos la siguiente tabla:

x_i	n_i	f_i	p_i
1	161	0,16	1/6
2	161	0,16	1/6
3	166	0,17	1/6
4	171	0,17	1/6
5	184	0,18	1/5
6	157	0,16	1/6
	1000	1	1

En esta última tabla apreciamos que la probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{6}$, excepto en el caso del suceso elemental 4, que está bastante cerca pero que no tiene dicho valor.

Esto nos dice que si hacemos un número muy grande de tiradas de un dado, $\frac{1}{6}$ de veces va a salir 1, $\frac{1}{6}$ de veces va a salir 2, $\frac{1}{6}$ de veces va a salir 3, $\frac{1}{6}$ de veces a salir 4, $\frac{1}{6}$ de veces saldrá 5, y por último $\frac{1}{6}$ de veces también saldrá el número 6. Esto es lo que nos dice la probabilidad, y como hemos visto, efectivamente, es cierto. Es decir, la teoría se cumple en la práctica.

Ejercicio 2

Diseña en Calc un simulador de lanzador de monedas. Utiliza un 1 para cuando salga cara y un 2 para cuando salga cruz.

Javier Fernández López, Licenciado en Matemáticas y docente desde 1995. Actualmente esta en IES Río Aguas de Sorbas, en el cual tiene el cargo de Jefe de Estudios. Ha estado como jefe de departamento de matemáticas varios años. Lleva utilizando las nuevas tecnologías en matemáticas hace unos cinco años. Comencé con Derive y Cabri, y poco a poco he ido utilizando software libre; actualmente utilizo: GeoGebra, wxMaxima, Calc (hoja de cálculo de Openoffice), Impress (presentador de diapositivas de Openoffice). Tiene un blog con unas 200 visitas diarias sobre TIC, principalmente GeoGebra, con picos de más de 300 visitas algunos días, la dirección es: **http://profeblog.es/blog/javierfernandez/**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas167-182
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Estudio de las Funciones Reales de una Variable Real en un Ambiente de Geometría Dinámica

Rolando García

Resumen

El concepto de función, es uno de los pocos conceptos presentes en todas las áreas de la Matemática (Geometría, Análisis, Álgebra, Estadística y Probabilidad). En consecuencia, un correcto abordaje del mismo garantiza un desenvolvimiento exitoso de los profesores en formación en cursos posteriores de la Especialidad de Matemática y, más tarde, en su desempeño profesional.

Abstract

The function concept, is one of the few present concepts in all the areas of the Mathematical one (Geometry, Analysis, Algebra, Statistic and Probability). Consequently, a correct boarding of the same guarantees a successful unfolding of the professors in formation in later courses of the Specialty of Mathematical and, later, in their professional performance.

Resumen

O conceito de função, é um dos poucos conceitos presentes em todas as áreas da Matemática (Geometría, Análise, Álgebra, Estatística e Probabilidade). Em consequência, um correcto abordaje do mesmo garante um desenvolvimiento exitoso dos professores em formação em cursos posteriores da Especialidad de Matemática e, mais tarde, em seu desempenho profissional.

Introducción

En este artículo, se presentará una secuencia didáctica en la que se pretende analizar la gráfica de una Función Real de una Variable Real construida con las herramientas que posee el software de Geometría Dinámica GeoGebra, teniendo en consideración los sistemas de representación y principios de graficación. Con el fin de alcanzar este objetivo general, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los distintos tipos de Funciones Reales de una Variable Real.
2. Identificar los distintos sistemas de representación de las Funciones Reales de una Variable Real.
3. Identificar los distintos tipos de principios de graficación.

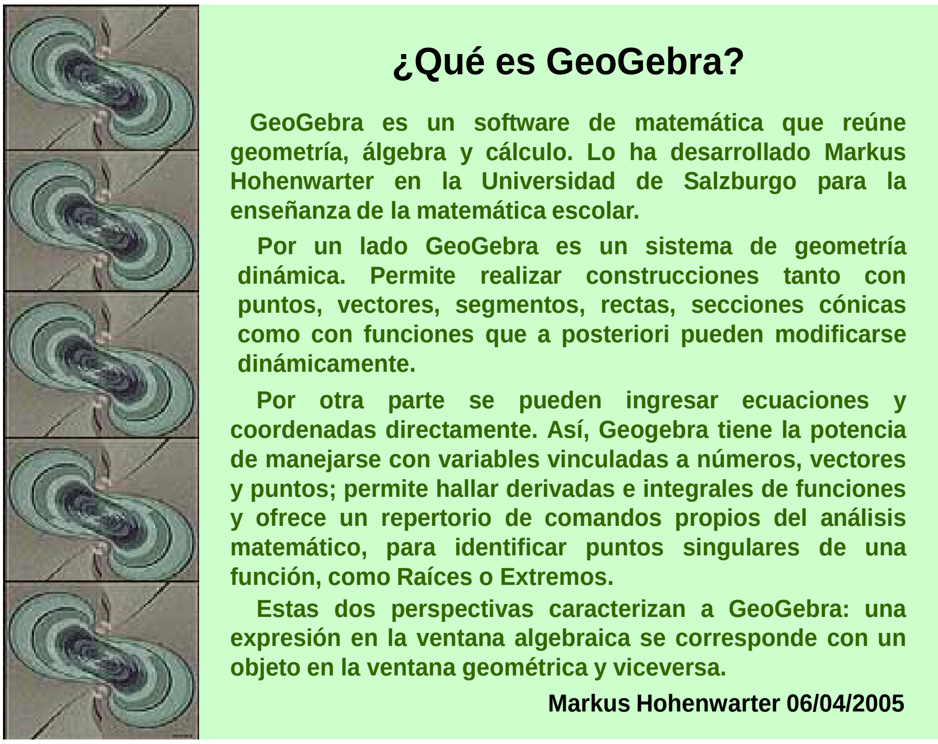
4. Construir las gráficas de las Funciones Reales de una Variable Real a través del software de Geometría Dinámica GeoGebra.
5. Determinar dominio y rango de una Función Real de una Variable Real.
6. Determinar intervalos de crecimiento o decrecimiento de una Función Real de una Variable Real.
7. Determinar máximo o mínimo de una Función Real de una Variable Real.

Esta secuencia didáctica o taller se organizó en nueve sesiones de trabajo, cada una con tres horas de duración, teniendo en consideración a las fases de aprendizaje (Información, Orientación Dirigida, Explicitación, Orientación Libre e Integración), propuestas en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Las Funciones Reales de una Variable Real abordadas en este estudio son: Afín, Cuadrática, Raíz Enésima, Definidas a Trozos, Logarítmica, Exponencial y Trigonométricas. El presente taller está dirigido a docentes en formación en el ámbito de la Educación Superior (1er Semestre). Las actividades previstas para cada una de las funciones mencionadas anteriormente se describen brevemente a continuación.

Sesión de Trabajo N^o 1

Información: En esta fase se trabajó con una presentación en PowerPoint, relacionada con el Software de Geometría Dinámica GeoGebra (Hohenwarter, 2005). A continuación se presentan algunas diapositivas sobre las características relevantes del GeoGebra y su autor Markus Hohenwarter. También, en esta sesión, es importante familiarizar a los estudiantes participantes en el manejo del software.



Markus Hohenwarter

Nació el 24 de Mayo de 1976, en Salzburgo, Austria.

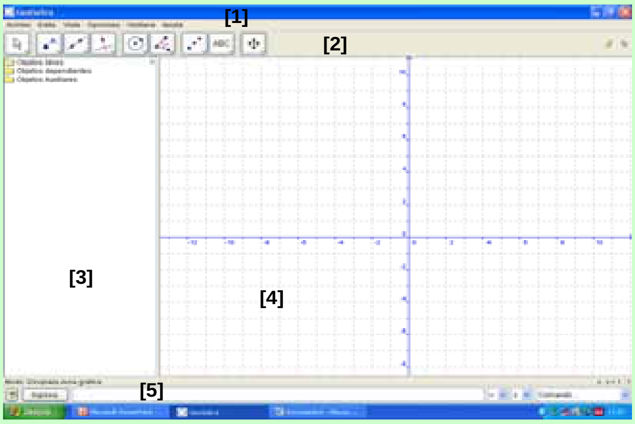
El proyecto de GeoGebra dió inicio en el 2001 en el curso de la tesis de maestría y avanzó hacia la tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria).

Marzo de 2002 obtiene el grado de Magíster en Matemáticas y Psicología en la Universidad de Salzburgo.

Junio de 2002 obtiene el grado de Magíster en Computación aplicada a la Ciencia en la Universidad de Salzburgo.

Febrero de 2006 obtiene el grado de Doctor en Educación Matemática, Summa cum Laude, Universidad de Salzburgo. Disertación: GeoGebra - Material Educativo y Aplicaciones en la Enseñanza de la Matemática

Interfaz de GeoGebra



[1] Barra de Menús

[2] Barra de Herramientas

[3] Ventana Algebraica

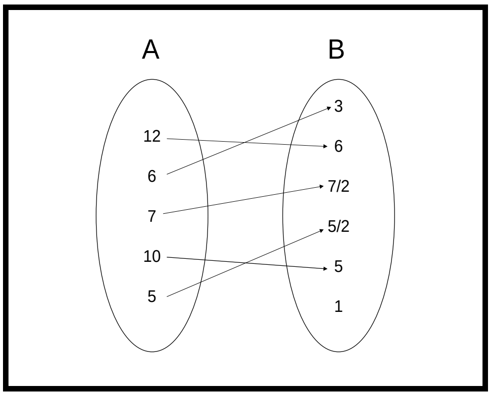
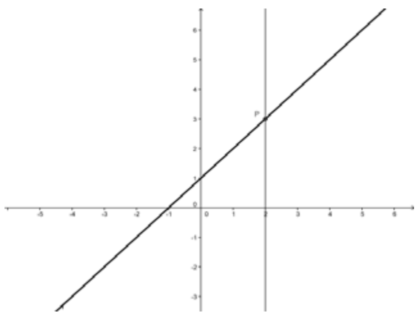
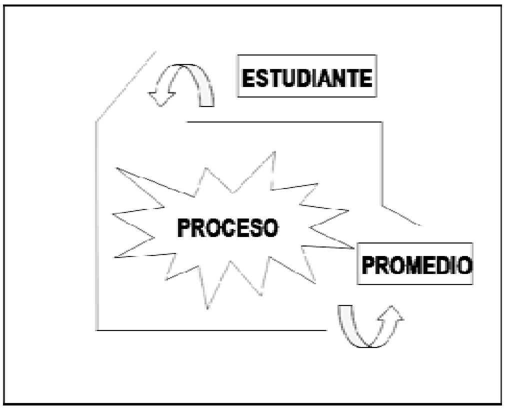
[4] Zona Gráfica

[5] Campo de Entrada de Comandos

Sesión de Trabajo N^o 2

Información: En esta fase se trabajó con una presentación en PowerPoint, relacionada con los Sistemas de Representación Geométricos (Diagramas de Venn, Gráfica, Máquina Funcional), y Algebraicos (Descriptivo, Fórmula, Par Ordenado, Regla y Tabla de Valores) de las Funciones Reales de una Variable Real propuestos por Rojas y Salazar (1985) y Escobar (1998).

Visualicemos esta clasificación a través de algunos ejemplos.

<table>
<tr><th>Sistema de Representación Geométrico</th><th>Descripción</th><th>Representación</th></tr>
<tr><td>Diagramas de Venn</td><td>Estos diagramas se usan para mostrar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes conjuntos, representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. Este tipo de representación es útil cuando los conjuntos involucrados poseen pocos elementos.</td><td>Sean los conjuntos:
$A = \{12, 6, 7, 10, 5\}$ y $B = \left\{3, 6, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 5, 1\right\}$
y la relación “es mitad de”.

</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Dada una gráfica en R^2 la misma representa una función, si al trazar una recta vertical, ésta corta a la gráfica a lo más en un punto.</td><td></td></tr>
<tr><td>Máquina Funcional</td><td>Esta consiste en una simple caja con un agujero en su parte superior llamado entrada y un agujero en la parte inferior llamado salida, la idea es introducir “objetos” y de acuerdo al tipo de proceso interno que acontece en la caja, saldrán “objetos” dependientes de los que entraron.</td><td>Consideremos una máquina funcional la cual asigna a estudiantes su promedio de calificaciones. Por ejemplo si se introduce el nombre del estudiante sale el número que representa su promedio.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Sistema de Representación Algebraico</th><th>Descripción</th><th>Representación</th></tr>
<tr><td>Descriptivo</td><td>La función se especifica utilizando el lenguaje verbal mediante una descripción de la misma.</td><td>Consideremos la función que asigna a cada elemento del conjunto de partida, el cuadrado del elemento más el doble del elemento menos cinco.</td></tr>
<tr><td>Fórmula</td><td>Se da una fórmula explícita $y = f(x)$ que define a la variable y implícitamente como función de x.</td><td>$y = 2x - 1$</td></tr>
<tr><td>Par Ordenado</td><td>Una función es la colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a,b) y (a,c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.</td><td>Sea $M = \{(1,5),(7,8),(2,3)\}$.
Nótese que no existen dos pares ordenados diferentes que posean el mismo primer número.</td></tr>
<tr><td>Regla</td><td>Una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que puede ser expresada mediante una fórmula algebraica; ni tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica.</td><td>Sean los conjuntos $E = \{1,2,4,6\}$ y $F = \{1,8,64,216,343\}$. Una regla le hace corresponder a los elementos del conjunto E, su cubo en los elementos del conjunto F, es decir:
$(1)^3 = 1, \quad (2)^3 = 8$
$(4)^3 = 64, \quad (6)^3 = 216$</td></tr>
<tr><td>Tabla de Valores</td><td>Dada una tabla de dos columnas A y B respectivamente, donde a cada eleven-to de A se le hace corresponder un único elemento de B, es decir, cualquier elemento de la columna A no aparece en dos filas diferentes.</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>16</td></tr></table></td></tr>
</table>

Sesiones de Trabajo N° 3 y 4

En estas sesiones, se estudiaron la Función Afín y la Función Cuadrática. Para cada una de estas funciones, se elaboró una hoja de trabajo, en la cual se destacaban los siguientes aspectos: algunas nociones básicas sobre la función objeto de estudio, sistemas de representación geométrico y algebraico de la misma y las actividades que se desarrollarían. A manera de ejemplo, se presentan algunos aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre la Función Afín.

FUNCIÓN AFÍN	
Nociones Básicas sobre Funciones	Una ***función polinómica*** definida de R en R, la cual se denota $P: R \rightarrow R$ es una función que se escribe de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales denominados ***coeficientes***, con a_n coeficiente de x^n, a_0 coeficiente de x^0, $(x^0 = 1)$. A cada uno de estos sumandos $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se les denominan ***términos***. Los números naturales $n, n-1, n-2, \ldots$ en los superíndices determinan el exponente de cada término. El mayor de los exponentes determina el grado del polinomio. Se llama ***función afín*** a la función de la forma $P(x) = a_1 x + a_0$ donde $a_1, a_0 \in R$. La representación gráfica de una función afín es una recta. El número real a_1 se denomina pendiente de la recta y, el número real a_0 se llama la ordenada en el origen, es decir a_0 representa la intersección de la recta y con el eje de las ordenadas, en consecuencia esta intersección tiene como coordenadas $(0, a_0)$. En una función afín el exponente de las variables x e y son iguales a 1. La expresión $y = a_1 x + a_0$ puede llamarse: ecuación de la recta.

<table>
<tr><td>Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico</td><td> Instrucciones: A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica, a través del campo de entrada de comandos o los botones de la barra de herramientas del software GeoGebra.
<table>
<tr><td>OBJETO MATEMÁTICO</td><td>BOTÓN EN LA BARRA DE HERRAMIENTAS</td><td>CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS (SINTAXIS)</td></tr>
<tr><td>Pendiente</td><td>-</td><td>Pendiente
$Pendiente[\mathrm{Re}cta]$</td></tr>
<tr><td>Punto</td><td>Botón 2
Opción: Nuevo Punto</td><td>Punto
Un punto en el plano se puede ingresar también de la siguiente forma: $A=(0,0)$.</td></tr>
<tr><td>Recta</td><td>Botón 3
Opción: Recta a través de dos puntos</td><td>Recta
$\mathrm{Re}cta[Punto, Punto]$
Nota: También se puede ingresar la ecuación de la recta de la siguiente forma: $y=3x-7$ ó $g(x)=3x-7$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td> 1. Representa en la misma pantalla las siguientes rectas:
$$y=2,\quad y=1,\quad y=0,\quad y=-1,\quad y=-2\,,$$
a) ¿Qué tienen en común y en que se diferencian?,
b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las rectas mencionadas anteriormente?,
c) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?,
d) ¿La función $f(x)=2$ posee punto máximo? ¿Punto mínimo?,
e) ¿f es creciente?,
f) ¿Al graficar las funciones anteriores notaste algún cambio?, en caso afirmativo, indícalo. </td></tr>
</table>

2. Representa las siguientes rectas de ecuaciones: $y=-3x,\quad y=-x,\quad y=x,\quad y=3x,\quad y=7x$, y responde las siguientes cuestiones:

a) Identifica cada una de las pendientes de las rectas mencionadas anteriormente,

b) Identifica la ordenada en el origen de cada una de las rectas,

c) ¿En qué se diferencian las ecuaciones y representación gráfica de las rectas $y=-3x,\quad y=-x$, de las restantes?,

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de la función $g(x)=-3x$?,

e) ¿La función *g* posee punto máximo?, y ¿Punto mínimo?,

e) ¿Es *g* creciente?,

f) ¿Al graficar las funciones $h(x)=x$ y $t(x)=-x$, notaste algún cambio? En caso afirmativo, señálalo.

3. Represента las siguientes rectas de ecuaciones:

$$y=3x-3,\quad y=3x-2,\quad ,y=3x-1,\quad y=3x,\quad y=3x+1,$$

y responde:

a) Identifica cada una de las pendientes de las rectas mencionadas anteriormente,

b) Identifica la ordenada en el origen de cada una de las rectas,

c) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las ecuaciones y representación gráfica de las rectas de esta actividad?.

4. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software,

a) El mismo número,

b) dos menos el triple del número,

c) seis veces el número más uno,

d) Un medio del número más tres.

5. Un taxista cobra Bs. 8 por buscar un pasajero a su casa y además Bs. 0,2 por cada kilómetro que recorre.

a) Describe lo que cobrará por cada kilómetro recorrido en función de la distancia,

b) ¿Cuánto cobrará por llevar a un pasajero a 15, 20 y 50 kilómetros de su casa?

Sesiones de Trabajo N° 5 y 6

En estas sesiones, se estudiaron la Función Raíz Enésima y las Funciones Definidas a Trozos. A continuación, se describirán ciertos aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre las Funciones Definidas a Trozos.

<table>
<tr><th colspan="2">FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS</th></tr>
<tr><td>Nociones Básicas sobre Funciones</td><td>Una función definida a trozos $F: R \to R$ está constituida por un número finito de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ donde el dominio de cada una de estas funciones es un subconjunto de los números reales, es decir; $Dom\ f_i \subset R,\quad 1 \le i \le n$ y disjuntos dos a dos $Dom\ f_i \cap Dom\ f_j = \phi \quad para \quad i \neq j$. Además el dominio de F es la unión de los dominios de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en símbolos: $Dom\ F = \bigcup_1^n Dom\ f_i$ y $F(x) = f_i(x)$, si $x \in Dom\ f_i$.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico</td><td>Instrucciones:
A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica, a través del campo de entrada de comandos del software GeoGebra.
<table>
<tr><th>OBJETO MATEMÁTICO</th><th>CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS
(SINTAXIS)</th></tr>
<tr><td>Función
$f: R \to R$
$f(x) = \begin{cases} -3 & si\ x \le -1 \\ 1 & si\ -1 \le x \le 2 \\ 4 & si\ x > 2 \end{cases}$</td><td>$Función[Función, Número, Número]$
Nota: Este comando permite graficar funciones definidas a trozos, primero se escribe la función y luego se define el intervalo.
Por ejemplo para graficar el segundo trozo f_2 de la función f, se procederá de la siguiente manera:
$Función[1,-1,2]$.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

	Función Valor Absoluto $g: R \to R$ $g(x) = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ $m(x) = \lvert x+2 \rvert$ $n(x) = \lvert x \rvert - 2$	$g(x) = abs(x)$ $m(x) = abs(x+2)$ $n(x) = abs(x) - 2$
	Función Signo $h: R \to R$ $h(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$	$h(x) = \operatorname{sgn}(x)$
	Función Mayor Entero $t: R \to R$ $t(x) = [\lvert x \rvert] = n$ $si \quad n \leq x < n+1, con\ n \in Z$ Ejemplo: El mayor entero de los números reales que se encuentran en el intervalo $[1,2)$, es el número 1.	$Función[Función, Número, Número]$ Nota: Si deseamos representar el trozo de función señalado en el ejemplo, entonces introducimos en el campo de entrada de comandos la siguiente info.-mación: $Función[1,1,2]$.
Actividades	1. Representa en la misma pantalla las siguientes funciones: $f(x) = \lvert x \rvert$, $g(x) = \lvert x+1 \rvert$, $h(x) = \lvert x-1 \rvert$, $m(x) = \lvert x+2 \rvert$, $n(x) = \lvert x-2 \rvert$. a)¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?, b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las mencionadas anteriormente?. c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?, d) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?, e) ¿La función f posee punto máximo?, f) ¿La función f posee punto mínimo?, g) ¿f es decreciente en $[0,\infty)$?.	

	2. Representa en otra pantalla las siguientes funciones: $f(x)=\lvert x\rvert+1$, $g(x)=\lvert x\rvert+2$, $h(x)=\lvert x\rvert-1$, $n(x)=\lvert x\rvert-2$. a) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?, b) ¿Qué tipo de función representan cada una de las mencionadas anteriormente?. c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?, d) ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones antes descritas?, e) ¿La función g posee punto máximo?, f) ¿La función g posee punto mínimo?, g) ¿Es g creciente en $(-\infty,0]$?.
	3. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software, a) El valor absoluto del número, b) El opuesto del valor absoluto del número, c) El valor absoluto del número más cinco, d) El valor absoluto del número, menos cuatro.
	4. Representa la función signo y la función mayor entero, y responde lo siguiente: a) ¿Cuál es el dominio y el rango de ambas funciones?, b) ¿Poseen estas funciones puntos máximos y mínimos?, c) ¿La función signo es creciente $(0,\infty)$?, d) ¿La función mayor entero es decreciente en $(-\infty,0]$?.
	5. G, H y K son tres puntos de una recta. Las coordenadas de G y H son 4 y -3, respectivamente. Si H está entre G y K, y $GK=13$, ¿Cuál es la coordenada de K?. Tomado: Moise E, y Downs, F. (1970). *Geometría Moderna*. México: Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Sesiones de Trabajo N° 7 y N° 8

En estas sesiones, se estudiaron las Funciones Logarítmica - Exponencial y Trigonométricas. A manera de ejemplo, se describirán los aspectos tratados en la hoja de trabajo sobre las Funciones Logarítmica y Exponencial.

<table>
<tr><th colspan="2">FUNCIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL</th></tr>
<tr><td>Nociones Básicas sobre Funciones</td><td>Función exponencial: Si $b > 0 \quad y \quad b \neq 1$, entonces la función exponencial con base b es la función $f : R \to R^+$ definida por:
$$f(x) = b^x.$$
Función logarítmica: Para definir la función logarítmica partamos de la función exponencial $x = b^y$. Si quisiéramos hallar la función inversa debemos despejar la variable y, es decir, buscar el exponente que elevado a la base b nos de como resultado el valor de la potencia x. Dicho exponente lo definiremos como la función logaritmo $f : R^+ \to R$ tal que: $y = f(x) = \log_b x$, y se lee, logaritmo con base b de x, donde x recibe el nombre de argumento. En otras palabras, el logaritmo con base b de x, es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener el argumento x. En símbolos: $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$.

En el caso particular de que la base sea el número 10, esta función recibe el nombre de logaritmo base diez o base decimal, y se expresa así: $\log_{10} x = \log x$. Si la base es el número $e \approx 2.7182818$, ésta función recibe el nombre de logaritmo neperiano y se expresa así: $\log_e x = Ln\ x$.</td></tr>
<tr><td>Sistemas de Representación Geométrico y Algebraico</td><td>Instrucciones: A continuación se presenta una lista de instrucciones útiles para el ingreso de algunos objetos matemáticos en la zona gráfica y la ventana algebraica del software GeoGebra.</td></tr>
</table>

OBJETO MATEMÁTICO	CAMPO DE ENTRADA DE COMANDOS (SINTAXIS)
Número *e*	2.7182818
Función Logaritmo $f(x)=\log(x)$	$f(x)=\log(x)$
Función Exponencial $g(x)=e^{x}$	$g(x)=\exp(x)$ $t(x)=(2.71)\hat{}\ x$
$h(x)=\dfrac{45000}{1+224e^{-0.9\,x}}$	$h(x)=(45000)/(1+224(2.71)\hat{}(-0.9x))$

Actividades

1. Representa en la misma pantalla las siguientes funciones:

$$f(x)=\log(x) \qquad g(x)=\log(x+1) \qquad h(x)=\log(x-1),$$
$$m(x)=\log(x+2) \qquad n(x)=\log(x-2).$$

a) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las gráficas?

b) ¿Qué tipo de función representa cada una?.

c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?,

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones?,

e)¿La función f posee punto máximo?,

f) ¿La función f posee punto mínimo?,

g) ¿La función f es creciente en $(0,1)$?.

2. Representa en otra pantalla las siguientes funciones:

$$f(x)=\exp(x) \qquad g(x)=\exp(x+1) \qquad h(x)=\exp(x-1).$$

a)¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las gráficas?,

b) ¿Qué tipo de función representan cada una?.

c) ¿Se nota algún cambio al graficar estas funciones?,

d) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones?,

e) ¿La función f posee punto máximo?,

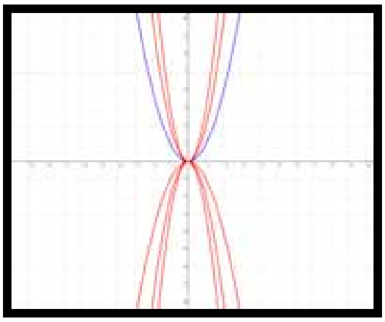
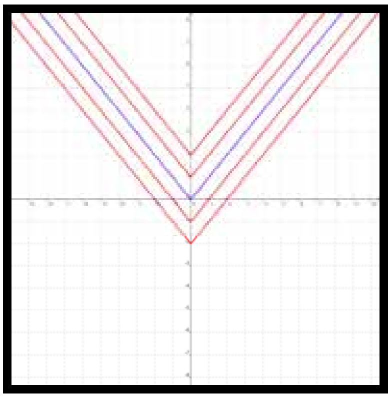
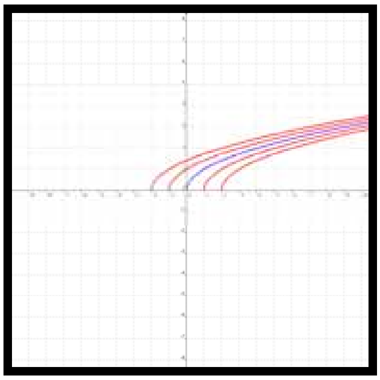
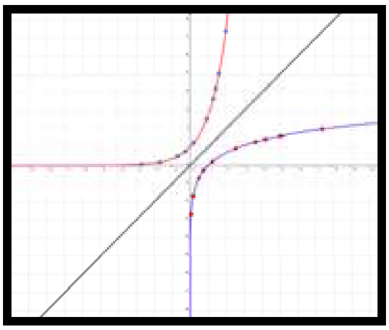
f) ¿La función f posee punto mínimo?,

g) ¿La función f es decreciente en $[-2,2]$?.

	3. Escribe en cada caso la función que se asocia a cada número y luego represéntala en el software, a) El logaritmo del número, más tres, b) El opuesto del logaritmo del número, c) El opuesto de la función exponencial, d) La función exponencial del número más seis.
	4. Representa la función: $g(x) = \exp(x)$, luego traza la recta $y = x$. Marca diez puntos distintos sobre la función g, ahora con la opción "refleja objeto por recta" (ubicada en el séptimo botón de la barra de herramientas), reflejalos con respecto a la recta $y = x$. A continuación responde: a) ¿Los puntos reflejados pertenecen a la gráfica de alguna función estudiada anteriormente?, b) Si la respuesta es afirmativa, ¿Qué tipo de movimiento o transformación en el plano se utilizó?
	5. Cierto día en una universidad asistieron 5000 personas, un estudiante se enteró que cierto orador polémico iba a efectuar una presentación no programada. Esta información fue comunicada a algunos amigos quienes a su vez la pasaron a otros. Después de transcurridos *t* minutos, $f(t)$ personas se habían enterado de la noticia, donde: $f(t) = \frac{5000}{1+4999e^{-0.5t}}$. ¿Cuántas personas se habían enterado del suceso (a) después de 10 minutos y (b) después de 20 minutos?. Representa la gráfica en el software. (Tomado: Leithold, L. (1997). Matemáticas previas al Cálculo. Análisis funcional y Geometría Analítica).

Sesión de Trabajo N° 9

En esta sesión se formalizó el estudio de algunos de los principios básicos de graficación de funciones propuestos por Torres (2002), porque en las actividades propuestas en las hojas de trabajo ya se manejaba esta idea de forma intuitiva. La discusión se apoyó en una presentación elaborada en PowerPoint. A continuación, se mencionan los principios estudiados en este taller.

Principio de Graficación de Funciones	Ejemplo
Ampliación o alargamiento: La gráfica de $y = a\ f(x)$, para $a > 1$, tiene la misma forma básica de la gráfica de $y = f(x)$ y se obtiene al alargar esta última lejos del eje X. Ejemplo: $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 2x^2,\ f_3(x) = 3x^2$	
Desplazamiento Vertical: La gráfica de $y = f(x) + c$, con $c > 0$, se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades hacia arriba. La gráfica de $y = f(x) - c$, con $c > 0$, se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades hacia abajo. Ejemplo: $f_1(x) = \|x\|,\ f_2(x) = \|x\| + 1,\ f_3(x) = \|x\| - 1,$ $f_4(x) = \|x\| + 2,\ f_5(x) = \|x\| - 2$	
Desplazamiento Horizontal: La gráfica de $y = f(x + c)$, con $c > 0$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades a la izquierda. La gráfica de $y = f(x - c)$ con $c > 0$, se obtiene trasladando la gráfica de $y = f(x)$ exactamente c unidades a la derecha. Ejemplo: $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \sqrt{x+1},\ f_3(x) = \sqrt{x-1},$ $f_4(x) = \sqrt{x+2},\ f_5(x) = \sqrt{x-2}$	
Reflexión: Dada una función $y = f(x)$ diremos que $y = -f(x)$ es la reflexión de la función original. Para obtener la gráfica de $y = -f(x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X, o con respecto a la recta $y = x$. Ejemplo: $f_1(x) = \exp(x),\ f_2(x) = \ln(x)$	

Bibliografía

Escobar, B. (1998). *Matemática* I *Funciones y Representaciones Gráficas*. Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Hohenwarter, M. (2005). *GeoGebra* [Programa de Computación en línea]. Disponible: www.geogebra.at [Consulta: 2007, Enero 15].

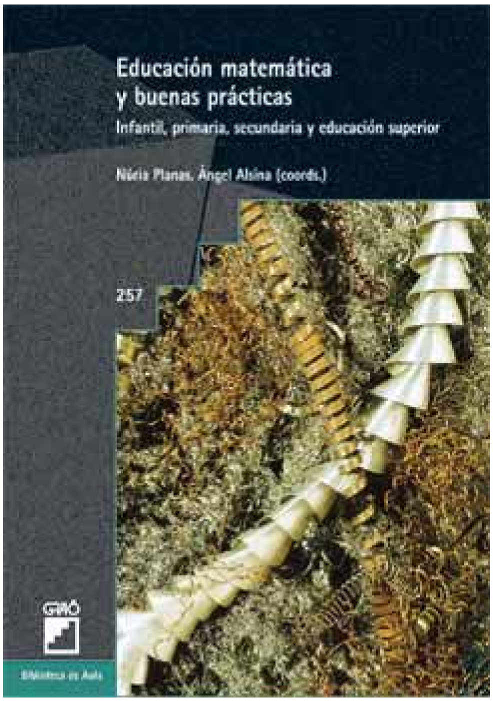
Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la educación de la Geometría: El modelo de Van Hiele*. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds). *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 303-376). Sevilla: Alfar.

Rojas, J. y Salazar, J. (1985). *Matemática I Operaciones en N, Divisibilidad, Funciones.* Caracas: Fondo Editorial de la UPEL.

Torres, A. (2002). *Principios Básicos de Graficación*. San Cristóbal: Fondo Editorial UNET.

Rolando García, Profesor de Matemática. Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay).

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 183-184
ISSN: 1815-0640



Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior.

Núria Planas y Ángel Alsina (coords),
Barcelona, Graó, 2009
ISBN: 978-84-7827-695-0

Al cabo de un año de la publicación de "Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible, acaba de aparecer un nuevo libro a cargo de Núria Planas y Àngel Alsina, aunque esta vez surge de la coordinación de más de veinte autores con experiencia profesional en distintos niveles que van desde la etapa infantil hasta la educación superior. Los cuatro capítulos principales se organizan en torno a experiencias docentes llevadas a cabo en aulas de infantil, primaria y secundaria y en cursos de formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas, aunque no interesa tanto destacar cuándo se plantean las propuestas sino para qué, cómo y con quién. Las buenas prácticas van precedidas de una presentación que sitúa los principios de una educación matemática accesible respecto a principios más específicos de cada etapa. Para entender la filosofía del libro, es importante notar que en todos los capítulos, las experiencias prácticas ocupan más espacio que las reflexiones teóricas sobre ellas.

Cuando Núria y Ángel se pusieron en contacto conmigo y me convencieron para colaborar como autora en el capítulo de prácticas de educación secundaria, tuve muchas dudas sobre la conveniencia de relatar algunas de las experiencias en mis aulas, sobre todo porque hasta ese momento no había tenido por costumbre dar a conocer tan públicamente mis modos de enfocar la enseñanza de las matemáticas. Éste fue, sin embargo, uno de los argumentos que usaron para que acabara aceptando. Se quería conseguir que profesores "anónimos", junto con algunos de mayor proyección en los últimos años y otros de gran reputación a nivel internacional, explicaran la importancia de su labor diaria y, en mi caso, ubicaran esta labor en un contexto de formación reflexiva y permanente. Viendo el producto final en su totalidad, creo que hice bien. Ha sido estimulante leer los otros textos, porque están escritos de forma intencionadamente abierta para que se pueda interactuar con ellos y reflexionar sobre cómo completarlos.

A raíz de mi participación en este libro, he profundizado algo más en torno a lo que significa una buena práctica en educación matemática. Dicen Núria y Àngel que no basta con saber matemáticas –aunque es necesario saberlas, ni basta con

superponer sobre el “saber sabio” unas cuantas reglas pedagógicas y didácticas que indiquen maneras genéricas de actuar en el aula cuando el conocimiento a construir es de tipo matemático. También es necesario un proceso cíclico y colaborativo de análisis y rediseño de las intervenciones en el aula, para que se vayan logrando cada vez más los objetivos de aprendizaje planificados. Para el análisis y la reflexión en torno a la práctica, se mencionan y ejemplifican varios criterios a tener en cuenta: la producción conjunta de actividades de aula por medio de la colaboración entre profesorado y alumnado, la construcción de puentes entre lenguaje escolar y lenguaje cotidiano, la creación de significado en entornos de conversación dialógica, el planteamiento de situaciones que estimulen el pensamiento complejo, o bien la contextualización de la enseñanza en base a experiencias del alumnado. En general, todas las condiciones que se tratan están claramente enmarcadas en las teorías socioculturales del aprendizaje humano, que destacan la construcción de conocimiento como una actividad conjunta.

La adopción de las teorías socioculturales como marco permite defender una educación matemática con una identidad común para todas las etapas escolares, más allá de las representaciones que puedan hacerse del logro matemático a lo largo de cada una de ellas. Me gusta especialmente que se muestre la educación matemática como un proceso cíclico de relación con el conocimiento por medio de las fases de contextualización, descontextualización y recontextualización, donde el aprendiz está a su vez involucrado en las fases de cognición, metacognición y revisión de la cognición. Se explica que este doble proceso cíclico debe reproducirse en todas las etapas y en cada secuencia didáctica de enseñanza y aprendizaje que se considere completa, de modo que el conocimiento matemático se construya primero en un contexto particular que tenga sentido para el alumnado y del que después pueda hacerse un proceso de distanciamiento para, más tarde, aplicar este conocimiento en una situación distinta de la inicial. Este primer ciclo, que en mi opinión ayuda a la transferencia del aprendizaje, admite ser pensado en cualquier edad y etapa escolar.

A medida que se avanza en la lectura, se entiende que no haya una lista efectiva de características para las buenas prácticas; en realidad es un libro para reflexionar sobre algunos de los rasgos que definen estas prácticas y los distintos tipos de andamiajes que los profesores podemos proporcionar a nuestros alumnos. Es bueno ver el profesor de matemáticas como alguien capaz de ofrecer situaciones contextualizadas en los entornos del alumnado, haciendo descubrir al mismo tiempo propiedades y estructuras matemáticas y procurando nuevas situaciones matemáticas en las que el alumnado pueda reconocer y aplicar los contenidos trabajados. Así también se consigue ver el alumno como alguien capaz de disfrutar y dar sentido a las matemáticas por medio de su implicación en contextos de aplicación y reflexión en torno a ellas.

Nuria Iranzo

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 185-190
ISSN: 1815-0640

M@tem@tic@s en l@ red

Sector Matemática - El Portal de las Matemáticas

Autor de la Aplicación: *Danny José Perich Campana*

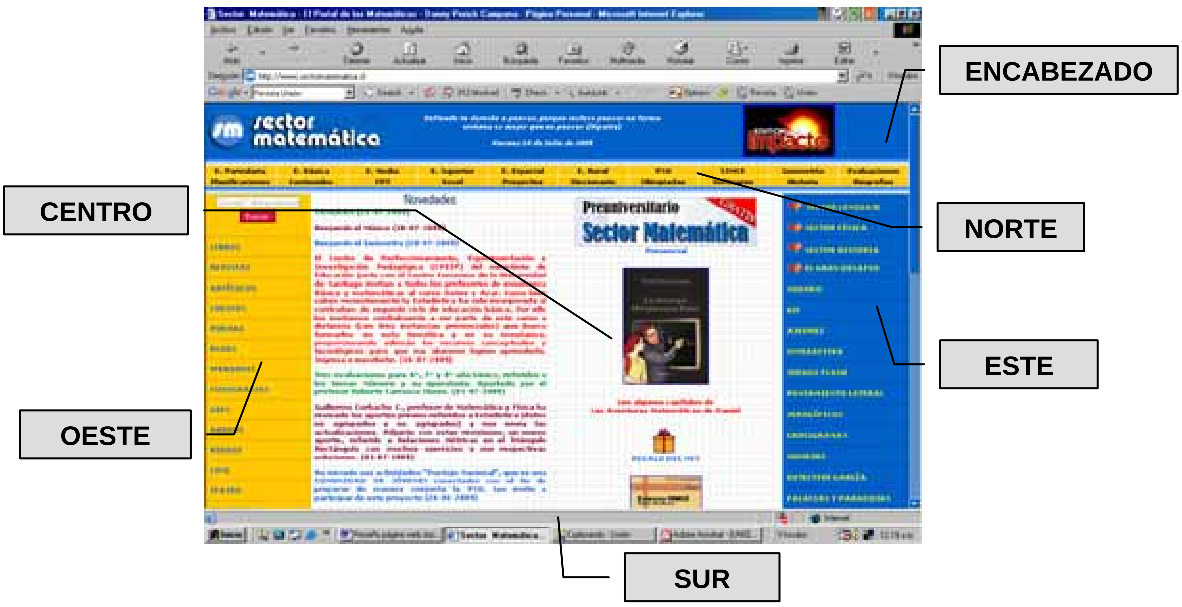
Dirección: http://www.sectormatematica.cl

Introducción

La página Web que me dispongo a reseñar es tan proficua que me invade una cierta dosis de cobardía. No podía ser de otra manera ya que también es vasto y diverso el perfil de su autor y WebMaster, Danny Perich, nacido en 1954 en Punta Arenas (Chile), donde ha realizado la mayoría de sus múltiples actividades: Profesor en Matemática en Enseñanza Media, Pre-universitaria y Universitaria; Informática Aplicada a la Educación; atletismo; fútbol; director y asesor en tareas comunitarias juveniles; autor, compositor e intérprete, actividad esta que comparte con su esposa y sus tres hijos varones. En todas ha sido merecedor de algún premio o distinción pero, lo que no pasa desapercibido en esta página, es su pasión por la Matemática y su Enseñanza, disciplinas que unen a todos los lectores de esta Revista.

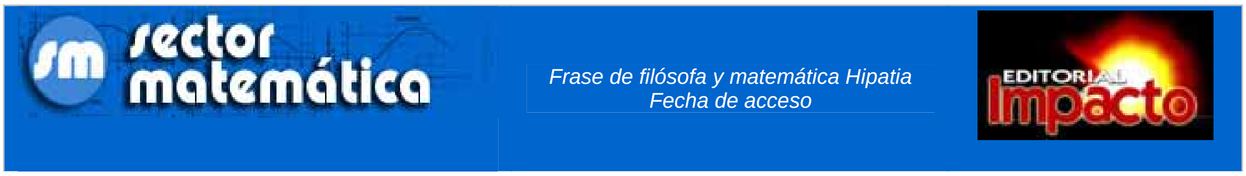
Esta página tiene de todo

Así es, en este sitio Web, creado en el año 2000, y que no fue el primero, y seguramente no será el último de Perich, se puede encontrar de todo. Es por ello que para organizar su descripción dividiré la página de inicio en seis secciones, del siguiente modo:



Encabezado

El encabezado se compone de tres columnas, tal como se muestra a continuación:



Logo de la página

En este rectángulo y cuando se sale de la página de inicio, aparece el título del enlace que se visita.

Vínculo a la Editorial que permite adquirir libros y descargar algunos gratuitamente

Centro

Esta sección está organizada en dos columnas:

Brinda información sobre la Prueba de Selección Universitaria presencial y en línea.

El autor ofrece esta novela con la intención de aportar un modelo didáctico que rompa los esquemas tradicionales de enseñanza de la matemática y del trabajo pedagógico de los profesores.

Ofrece elementos novedosos y entretenidos cada mes. La Editorial Impacto permite la descarga gratuita del libro de ejercicios SIMCE Cuarto Año Básico.

Enlace a un pequeño libro de presentación novedosa conteniendo chistes geométricos creados por Perich.

Enlace a la sección Oeste de videos donde puede encontrarse esta obra de teatro de Perich, en español y también subtitulada en inglés.

Ofrece softwares para evaluación o autoevaluación y enlace a ThatQuiz y otras páginas similares.

Enlace a la página www.fmat.cl donde se puede acceder a un foro matemático y otros temas de interés.

Ofrece leer más de 1500 opiniones e incluir la propia.

Norte

Esta sección está organizada en dos filas de diez botones cada una con los siguientes títulos:

E. Parvularia	E. Básica	E. Media	E. Superior	E. Especial
Más de 36 actividades. 112 guías, cuentos, juegos, etc., para la Educación Preescolar	Más de 600 actividades para el aula de Educación Básica, clasificadas por temas	Más de 350 actividades para el aula de Educación Media clasificadas por temas	Ejercicios propuestos y resueltos y más de 100 contenidos desarrollados para la Educación Superior	Contiene actividades, artículos y enlaces a sitios vinculados a la Enseñanza Diferencial
E. Rural	**PSU**	**SIMCE**	**Geometría**	**Evaluaciones**
Se proponen abundantes actividades y ocho artículos relacionados con la Educación Rural	Material oficial, ensayos en línea y ejercicios resueltos para preparar la Prueba de Selección Universitaria	Copioso material para preparar la prueba anual del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación	Problemas geomé-tricos verbales y con figuras en Word y htm. Vínculos a los obrantes en E. Básica y E. Media	Más de 400 evaluaciones en versión htm, formato word o pdf, clasificadas por niveles de Educación
Planificaciones	**Contenidos**	**PPT**	**Excel**	**Proyectos**
Colección de planifi-caciones organizadas por niveles, que sirven como guía para programar el año escolar	Más de 230 documentos breves donde se desarrollan contenidos clasificados según el nivel de Educación	Título, autor y tamaño de más de 80 presentaciones Power Point para reforzar el aprendizaje	Acceso a más de 80 archivos excel para practicar conceptos y planillas de Informe de Notas para los docentes	Espacio donde se da a conocer proyectos ejecutados o a realizar en el ámbito escolar y vinculados a la Matemática
Diccionario	**Olimpiadas**	**Softwares**	**Historia**	**Biografías**
Glosario de términos matemáticos orde-nados alfabética-mente y a los que se accede tildando en la letra inicial	200 pruebas de Chile, el 50% con solución. Además, 72+48 problemas planteados en el mundo.	Acceso a la descarga de dos docenas de programas matemáticos y su respectiva descripción	Una decena de artículos sobre Historia de la Matemática y una cronología de los más importantes eventos	Ochenta biografías de personas célebres por sus aportes a la Matemática, algunas breves, otras más completas

Oeste

Esta sección muestra 28 botones en una columna con los siguientes títulos:

LIBROS	Luego de ofrecer el acceso online o descarga de más de 50 libros completos de Matemática, su Didáctica y su Historia, informando sobre su Título, Autor, Tamaño, Formato y Comentario, propone un vínculo a: http://rinconmatematico.com/libros.htm donde pueden descagarse otros 500 títulos más.
REVISTAS	Ofrece accesos directos a 15 Revistas de Educación Matemática de habla hispana. La Revista Unión figura entre ellas.
ARTÍCULOS	Permite el acceso directo a 90 artículos de contenidos matemáticos de todos los niveles, 17 artículos de Educación Matemática, 5 de Matemática Recreativa y 17 sobre Reflexiones.
CUENTOS	Ofrece 8 cuentos vinculados a las Matemáticas, uno de ellos en versión video.
POEMAS	Puede accederse a 54 poemas que aluden a distintos conceptos matemáticos.
BLOGS	Ofrece el acceso a 30 blogs creados por profesores y aficionados a esta ciencia y 7 vínculos para crear un blog de modo fácil y gratuito.
WEBQUEST	Explica qué es una WEBQUEST, su estructura, modalidades y mapa conceptual. Ofrece una veintena ya elaboradas y un vínculo para construir online una webquest.
FOTOGRAFIAS	Más de 60 fotografías matemáticas, información sobre concursos y una entrevista a una docente. Los vínculos al concurso uruguayo y español no se encuentran activos.

GIFS	Una interesante y copiosa colección de figuras, cuerpos, gráficas, etc., en extensión .jpg, para incorporar en la construcción de guías, power point, evaluaciones, páginas web o blogs.
AUDIOS	Puede accederse a una clase radial de matemática, a archivos para enseñar cantando y a un video youtube.
VIDEOS	Ofrece 15 videos educativos para preescolar y una obra de teatro. Vínculo a cibermatex desde donde se pueden descargar algunos videos gratuitos y otros previo pago. Siete Conferencias plenarias, más de 70 videos YouTube y Dailymotion en español y 31 videos en inglés.
CINE	Propone 24 títulos de películas, su reparto, director, país, año y un breve comentario que permite conocer la relación entre el film y la Matemática o los matemáticos.
TEATRO	Obras de teatro sobre matemáticos y matemáticas.
FILATELIA	Recopilación de sellos relacionados con las Matemáticas indicando el motivo, el país y la fecha de emisión.
ORIGAMI	Además de su historia y formas básicas, provee instrucciones para confeccionar una treintena de objetos con esta técnica. Provee enlaces dedicados al origami desde y para la Matemática.
BACHILLERATO	Se explica la evolución de los criterios para realizar el proceso de selección de ingreso a las universidades de Chile. Provee preguntas y problemas planteados desde el año 1950 al 1966.
DEPORTES	Breve reseña y acceso a 6 artículos que vinculan el Deporte con la Matemática: forma de balones, proporciones de canchas, estadísticas de rendimiento, etc.
MEDICINA	Breve reseña y acceso a una decena de artículos que muestran la aplicabilidad de la Matemática a la Medicina.
ARTE	Breve reseña y acceso a 6 artículos y un video YouTube que dan cuenta de la relación entre el Arte y la Matemática.
MÚSICA	Breve reseña y acceso a 5 artículos, una tesis y cinco enlaces a páginas que trabajan la visión matemática de la música.
IDIOMAS	Documentos conteniendo términos matemáticos en otros idiomas. Acceso a un glosario matemático en línea en inglés y francés.
CS. NATURALES	Breve reseña y acceso a 13 documentos en los que se vincula a los sistemas biológicos con la Matemática.
RELIGIÓN	Una decena de documentos y libros que dan cuenta de la relación entre la Religión y la Matemática, centrados en la Biblia, el Corán, etc.
AMOR Y SEXUALIDAD	Breve reseña y acceso a una decena de artículos que muestran las búsquedas de fórmulas matemáticas vinculadas al amor o a las proporciones de un cuerpo perfecto. Algunos servidores institucionales deniegan el acceso a este vínculo.
MAT. COMERCIAL	Se desarrollan conceptos matemáticos aplicados a la Economía, lo que en algunos países se denomina Matemática Financiera.
PREMIO EUCLIDES	Explica la creación, en 2002, del PREMIO EUCLIDES a la Docencia Escolar en Matemática, otorgado por la Universidad Católica de Chile y menciona los ganadores hasta el momento.
MEDALLAS FIELDS	Explica la creación, en 1924, del Premio Internacional MEDALLA FIELD y menciona los ganadores hasta el momento.
ENLACES	Más de 250 enlaces a otras páginas distribuidos por contenidos y niveles de educación.

Este

Esta sección muestra 22 botones en una columna con los siguientes títulos:

Abre en ventana nueva una página similar a la principal que se dedica a temas de Lenguaje. WebMaster Lucy Lara Rocha.	SECTOR LENGUAJE
Abre en ventana nueva una página similar a la principal que se dedica a temas de Física. WebMaster Luis Hernández Otaño	SECTOR FÍSICA
Abre en ventana nueva una página similar a la principal que se dedica a temas de Historia. WebMaster José Antonio Vergara	SECTOR HISTORIA
Vínculo que permite conocer los ganadores del Gran Desafío 2009, 7ma. edición, que sería una Competencia Mundial de Resolución de Problemas Matemáticos. Invita al Gran desafío 2010.	EL GRAN DESAFÍO
Se pueden descargar en formato .doc 50 ejemplares y sus soluciones, de esta conocida grilla numérica de juego.	SUDOKU
Permite acceder a la historia, reglas básicas y jugadas especiales de este juego milenario que según afirman ayuda a desarrollar la memoria, el razonamiento matemático y la sensibilidad artística. Contiene dos vínculos a Asociaciones de GO.	GO
El autor describe su experiencia cuando en 2002 implementó su proyecto de introducir en el Liceo el aprendizaje de este juego ciencia universal. Incluye Proyecto, Guías, Evaluación, Investigaciones Educativas, opiniones y enlaces a softwares gratuitos.	AJEDREZ
Cien actividades interactivas de diversos niveles para descargar o ejecutar en línea, para ejercitar la memoria y resolver problemas.	INTERACTIVA
Ofrece más de 50 juegos flash para desarrollar el pensamiento lógico.	JUEGOS FLASH
Enuncia 16 problemas clásicos de pensamiento lateral y diversos mensajes de su creador, Edward de Bono, sobre la formación y puesta en marcha de los Clubes de Pensamiento, ofreciendo además, un vínculo a su página web.	PENSAMIENTO LATERAL
Se proponen una veintena de jeroglíficos y su solución.	JEROGÍFICOS
Ofrece 40 crucigramas, para imprimir o completar en línea, y sus soluciones sobre conceptos matemáticos construidos con apoyo de eclipseCrossword. Ofrece vínculo al software.	CRUCIGRAMAS
Alude a la exitosa serie estadounidense NUMB3RS que intenta mostrar cómo la confluencia del trabajo de la policía y las matemáticas proporciona respuestas a complejos casos criminales.	NUMB3RS
Propone interesantes enigmas y sus soluciones. Ofrece la descarga de más 50 historias de Sherlock Holmes.	DETECTIVE GARCÍA
Ofrece 4 falacias matemáticas y 7 paradojas.	FALACIAS Y PARADOJAS
Consta de 37 citas célebres de matemáticos, físicos, filósofos, pensadores.	CITAS
Pemite el acceso a varios comics de índole matemático.	COMICS
Brinda una colección de chistes matemáticos y un libro interactivo con chistes geométricos creados por Perich.	CHISTES
Perich describe los patrones encontrados por él en las boletas ganadoras del juego de azar llamado KINO.	KINO
En esta sección mística de la página podemos encontrar los principios de la Numerología, horóscopo diario, algoritmo de Zeller, horóscopo chino y vínculos a softwares específicos.	NUMEROLOGÍA
Clasificados según las distintas Regiones de Chile, estudiantes y profesionales ofrecen clases presenciales de apoyo indicando su nombre, nivel y especialidad de instrucción alcanzada, datos de contacto, cursos, niveles y modalidad de las clases, costo por hora e incluso, foto.	CLASES PARTICULARES
Vínculo a la página http://www.emol.com, El sitio de noticias online de Chile de la http://lasegunda.com, diario digital de Chile.	La Segunda Noticias en línea

Sur

Este pie de página consiste en una ficha técnica, que como se puede ver, contiene la fecha de la última actualización, fotografía y nombre del WebMaster, correos electrónicos y teléfonos de contacto, recomendaciones técnicas de visualización, autor y derechos reservados.

Última Actualización: 21 de julio de 2009


WebMaster**:** **Danny Perich Campana**

webmaster@sectormatematica.cl - dannyperich@gmail.com - (56) (61) 238594 - 08 356 3026
Este Portal está optimizado para trabajar con resolución de 1024 x 768 pixeles con Internet Explorer 5.5 o superior.
Danny Perich C. - Sector Matemática © 2000 - 2009. Todos los derechos reservados. All rights reserved

Finalmente

¿Qué más podemos agregar sobre esta Web? Veamos ...

- Es de fácil manejo, para nada confuso y sólo un pequeño porcentaje de vínculos están inactivos.
- Los accesos a la sección norte y oeste permanecen visibles durante la navegación y hasta que se accede a un documento, lo que evita el paso “vuelta atrás” facilitando la visita.
- Cuenta a la fecha con más de 9 millones de accesos y más de 1000 comentarios favorables de sus visitantes.
- Durante la redacción de esta reseña el promedio de usuarios activos superó el centenar, incluso en días sábado y domingo.
- Resulta muy difícil explorarla sin tentarse de ponerse a leer los documentos o de intentar resolver algunas de las actividades que propone.
- Si bien afirmé que tiene de todo yo agregaría una sección dedicada a los docentes que investigan en Educación Matemática, Matemática Educativa o Didáctica de la Matemática donde pueda incluirse marcos y constructos teóricos, glosario específico, acceso a páginas que permiten descargar tesis, artículos de investigación, normas APA, información sobre encuentros, jornadas, congresos, etc. Ya es mucho pedir ¿no?

Daniela Andreoli
Universidad Nacional del Noreste
Corrientes, Argentina

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 191-193
ISSN: 1815-0640

La Fundación continúa su labor

La **Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz** constituida el 6 de septiembre de 2005, es una entidad sin fines lucrativos. Entre sus objetivos se encuentra la idea clave de mejorar la calidad de la educación y la cultura de los países de América y en España. En ese sentido, desde 2001 ha proporcionado material escolar a numerosas escuelas públicas carenciadas de Bolivia, Perú, Paraguay y Argentina. En 2008 y 2009 se han hecho varias entregas en Paraguay, de forma personal por el Vicepresidente de la Fundación, D. Luis Balbuena Castellano, en los diversos viajes que ha realizado para participar en diferentes eventos. Igualmente se ha donado mobiliario nuevo a una escuela de la Comunidad Mbya, en el Departamento de Caaguazú (Paraguay).

Igualmente este año se está realizando el reacondicionamiento y ampliación de los servicios sanitarios en la Comunidad Indígena de Cerro Poty (cercano a Cateura, a orillas del Cerro Lambaré). En esta acción se ha contado con la participación ejemplar de la Comunidad Educativa del Colegio “Princesa Tejina” de Tejina, municipio de La Laguna en la isla canaria de Tenerife. Asimismo, la Fundación cuenta allí con la colaboración de la Oficina en Asunción de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI) que dirige D. Luis Scasso.

En estos momentos, se está estudiando la posibilidad de construir una escuela con las instalaciones necesarias para su buen funcionamiento pues la Fundación, su Patronato y socios, tienen la firme voluntad de trabajar con hechos verificables.

En la misma senda, la Fundación ha colaborado en la publicación del libro del profesor y escritor, D. Luis Balbuena Castellano**,** titulado *El ñandutí y las matemáticas,* editado en Asunción por “Fundación en Alianza” y que cuenta con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. En sus 90 páginas de texto e imágenes, nuestro Vicepresidente muestra la relación de esta famosa artesanía del Paraguay, *el ñandutí,* con otra muy popular de Canarias, *las rosetas* de Vilaflor. Se explican los instrumentos matemáticos que permiten interpretar los diseños desde el punto de vista de las matemáticas incluyendo ideas para su explotación didáctica. El libro, que fue presentado en Asunción y Vilaflor, se vende al precio de 10 euros. Hay que precisar que los derechos de autor, han sido donados, por el mismo de forma altruista a la Fundación, con el fin de construir una escuela en Paraguay.

El pasado año fue convocado el ***I Premio Literario*** para autores o autoras hasta los 35 años, dedicado a la novela corta y dotada con 1500 euros y la publicación de la obra ganadora. En el mes de septiembre próximo se publicarán las Bases del ***II Premio Literario*** dedicado en esta ocasión a la poesía. Dotado con 2000 euros e incluyendo la publicación de la obra premiada.

Igualmente, en el mes de mayo pasado, se firmó con el Rector D. Eduardo Doménech, un Convenio de Colaboración con la Universidad de La Laguna que, entre otros cometidos destaca la convocatoria del ***I Premio de Investigación en el Ámbito Psicosocial*** dedicado a temas de familia, educación, drogadicción, alcoholismo, intervenciones en situaciones excepcionales, etc. El premio tiene una cuantía de 2000 euros e incluye la publicación de la obra.

En www.carlossalvadorybeatrizfundación.com hay más información escrita y gráfica de la Fundación. En algunos casos una imagen vale más que mil palabras.

A Fundação continua seu Trabalho

A fundação Canária Carlos Salvador e Beatriz fundada em 6 de Setembro de 2005, é uma entidade sem fins de lucro. Entre seus objetivos encontra-se a idéia clave de melhorar a qualidade da educação e a cultura dos países de América e em Espanha. Neste sentido, desde 2001 tem proporcionado material escolar a numerosas escolas públicas carentes de Bolívia, Peru, Paraguai e Argentina. Em 2008 e 2009 se fez várias entregas em Paraguai, de forma pessoal pelo Vice-presidente da Fundação, D. Luis Balbuena Castellano, nas diversas viagens que realizou para participar em diferentes eventos. Igualmente doou-se mobiliário novo a uma escola da Comunidade Mbya, no Departamento de Caaguazú (Paraguai).

Igualmente este ano se está realizando o recondicionamento e ampliação dos serviços sanitários na Comunidade Indígena de Cerro Poty (perto da Cateura, na beira do Cerro Lambaré). Nesta ação contou-se com a participação exemplar da Comunidade Educativa do Colégio “Princesa Tejina” de Tejina, município de *La Laguna* na Ilha Canária de Tenerife. Assim mesmo, a Fundação conta ali com a colaboração do escritório em Assunção da Organização dos Estados Ibero-americanos (OEI) que dirige D. Luis Scasso.

Nestes momentos, se está estudando a possibilidade de construir uma escola com as instalações necessárias para o seu bom funcionamento porque a Fundação, seu Patronato e sócios, têm a firme vontade de trabalhar com fatos verificáveis.

Na mesma senda, a Fundação colaborou na publicação do livro do professor e escritor, D. Luis Balbuena Castellano, titulado *El ñandutí y las matemáticas*, editado em Assunção por “Fundación en Alianza” e que conta com o apoio da Organização dos Estados Ibero-americanos para a Educação, a ciência e a cultura. Nas suas 90 páginas de texto e imagens, nosso Vice-presidente mostra a relação deste famoso artesanato de Paraguai, o *ñandutí*, com outra muito popular de Canárias, as *rosetas de Vilaflor*. Se explicam os instrumentos matemáticos que permitem interpretar os desenhos desde o ponto de vista das matemáticas incluindo idéias para a sua exploração didática. O livro, que foi apresentado em Assunção e *Vilaflor*, é vendido ao preço de 10 euros. É importante indicar que os direitos de autor, foram doados, pelo mesmo de forma altruísta à Fundação, a fim de construir uma escola em Paraguai.

O ano passado foi convocado o ***I Prêmio Literário*** para autores ou autoras até 35 anos, dedicado à novela curta e dotada com 1500 euros e a publicação da obra ganhadora. No próximo mês de setembro se publicarão as Bases do ***II Prêmio Literário*** dedicado nesta ocasião à poesia. Dotado com 2000 euros e incluindo a publicação da obra premiada.

Igualmente, no mês de maio passado, assinou-se com o Reitor D. Eduardo Doménech, um convênio de Colaboração com a Universidade de La Laguna que, entre outros objetivos destaca a convocatória do I Prêmio de Investigação no Âmbito Psicossocial dedicado a temas de família, educação, adição a drogas, alcoolismo, intervenções em situações excepcionais, etc.. O prêmio tem uma quantia de 2000 euros e inclui a publicação da obra.

Em www.carlossalvadorybeatrizfundación.com há mais informação escrita e gráfica da Fundação. Em alguns casos uma imagem vale mais que mil palavras.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Septiembre de 2009, Número 19, páginas 194-197
ISSN: 1815-0640
Información

El Proyecto Klein

Instituciones promotoras

La Unión Matemática Internacional (IMU, ver http://www.mathunion.org/) es una organización internacional científica, no gubernamental y sin ánimo de lucro, creada hace 90 años y encuadrada en la ICSU (International Council for Science).

La mayoría de los países[1] tienen un representante ante la IMU. Por ejemplo, España esta representada en IMU a través del Comité Español de Matemáticas (CEMAT, ver http://www.ce-mat.org/).

La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos (el último, en Madrid 2006) y otorga, durante el mismo, las Medallas Fields, equivalentes a los Premios Nobel en matemáticas (nótese que no existe Nobel en la categoría de matemáticas).

La Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, ver http://www.mathunion.org/icmi) es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos.

Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Félix Klein[2] (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un congreso internacional de educación matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996. En España, por ejemplo, la representación ante ICMI se estructura a través de una subcomisión del CEMAT, (ver http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm) siguiendo el modelo IMU/ICMI.

La obra de Klein

Hace cien años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, Prof. Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada «Matemática elemental desde un punto de vista superior», con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito. Se pueden mencionar las múltiples traducciones (la más antigua en castellano que conocemos, la emprendida por el precursor del CSIC en 1927, que se encuentra en vías de digitalización en

[1] Ver la relación de países miembros de IMU en http://www.mathunion.org/members/countries/list/sorted-by-names/
[2] Una breve reseña histórica aparece en http://www.gap-system.org/%7Ehistory/Biographies/Klein.html

este momento) y ediciones de la misma –dos recientes: en castellano, la de la editorial Nivola[3], en el año 2006, o la de la popular editorial Dover, en 2004, en Inglés. Pero, sobre todo, constituye una de esas raras ocasiones en las que un investigador de primera fila escribe una obra específicamente dirigida a facilitar a los profesores de secundaria una visión estimulante y viva sobre el contenido del currículo.

Félix Klein trataba de remedar, en su obra, la falta de conexión –«…desde principios del siglo XIX…»-- entre la enseñanza de las matemáticas no universitarias y los resultados de la investigación. Pero han pasado otros cien años desde 1908 y a lo largo del siglo XX las matemáticas han soportado una crisis de fundamentos, se han abierto, con el advenimiento de los computadores, a nuevos ámbitos de actividad, han logrado resolver problemas centenarios. Distintas ramas de las matemáticas, como la Estadística y la Investigación Operativa, han surgido (y otras han desaparecido en la práctica) en este período, así como nuevos e inimaginables –hace cien años—ámbitos de aplicación…

El Proyecto Klein

El *Proyecto Klein* es una iniciativa conjunta de IMU/ ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en el año 1908, del libro de F. Klein “Matemática Elemental desde un punto de vista superior”.

Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. Se persigue, en definitiva, acercar al currículo escolar los múltiples --y en muchos casos, insospechados-- ámbitos de presencia de las matemáticas en la sociedad actual, alcanzados gracias a la investigación desarrollada durante los últimos cien años y que, por tanto, no pudieron ser reflejados en la obra original de Klein.

El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos. El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos. Entre otras acciones está prevista la organización de una serie de “Conferencias Klein” para facilitar la difusión del proyecto y la participación en el mismo de distintos colectivos.

[3] F. Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Traducción al español de Jesús Fernández. Nivola, Madrid. (2006).

La Comisión Klein

Tras la aprobación del proyecto por los comités ejecutivos de ICMI e IMU en marzo y abril de 2008[4], respectivamente, se ha procedido a constituir la comisión que ha de diseñar y llevar a término, en los próximos cuatro años, dicho proyecto, formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador --W. Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda-- consensuado por ambas partes.

La Comisión Klein está constituida en la actualidad por los profesores:

- Michèle Artigue, Universidad de Paris VII, Francia.
- Ferdinando Arzarello, Universidad de Turín, Italia.
- Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney, Australia.
- William McCallum, Universidad de Arizona, USA.
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España.
- Christiane Rousseau, Universidad de Montreal, Canadá.
- Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg, Alemania

Se estima que la comisión mantendrá un par de reuniones anuales, y que organizará dos o tres conferencias para recabar ideas y/o difundir la marcha de sus trabajos. Además la comisión distribuirá sus miembros en algunas subcomisiones creadas para atender diversos aspectos concretos (creación de una serie de DVD's, desarrollo de una wiki, etc.) del trabajo. Dichas subcomisiones deberán, también, establecer un calendario de reuniones.

Llamada a la participación. Primer comunicado de la Comisión Klein.

La primera reunión de esta comisión, recientemente convocada, ha tenido lugar a finales del pasado mes de mayo, en Paris. En la misma se aprobó la difusión de un texto común, difundiendo el proyecto y convocando a la participación en el mismo, que traducimos en los siguientes términos:

El proyecto Klein

En el año 2008, IMU e ICMI aprobaron la puesta en marcha de un proyecto para revisar la obra de Félix Klein "Matemática Elemental desde un punto de vista superior". Se trata de la elaboración de un libro, dirigido a profesores de enseñanza secundaria, que fuese capaz de trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria.

El equipo internacional que ha de diseñar este proyecto, la llamada Comisión Klein, se ha reunido recientemente por primera vez. La Comisión aprobó la

[4] http://mathstore.gla.ac.uk/headocs/doc.php?doc=84Barton_B.pdf

realización de un libro de cerca de 300 páginas, con el objetivo de inspirar a los profesores de secundaria en la tarea de acercar a sus estudiantes a un panorama más completo sobre el creciente y complejo papel de las matemáticas en el mundo de hoy. Ese libro estaría acompañado por diversos recursos audiovisuales y web. La duración estimada del proyecto es de cuatro años.

El libro no pretende ser enciclopédico ni la última palabra en cada campo, pero con independencia de la estructura que finalmente se adopte en cada uno de sus capítulos, el texto tratará de enfatizar las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y ciertos temas genéricos (como el impacto de los ordenadores). No habrá un capítulo dedicado específicamente a la didáctica de las matemáticas, pero su presencia se hará notar implícitamente en muchas ocasiones.

La Comisión Klein quiere recabar la participación activa de todos aquellos que trabajan alrededor de las matemáticas, ya sean investigadores o docentes, en este proyecto que acaba de comenzar. Además de estar abierta a la recepción de comentarios por escrito, la Comisión planea organizar diversas "Conferencias Klein" en diversos lugares del mundo, donde espera recabar sugerencias y percibir la reacción de los asistentes a las mismas sobre los materiales, en fase de desarrollo y consulta, que presente. La redacción final del libro correrá a cargo de autores invitados, de probada capacidad narrativa y divulgadora.

Por ello invitamos a cualquiera que desee seguir informado sobre el desarrollo del proyecto y recibir los distintos borradores que se vayan generando, a enviar un correo electrónico a la dirección (provisional) <b.barton@auckland.ac.nz>. Un portal web sobre el proyecto se encuentra en vías de construcción.

En este contexto, la Comisión quiere invitar ahora a enviar comentarios sobre la siguiente elección de títulos para los capítulos del libro:

Introducción

- ***Capítulos temáticos***
  - *Aritmética*
  - *Lógica*
  - *Algebra y Estructuras*
  - *Geometría*
  - *Funciones y Análisis*
  - *Matemática Discreta y Algorítmica*
  - *Matemáticas de la Computación*
  - *Probablidad y Estadística*

- ***Capítulos misceláneos***
  - *Intradisciplinariedad (esto es, conexiones internas)*
  - *Las matemáticas como disciplina viva en la ciencia y la sociedad*
  - *¿Cómo trabajan los matemáticos?*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 198-200
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2009

IX Seminario Internacional CIMPA

Convoca: IMPA-UNESCO
Sede: Universidad Nacional de Ingeniería. Lima. Perú.
Fecha: 5 al 9 de Octubre de 2009.
Información: www.imca.edu.pe

Coloquio de la Sociedad Argentina de Estadística.
Convoca : Sociedad Argentina de Estadística
Sede: Ciudad de Catamarca.
Fecha: 7 al 9 de Octubre de 2009.
Información: www.s-a-e.org.ar

10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Lugar**:** San Juan de Pasto. Universidad de Nariño.
Convoca**:** Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
Fecha: 8 al 10 de octubre de 2009.
Información: www.asocolme.com

VIII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (VIII CAREM)

Lugar: Buenos Aires (Argentina)
Convoca: Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)
Fecha: 8 al 10 de octubre de 2009
Información: www.soarem.org.ar

IV Seminario Internacional de Investigación en Educación Matemática.

Lugar: Universidad Católica de Brasilia – UCB.
Taguatinga – DF- Brasil
Fecha: 25 al 28 de octubre del 2009. Universidad Católica de Brasilia – UCB.
Información: www.sbem.com.br

COMPUMAT 2009
Universidad Pedagógica "Enrique José Varona"
Lugar: La Habana, Cuba.
Fecha: 18 al 20 de noviembre de 2009.

AÑO 2010

V COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Organizan: IREM-Perú y Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).
Lugar: Lima. Perú.
Fecha: 10 al 12 de febrero de 2010.
Más información: irem@pucp.edu.pe
http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem

III Jornada Nacional de Educação Matemática e XVI Jornada Regional de Educação Matemática

Organiza: Instituto de Ciências Exatas e Geociências. Laboratório de Matemática. Universidade de Passo Fundo.
Fecha: 4 al 7 de mayo de 2010.

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Lugar: Ljubljan, Eslovenia
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
Información: http://icots8.org/

AÑO 2011

XIII CIAEM: XIII Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática
Lugar**:** Recife. Brasil
Convoca: Comité Interamericano de Educación Matemática.
Fecha: 26 al 29 de junio de 2011
Información: http://www.ce.ufpe.br/ciaem2011

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, página 201-202
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org con copia a revistaunion@gmail.com. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 20 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen(español) o resumo(portugués) y abstract (inglés)**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos personales** en esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas

   - Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

   Para un libro:

   Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza, Madrid. España.

   Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires. Argentina.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria*. Educación Matemática 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). *Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma*. Revista de didáctica de las matemáticas 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. En: Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

García Cruz, J. (2008*). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas*. UNIÓN Nº14 [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=320

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 6 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com