REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 145-163

www.fisem.org/web/union

Ideas para enseñar:

Propuestas para la enseñanza de las probabilidades: Un ejemplo basado en la educación media chilena.

Manuel Alejandro González Navarrete

Fecha de recepción:28/11/11
Fecha de aceptación:15/08/13

Resumen	En este trabajo presentamos propuestas para enseñar probabilidades a estudiantes de educación media, en el caso chileno, alumno de 14 a 17 años. La gran motivación es alejarnos de las tradicionales formas basadas en juegos de azar y/o lanzamientos de dados o monedas. Las actividades propuestas buscan relacionar los conceptos inmersos en el estudio de las probabilidades con el quehacer cotidiano de los estudiantes. Comenzando desde las nociones de azar, presentando las propiedades básicas de la teoría de conjuntos y hasta llegar al concepto de probabilidad clásica dado por Laplace **Palabras clave**: probabilidades, probabilidad clásica, Laplace.
Abstract	We present suggestions for teaching probability to secundary school students in the Chilean case, students 14 to 17 years. The main motivation is to move away from traditional forms of education based on gambling and / or flips of dice or coins. The proposed activities seek to relate the concepts involved in studying the odds with the daily lives of students. Starting from the notions of chance, presenting the basic properties of the set theory and up to the classical concept of probability given by Laplace **Keywords**: probability, classical concept of probability, Laplace.
Resumo	Neste trabalho propomos atividades para ensinar probabilidades aos estudantes do ensino medio, no caso do Chile, alunos entre os 14 aos 17 anos. A grande motivaçao é abandonar as tradicionais formas de ensino baseadas nos jogos de azar e nos lançamentos de dados ou moedas. As atividades propostas procuram relacionar os conceitos probabilisticos com o dia a dia dos estudantes. Começando com as noçoes de acaso, apresentando as propriedades básicas da teoria dos conjuntos e chegando ao conceito de probabilidade clásica dado por Laplace. **Palavras-chave:** probabilidades, probabilidade clásica, Laplace.

1. Introducción

Iniciando este trabajo, es necesario dar cuenta que el desarrollo de la teoría de la probabilidad no ha estado exento de controversias. Para muchos teóricos matemáticos, la estadística y la probabilidad con sus imprecisiones o manejo de los errores, dejan de poseer el fundamento característico de la matemática, ese indiscutible rigor axiomático que ha permitido construir las relaciones entre los conceptos manejados por esta misma. Todo lo que hasta ahora ha permitido que la matemática tenga un lugar privilegiado dentro de las ciencias. Para De León (2006) la razón es clara: las matemáticas mantienen desde hace ya milenios una bien ganada fama de fiabilidad, fama bien ganada porque constituyen el más sólido edificio conceptual construido por la humanidad. En esta línea, y haciendo un recorrido histórico, muchos autores reconocen que el cálculo de probabilidades comienza con los primeros estudios sobre los juegos de azar, plasmados en la correspondencia epistolar entre Pascal y Fermat, originada por el famoso problema planteado por el Caballero de Meré. De hecho, entre los primeros títulos referentes al estudio del concepto de probabilidad; encontramos obras que más parecen manuales para apostadores; ya que en palabras de Ugochukwu (2004) el libro escrito por Cardano[1] trató acerca de la probabilidad en las apuestas de dinero, dando consejos, basado en su experiencia, sobre cómo hacer trampa.

Para Autor (1997), un importante libro sobre probabilidad fue el trabajo de Christian Huygens (1629-1695), publicado en el año 1657. En él (*el razonamiento en los juegos de azar*), se explora la noción de esperanza matemática. Esto permite el cálculo de ganancias o pérdidas que un jugador puede esperar, conociendo las probabilidades involucradas en el juego. Sin embargo, aún hasta estas épocas el tratamiento de los fenómenos aleatorios eran vistos como casos particulares.

Como exponen Levin y Rubin (2004), en el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827), unificó todas estas ideas y compiló la primera teoría general de probabilidad. Laplace desde 1774 escribió muchos artículos sobre el tema de la probabilidad. En 1812 publicó en París su *Théorie Analytique des Probabilités,* donde hace un desarrollo riguroso de la teoría de probabilidad con aplicación a problemas demográficos, jurídicos, sociales y además astronómicos. De acuerdo a Obagi (2003), esta teoría, aparte de ser la primera exposición sistemática del cálculo de probabilidades, también presenta un análisis, que hasta entonces sólo empleaba los recursos de la aritmética, de esta forma Laplace pone el cálculo de probabilidades sobre una base moderna y general.

Sin embargo, especial interés requieren las palabras del doctor David Hilbert, durante el Segundo Congreso Internacional de Matemática realizado en París, quién señaló como uno de los problemas matemáticos más importantes: la necesidad de una rigurosa fundamentación de los conceptos básicos del cálculo de probabilidades. A pesar que muchos matemáticos se preocuparon de esta tarea, fue solamente en 1933, cuando el matemático soviético Andréi Kolmogórov propuso los llamados axiomas de probabilidad, basados en la teoría de conjuntos y en la teoría de la medida, desarrollada años antes por Lebesgue, Borel y Frechet entre otros. Este modelo matemático es lo que dio forma a lo que hoy en día conocemos como teoría de probabilidades. Esta aproximación axiomática que vino a generalizar lo hasta ahora conocido como probabilidad clásica, permitió dar la rigurosidad necesaria a muchos argumentos ya utilizados, así como permitió el estudio de problemas fuera de los marcos clásicos y aclarar las aparentes paradojas existentes. Dando paso a un desarrollo tanto cuantitativo como cualitativo de los conceptos y las aplicaciones relacionadas con las más diversas áreas de conocimiento.

Un aspecto importante que se desprende de la reciente formalización de la teoría de la probabilidad es que lentamente el tratamiento académico de esta misma se ha venido observando en los sistemas educativos; en las últimas décadas del

1 *Liber de Ludo Aleae* (El Libro de los Juegos de Azar).

siglo XX se comienzan a tratar en las reformas educacionales los tópicos de estadística y probabilidad, tal como ha ocurrido en el sistema educacional chileno. Al respecto Santaló (1999) apuntaba que la teoría de las probabilidades se fue desarrollando por cuenta separada, también por matemáticos, pero fuera de los claustros académicos, sin que figurara en los planes de estudio de las carreras universitarias, mucho menos en los de la enseñanza elemental y media.

Esta emergente relevancia que ha adquirido esta teoría hace que cada vez más autores respalden su importancia y la trascendencia de ésta en el futuro de los sistemas educacionales, entre ellos Dacunha-Castelle (1996), que ha propuesto la necesidad de que todo ciudadano posea una base sólida en probabilidad y estadística, que le permita comprender, juzgar y criticar la avalancha de información que los medios de comunicación le brindan día a día. De manera similar, Andradas (2002) opina que la probabilidad es capaz de predecir el comportamiento de fenómenos de masas con una precisión extraordinaria, de ahí la importancia de que los individuos se familiaricen con estos conceptos para comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos. Es claro que en la actualidad los ciudadanos tienen el derecho y el deber de dudar sobre lo que se les está informando, de lo contrario podrían ser víctimas de las intenciones de manipulación, que un determinado estudio sobre algún tema en particular tiene como finalidad.

Por estas razones como plantean Jiménez y Jiménez (2005): la sociedad se ve inevitablemente obligada a adaptar y reestructurar su sistema educativo, para cumplir con su compromiso de formar a los individuos que la componen. La educación, por tanto requiere entender que una persona que vive en esta sociedad moderna debe tener un mejor manejo de aquellas situaciones de carácter aleatorio, porque también a los procesos dependientes de la casualidad le son inherentes ciertas regularidades, ya que la casualidad no significa ausencia total de reglas ni menos aún caos.

Como señalaban Núñez, Sanabria y García (2004), para el caso de Costa Rica el hecho de que hace falta un análisis profundo de posibles metodologías del trato de la incertidumbre en la enseñanza secundaria. No es antojadizo. El cuestionamiento de los contenidos plantea toda una profundización en los temas que se van a desarrollar.

De forma complementaria a las ideas anteriormente propuestas, es importante recurrir al concepto de numeralismo; el cual de acuerdo a Ochsenius (1999), dice relación con la adecuada utilización de conceptos y modos de razonar propios de la matemática en el complejo proceso de adaptación de los seres humanos al mundo en que se desenvuelven. Lo que en cierto modo se refiere a la habilidad de las personas para usar la matemática al resolver problemas prácticos en la cotidianidad.

En esta línea Ochsenius (1999), basándose en los contenidos y objetivos propuestos por los planes y programas de los doce años de estudio, del sistema educativo chileno, propone que el adulto numeralista debe ser capaz de: reconocer eventos equiprobables y calcular su probabilidad; reconocer que si dos sucesos son independientes, entonces el resultado de uno de ellos no influye en la probabilidad del otro; estimar aproximadamente la probabilidad de ganar en juegos de azar sencillos; y utilizar adecuadamente la ley de los grandes números en la toma de decisiones en la vida cotidiana.

Importante se vuelven por tanto las bien conocidas palabras de Vygostky quien afirma que "la enseñanza directa de conceptos es tarea vana e imposible" ya que de esta manera sólo se obtendrán "verbalismos vacíos, que solo simulan conocimiento" (1975, p. 83). Así como también lo propuso Gardner (1996), refiriéndose a que el sistema educativo ha privilegiado los procedimientos mecánicos, dejando de lado la comprensión; encontrándonos con que la destreza en resolver problemas es puesta en equivalencia con el dominio de la materia en estudio. Ya que sólo se preguntan los típicos problemas, enunciados y ejercitados repetitivamente. Lo que Ochsenius reafirma proponiendo:

> *Los problemas de la vida cotidiana constituyen una clara violación de este acuerdo; no son susceptibles de ser resueltos por aplicación mecánica de algoritmos pues la realidad plantea cada vez situaciones diferentes, son preguntas que rara vez tienen un enunciado explícito donde se encuentre cómodamente la información necesaria y precisa para contestarlas. (1999, p. 33)*

2. Justificación de la propuesta

Actualmente en el sistema educativo chileno, los contenidos de probabilidades se encuentran dentro de los que más complicaciones traen a los profesores de matemática a la hora de enseñarlos; ya sea por la dificultad de abordar algunas situaciones o por el escaso material didáctico disponible para su enseñanza. Motivo por el cual en muchos establecimientos es común que los docentes de la especialidad prefieran enseñar dichos contenidos de escasa manera, y al mismo tiempo de una forma poco contextualizada; inclusive, en el peor de los casos, los educadores evitan trabajar dichas unidades.

Bastante común resulta encontrarnos con propuestas de enseñanza que mayoritariamente acuden a los ejemplos del lanzamiento de dados o monedas y/o extracciones de cartas desde una baraja. Es claro que el estudio de las probabilidades en sus inicios se encargó de analizar situaciones relacionadas con los juegos de azar, pero en la actualidad resulta importante poder vincular los conceptos de esta teoría a nuevas situaciones y de forma contextualizada.

El convencimiento de que esta labor es posible, se vuelve hoy en día una necesidad para que nuevas propuestas emerjan, promoviendo el cambio y el intercambio respecto del tipo de actividades y ejemplos en la enseñanza de la unidad de probabilidades. De esta manera surge la iniciativa de presentar las siguientes propuestas didácticas, orientadas a la enseñanza de la probabilidad en educación media; que buscan ser un referente para que los docentes puedan incluir en el proceso de enseñanza-aprendizaje nuevas actividades y tomen la iniciativa para construir, bajo sus propias visiones y realidades, otras propuestas que se adecuen al tipo de situaciones que ellos deseen estudiar en este contenido.

Se presenta de este modo, un conjunto de actividades que están orientadas a los contenidos introductorios de la teoría de probabilidades. En ellas son propuestas situaciones que intentan mostrar novedosas formas en que los contenidos pueden ser tratados, así como también, se contextualizan los ejemplos para una mejor comprensión por parte de los estudiantes.

3. Estructura de las actividades

Cada una de las actividades propuestas están compuestas por cuatro secciones, las que se exponen a continuación;

- **Explicación de la Actividad** en la que se dan a conocer los objetivos y las características de la actividad que se propone, además de incluir algunas definiciones, en los casos que sean necesarios.
- **Desarrollo de la Actividad** esta sección se enfoca a describir los ejemplos específicos que se plantean para la enseñanza del contenido propuesto. El desarrollo de la actividad es, en cierto modo, el relato de lo que se espera sea realizado en el aula.
- **Conclusión y Cierre de la Actividad** cada una de las actividades que se proponen incluyen algunas ideas de cómo realizar el cierre de éstas, de tal manera de poder evaluar el aprendizaje de los estudiantes y plantear otras situaciones que refuercen los contenidos tratados.
- **Sugerencias Finales** el apartado de sugerencias finales expresa algunas recomendaciones para el docente, con respecto a lo que es esperable obtener luego de la realización de la actividad; las inquietudes que deberían surgir de los estudiantes y las ideas que el docente debiera considerar para las próximas sesiones. Además se pueden encontrar algunos contenidos complementarios que permiten profundizar lo que ha sido tratado en la propuesta didáctica.

4. Actividades

4.1 El día del azar.

Una introducción al concepto de azar...

Explicación de la Actividad.

En esta actividad se intenta conseguir que los estudiantes relacionen la cotidianidad con lo que ellos entienden como azar y, específicamente la manera en que formalmente es definido tal concepto.

Por tanto se motivará a los alumnos con una historia que les contará el quehacer de un día común en la vida de un estudiante; en este trayecto irán ocurriendo situaciones en las que el azar juega un rol fundamental, dichos eventos serán relacionados indirectamente con el fin que se postula, haciendo consultas a los estudiantes sobre lo que podría ocurrir; para de ésta forma ir guiando a los alumnos a crear una idea, o bien aclarar sus ideas, sobre lo que el azar representa en situaciones diversas.

Luego de una discusión grupal, guiada por preguntas con la finalidad de que los alumnos identifiquen las características de un fenómeno azaroso; se propondrá que los estudiantes definan lo que se interpreta, con relación al concepto de azar.

Finalmente se hará una discusión general, para de esta forma, entregar una caracterización del contenido y hacer la aclaración de las dudas que pueden generarse en los alumnos.

Desarrollo de la Actividad.

Como hemos dicho, se propone la introducción al concepto de azar a través de una historia que vaya desvelando las características de los fenómenos con tal cualidad.

La historia por tanto sería la siguiente:

"...Un día cualquiera de la semana, te levantas temprano para asistir al liceo; tal como todos los días te diriges al paradero para poder tomar alguna micro que te lleve a tu destino, *¿cuál de las micros que te son útiles será la que pase primero?.* Subiéndote a dicha micro, *¿cuántos personas exactamente irán en ésta al momento de pagar tu boleto?*, ya que como es sabido si hay muchos pasajeros puede que la micro demore un poco más y quizás *¿cuántos minutos tardes, en llegar al liceo?.*

Una vez en el colegio, encuentras a tus amigos conversando sobre el programa de televisión que vieron la noche anterior, *¿de qué canal puede haber sido este programa que mantiene en discusión a tus amigos?* Luego de eso ingresa el profesor de Biología que continúa con la materia de la clase anterior, de la cual promete entregar un cuestionario, te preguntas *¿cuántas serán las preguntas que contenga?.* Aunque lo único que tienes claro es que deseas salir a recreo lo antes posible.

Tocando el timbre, al salir a recreo vas directamente al baño; en éste *¿con cuántos amigos te encontrarás para conversar?*. Sea así o no, de todas formas igual el recreo pasará rápidamente porque hay muchas formas de entretenerse, pero pronto deberás volver a la sala.

Al entrar a la clase de historia, todos saben que el profesor elegirá a algún alumno para hacer el recuento de la materia vista en la clase anterior, entonces *¿qué posibilidades hay de que el escogido seas tú?* o peor aún, ya que vienes algo entusiasmado del recreo, *¿serás sorprendido por él cuando estés tirándole papeles a tus compañeros?*

Por suerte la mañana ha pasado rápido y ya es hora de ir al comedor del liceo para almorzar, escuchas en los pasillos que hay legumbres de almuerzo, *¿será posible predecir con exactitud qué tipo de legumbres son?*

Más tarde, luego de ese rico almuerzo de legumbres; debes rendir la prueba de lenguaje, para la cual no has estudiado y decides usar un *"torpedo"*, en el que pusiste un par de preguntas de una larga lista que contenía la guía de estudio. Por tanto, *¿cuál es la posibilidad de que al menos una de las preguntas de la prueba coincidan con las del "torpedo"?* o bien, *¿qué opción hay de que el profesor te sorprenda copiando justo la primera vez que saques el torpedo?*

Terminada la prueba tus ánimos no están de lo mejor. Más aún, luego del recreo el cansancio se comienza a notar; pero sabes que viene la clase de matemática, que tal vez sea una opción para conversar con tus amigos, porque el profesor es bastante "*latero"*. Llega él y les propone trabajar en un nuevo contenido, para el cual comenzarán hablando sobre el azar y, te preguntas *¿cuál es la opción de que este profesor te entregue una guía tan poco matemática como ésta?..."*

<u>Conclusión y Cierre de la Actividad.</u>

Para poder realizar el cierre de la actividad se propone que los estudiantes hagan el análisis de las situaciones planteadas en la historia anterior. Se busca que los alumnos concluyan sobre las características de instancias en las que juegue un rol el azar. Por tanto, se sugieren preguntas como:

- ¿Puedes responder con certeza las preguntas planteadas en el desenlace de la historia?
- ¿Por qué razón crees tú que no es posible asegurar el resultado de dichas situaciones?

- ¿Es posible en cambio, poder intuir los sucesos a ocurrir en cada una de las instancias?
- ¿Qué característica común encuentras en estas situaciones?
- ¿Es posible decir que en estos ejemplos entra en juego el factor suerte?

Preguntas de este tipo, pueden ayudar a los alumnos a aclarar sus ideas con respecto a lo que se conoce como azar; procurando como docentes guiar las discusiones grupales, es importante que sea finalmente consensuada una definición del concepto de azar.

A la vez, se sugiere que los ejemplos planteados sean revisados, encontrando los llamados espacios muestrales; sin necesidad de utilizar estos conceptos que aún los alumnos no son capaces de manejar.

Relevante resulta el hecho de aclarar a los estudiantes que muchas situaciones de la vida están relacionadas con el azar. Pero no toda la cotidianidad se basa en modelos aleatorios; ya que también es posible responder, con exactitud, a inquietudes que surgen de fenómenos que son regidos por leyes científicas.

Sugerencias Finales.

Bajo el supuesto de realizar esta actividad como introducción a la unidad de probabilidades, es importante que el profesor utilice dinamismo y complemente la actividad con situaciones azarosas propuestas por los estudiantes, de esta forma mantener motivados a los estudiantes; no dando instancias para que ellos se distraigan. También es necesario vislumbrar actividades similares a éstas para los siguientes contenidos de la unidad; esto porque no sirve de nada una introducción motivadora para luego terminar utilizando estrategias tradicionales para la enseñanza de los contenidos matemáticos.

4.2 Experimentando en lo cotidiano.

Estudio de los Conceptos de Experimentos Aleatorios, Espacio Muestral y Sucesos.

Explicación de la Actividad.

La presente actividad se enmarca en el concepto de Experimento Aleatorio y las ideas implicadas en este. Se busca que los estudiantes caractericen las nociones de Experimento y, específicamente, aquellos que se presentan de modo aleatorio.

En el transcurso de la actividad, el docente irá conduciendo las deducciones a través de ejemplos; los que en primer lugar permiten diferenciar entre situaciones deterministas y aleatorias.

Se debe mostrar, de forma similar a lo que se hizo con la historia introductoria, que en la cotidianidad se encuentran bastantes situaciones que proponen un modelo aleatorio, en las cuales es viable adelantar las posibles respuestas que podrían suceder. Sin embargo, no se tendrá la certeza de asegurar cuál será el desenlace exacto.

Se mostrará a los alumnos las posibles preguntas a las situaciones aleatorias que se plantean en estudios experimentales; como las respuestas a alguna encuesta sobre un tema de interés o los flujos periódicos de personas u objetos en ciertos lugares o circunstancias.

Una vez que los jóvenes logren identificar las particularidades de los Experimentos Aleatorios, procederán a analizar los conceptos de Espacio Muestral y Sucesos, determinando algunos de ellos. Finalmente, se concluirá la actividad dando formalmente las definiciones de los conceptos tratados; lo que dará paso a las futuras propuestas que se adentran en las propiedades del cálculo de probabilidades.

Desarrollo de la Actividad.

Se comienza dando ejemplos de situaciones cotidianas que corresponden a modelos determinísticos, de ellos se asegura el resultado final. Este tipo de experimentos serán comparados con aquellos de tipo aleatorio, para finalmente proponer una definición de los últimos. Se desea que el docente plantee situaciones como,

a) Un árbol (de hojas caduca) es estudiado al comenzar el otoño, ¿qué pasará con sus hojas en ésta estación? Si el próximo año se pregunta lo mismo, ¿cuál será la respuesta a aquello?

b) Si hay una luz encendida, y presionas su interruptor, ¿qué ocurrirá con la ampolleta?.

c) Al lanzar una piedra al aire (sin existir algo que obstaculice su trayecto), ¿qué ocurrirá con la piedra luego de alcanzar su altura máxima?

d) Una niña tiene 4 monedas de $100, le pide a su papá 2 monedas, del mismo valor, ¿cuánto dinero posee ahora la pequeña?

Debe resultar un consenso, el hecho de que las respuestas a cada una de las interrogantes son indiscutibles; no habrá otra opción para cada uno de los experimentos, esto debido a que cada uno de ellos responde a leyes o principios científicos (biológicos, físicos, matemáticos, entre otros). Serán por tanto, denotados como experimentos determinísticos, ya que independientemente de las veces que se vuelvan a repetir (bajo similares condiciones), los resultados serán siempre los mismos.

Posterior a esto, el profesor podrá proponer situaciones en las que no es posible determinar con exactitud el resultado final o desenlace; dichas situaciones se complementarán con algunas preguntas que acompañen la idea de la incertidumbre presente en los experimentos. Se aclara que el tipo de situaciones se separarán en dos bloques; el primero de ellos intenta ilustrar, únicamente, el concepto de experimento aleatorio, para analizar sus características. Luego de esto, con el segundo grupo de situaciones, se conducirá a los estudiantes a comprender los conceptos de Espacio Muestral y de sucesos, mediante otro tipo de preguntas; las que permitirán a los alumnos visualizar los posibles resultados, ellos podrán identificarlos en distintos experimentos y luego pasar a dar una definición formal de éstos mismos.

El tipo de situaciones a plantear, para el primer grupo, serán como las que siguen,

a) Si se contabiliza el número de vehículos que transitan por la esquina del liceo durante el día. Podrías adelantarte a asegurar, ¿cuántos autos pasarán entre las 13 y las 14 horas?

b) En un partido cualquiera de la selección, se analiza la cantidad de tiros que ataja el arquero chileno durante el transcurso del juego. ¿Cuál será el total de tapadas?, ¿puedes responder con exactitud antes del partido?

c) Tienes la posibilidad de revisar tu correo electrónico solamente los días Domingo, ¿cuántos correos encontrarás en tu bandeja de entrada cada vez que lo revises?

d) En una frutería escoges tres naranjas para pesarlas y luego cancelar, ¿serías capaz de asegurar cuánto pesan exactamente las naranjas seleccionadas?

e) Cada vez que vas al supermercado, te encuentras en las cajas con colas de distinto tamaño. En un día cualquiera, ¿cuántas personas exactamente pasarán por las cajas en el transcurso de tu espera?. O bien, ¿cuántos de ellos cancelan con tarjeta de crédito?

f) Para una tarea de lenguaje debes realizar una entrevista a algún personaje de la ciudad, ¿cuánto crees que será la duración de la grabación?

g) De acuerdo a lo que caminas diariamente dentro del liceo. Con exactitud, ¿cuántos pasos darás en un día cualquiera?, ¿a cuántos metros equivaldrán estos?

Las situaciones antes propuestas buscan la comprensión del concepto de Experimento Aleatorio. Las preguntas planteadas pueden ser complementadas por otras que el docente estime convenientes. Cada ejemplo debe ser aprovechado para representar además, sin tanta profundidad, los conceptos de Variable Aleatoria. Considerando que cada situación se acompaña de un valor a estudiar; esta variable puede ser también analizada, bajo las características de los valores posibles que tomará, siendo éstos continuos (medir algo, como en el ejemplo d) y f)) o discretos (contar, como en a), b), c) y e)). En algunos casos, un mismo experimento puede ser analizado bajo variables continuas o discretas, dependiendo de lo requerido, tal como ocurre en el ejemplo g); donde la cantidad de pasos es un valor discreto, pero los metros a los que equivalen éstos, corresponde a una variable continua.

Otro aspecto importante es la relevancia del análisis de estas distintas situaciones, las que resultarán de utilidad en algunos estudios estadísticos. Tal como se contabiliza el flujo de vehículos en las intersecciones de algunas calles, para estudiar la instalación de un semáforo; así como se analiza la cantidad de clientes en un supermercado, para mejorar u optimizar el servicio. O bien, simplemente preocupa el número de tapadas de un arquero, para determinar su nivel como jugador.

En la siguiente parte, es considerado el segundo grupo de situaciones,

h) Si estás jugando al *“cachipún”* con un amigo, ¿podrías asegurarte de ganar en el primer intento?, ¿qué tipo de resultados pueden darse? (Espacio Muestral)

i) De una alcancía tratas de sacar unas monedas, solamente puedes retirar 2 monedas cualquiera, ¿tendrás certeza de cuánto suman ambas?, ¿qué posibles resultados pueden darse?

j) Para la tarea de biología, el profesor decide sortear las parejas que trabajarán en ella. ¿De que género (sexo) será tu compañero de tarea?, ¿qué posibilidades existen?

k) Conociendo a un nuevo compañero, le consultas si su equipo favorito es el mismo que el tuyo, ¿qué posibles respuestas podrías obtener? ¿te adelantarías a asegurar lo que responderá?

l) Si lanzas un dado al aire, y estudias el número resultante en la cara superior ¿qué posibles resultados existen?

m) Cada mañana, para asistir al liceo, tomas la primera micro (que llegue a tu colegio) que pase por el paradero, ¿cuál será el último dígito en la patente de la micro que tomes en un día cualquiera?, ¿qué posibles resultados existen?

Estas situaciones, acompañadas por preguntas que ayuden a los estudiantes a comprender el concepto de Espacio Muestral; requieren que el docente caracterice dichas ideas y proponga finalmente una definición al concepto. Se visualiza que los ejemplos permiten encontrar con facilidad los posibles resultados. De igual modo, se deben identificar en las situaciones algunos sucesos, para que los alumnos comiencen a manejar todos los conceptos requeridos para el estudio formal de la teoría de la probabilidad.

En el ejemplo h), puede consultarse a los estudiante sobre los resultados que permiten que se gane el juego; o bien, aquellos que favorezcan al oponente, vislumbrando de ésta forma algunas ideas sobre lo que sería un suceso. También se puede referenciar el ejemplo i), explicando que un grupo de resultados, tales como los pares de monedas que suman más de $100, será considerado como un suceso; del cuál a futuro se verán otras características más específicas.

Conclusión y Cierre de la Actividad.

Para finalizar la actividad se propone que el docente se apoye de las definiciones de Espacio Muestral y Suceso, de ésta manera son formalizadas las ideas que los estudiantes construyeron con los ejemplos, respecto a las particularidades de dichos conceptos.

El docente también podrá presentar otros ejemplos y pedir a los estudiantes que determinen los Espacios Muestrales, proponiendo con palabras algunos sucesos, para luego ser identificados en concreto, de acuerdo a los elementos del Espacio Muestral. Por ejemplo, para la situación de la patente de la micro, puede proponerse el evento o suceso de que el dígito final corresponda a un número impar, un número primo o un número mayor que 5, entre otros.

Sugerencias Finales.

Hasta ahora las actividades que han sido propuestas representan una introducción a los conceptos requerido para el estudio de la teoría de probabilidad. Importante es verificar que los estudiantes comprendan las ideas referidas a este contenido. Por tanto, se debe procurar una constante evaluación de los aprendizajes de los alumnos, consultando a la mayoría y haciéndolos participes de las actividades en el aula.

En lo sucesivo, las actividades venideras se adentran en propiedades que permiten ir concretando los elementos requeridos para el cálculo de probabilidades. Encontrándose formalizaciones matemáticas más teóricas, que requerirán de un mayor trabajo en clases, para procurar el aprendizaje de los estudiantes.

4.3 Un conjunto de propiedades

Estudio de las Propiedades de la
Teoría de Conjuntos útiles en Probabilidades.

Explicación de la Actividad.

En estos momentos los estudiantes ya manejan los conceptos básicos asociados a la teoría de la probabilidad. En más, para la presente actividad se requiere que sean formalizadas las nociones de Espacio Muestral y Suceso. Se aclara que el Espacio Muestral es denotado por la letra griega Ω (omega mayúscula); y algún suceso o evento de éste, es asignado por una letra mayúscula de nuestro alfabeto (A, B, C, …).

Los objetivos de esta actividad, son entonces, poder enunciar eventos, mediante palabras y desarrollarlo por extensión, enumerando los elementos de éstos. Se tratarán además las nociones de complemento, intersección y unión entre sucesos. Caracterizándolas mediante ejemplos que permitirán visualizar los elementos que le van conformando en diversas situaciones.

Para finalizar, se trabaja el concepto de cardinalidad, determinando en algunos Espacios Muestrales y sucesos, el valor de aquello. Y se deducirán las propiedades básicas asociadas a la cardinalidad del complemento de un suceso y la unión entre dos eventos.

Desarrollo de la Actividad.

Comienza el trabajo de la actividad con un ejemplo que venga a reforzar las ideas de la notación de un suceso y del Espacio Muestral. Es importante decir que, en la mayoría de los experimentos aleatorios es necesario buscar los posibles resultados. No obstante, para ejemplificar de mejor manera, serán utilizadas algunas situaciones en que el Espacio Muestral es propuesto inicialmente.

El ejemplo introductorio será;

a) Un niño tiene el día Lunes clases de Matemática, Música, Lenguaje, Historia y Artes. Su madre ha forrado todos sus cuadernos del mismo color. En cierto momento, el niño saca un cuaderno al azar desde su mochila, ¿a qué asignatura corresponderá el seleccionado?

Se tiene para esto, el Espacio Muestral dado por,

Ω = {Música, Matemática, Artes, Historia, Lenguaje}.

El que es posible denotar por: Ω = Todos los cuadernos dentro de la mochila.

Surge ahora la pregunta, ¿qué cuadernos **no** utilizará en la asignatura de Lenguaje?. Los que consisten en un grupo del total de los que están en la mochila. A saber, un grupo que forma parte del Espacio Muestral, se denominará subconjunto de Ω. Es posible ahora resumir dicho grupo, denotándolo con un letra A, y concluir que A = {Música, Matemática, Artes, Historia}. Hágase notar que todos los elementos de A están en Ω, particularidad de ser un subconjunto (A □ Ω).

El suceso A en palabras será:

A = Cuadernos dentro de la mochila que **no** son de Lenguaje.

Otro ejemplo de subconjuntos (suceso), sería considerar los cuadernos de las asignaturas que terminan con la "letra a". Será llamado B, en esta situación, B = {Música, Matemática, Historia}, y en palabras se escribirá,

B = Cuadernos de las asignaturas que terminan con la "letra a".

Se sugiere por ejemplo, preguntar a algún alumno o alumna, cuáles asignaturas le agradan, le desagradan o en cuáles tiene mejores calificaciones. De esta manera se definirán otros subconjuntos.

C = Cuadernos de las asignaturas que le gustan a Carolina.

D = Cuadernos de las asignaturas en que Arantzazú tiene un promedio superior a 6.

En el momento en que el docente se asegura que los ejemplos han sido comprendidos; procede a caracterizar los conceptos de complemento, intersección y unión entre conjuntos. Para aquello, una opción es mantener el mismo ejemplo de los cuadernos, o bien proponer una nueva situación.

Para representar las siguientes propiedades, un ejemplo de utilidad sería:

b) Un grupo de 8 amigos se encuentran descansando en la plaza de Temuco (José, Yanira, Luís, María, Manuel, Verónica, Nicolás y Javiera). De ellos se sabe que solamente María, Javiera y Nicolás son de Temuco. Un turista los encuentra y pregunta a uno de ellos (al azar) por una dirección dentro de la ciudad.

La situación se plantea bajo la lógica de un Experimento Aleatorio, por lo que,

Ω = Los 8 amigos que descansan en la plaza.

De ésta situación se toman los sucesos.

A = El consultado es de Temuco.

B = El consultado es una mujer.

Obteniendo que,

A = {Javiera, María, Nicolás} y

B = {Yanira, Verónica, Javiera, María}

El docente podrá preguntar por aquellos jóvenes que **no** son de Temuco, se dirá que ellos son: José, Yanira, Luís, Manuel y Verónica. Quienes por dicha particularidad se podrán identificar como el suceso,

A^c = el consultado **no** es de Temuco.

Usando esa notación, porque al comparar los integrantes de A^c, se asegura que éstos son los amigos que **no** son parte de los elementos de A. De otra forma, son los jóvenes que le faltan a A para “completar” todo el grupo de amigos. De esta manera, A^c es llamado el complemento de A. Osea A y A^c se “complementan” para formar el total. De forma similar, se puede ver que B^c, serían los amigos que NO cumplen con B, es decir

B^c = el consultado es un hombre.

Se supondrá ahora que al turista “le gustaría” ser ayudado por una persona que sea de Temuco “o” por una mujer; para esa condición los jóvenes que pueden ayudar al turista son: Javiera, María, Nicolás, Verónica y Yanira.

Resulta importante que el alumno visualice la idea de que estos jóvenes cumplen con pertenecer a A “o” pertenecen a B. De esta forma, ellos serán considerados como integrantes del suceso A U B, que se refiere a la unión de los conjuntos A y B (compuesto por los elementos que pertenecen a A ``o'' que pertenecen a B).

Posteriormente, se planteará a los estudiantes que por las intenciones del turista, es lógico que lo que realmente le conviene a él, es ser ayudado por una mujer que sea de Temuco. Es decir, una persona que cumpla las condiciones de ser de la ciudad (A) “y” de ser mujer (B). Las niñas que ayudarán de mejor forma al turista serán Javiera y María; ellas cumplen con la condición A y B, al mismo tiempo.

Se llamará ésta idea la intersección entre A y B, denotado por $A \cap B$ y formado por los elementos que tienen en común A y B.

Una vez que se han visto estas ideas, el docente comentará el concepto de cardinalidad de un conjunto, explicándolo como el número de elementos presentes en éste. Así, encontrar la cardinalidad del Espacio Muestral, denotado por $\#\Omega$, contar los posibles resultados del Experimento Aleatorio. Una observación importante, es que la cardinalidad será siempre un número Natural (porque se está contando) y particularmente, $\#(\Omega) \geq 2$; ya que si se refiere a un Experimento Aleatorio, el Espacio Muestral deberá poseer, al menos, dos opciones (para reafirmar la idea de incertidumbre).

Del ejemplo a), se obtiene que $\#(\Omega) = 5$, en el caso de la situación en b), $\#(\Omega)=8$. Se intenta de esto, poder reconocer algunas propiedades; en consideración del ejemplo b). Si de dicha situación se busca #(A), la que es igual a 3. Al mismo tiempo, $\#(A^c) = 5$. Para el suceso B, se dirá que $\#(B) = 4$ y $\#(B^c) = 4$. La conclusión que se debe considerar es que si A^c está conformado por los elementos que no están en A, se cumplirá siempre que:

$$\#(A) + \#(A^c) = \#(\Omega)$$

Finalmente, se consulta a los estudiantes sobre cómo calcular $\#(A \cup B)$. Una posible respuesta es la idea de que se conocen los integrantes de $A \cup B$, los que son Verónica, Yanira, Javiera, María y Nicolás; por lo que $\#(A \cup B) = 5$. No obstante, es posible proponer la opción de contabilizar los elementos de A y los elementos de B, pero al sumar éstas cantidades, se estarán contando dos veces algunos integrantes. Ya que si $\#(A) = 3$ y $\#(B) = 4$, es claro que se cuenta a Javiera y María en ambos casos. Se debe recordar, que éstas dos niñas cumplían con A y con B, al mismo tiempo, lo que fue llamado $A \cap B$.

Por tanto, para considerar $\#(A \cup B)$, se tomará #(A) y #(B), pero se deberá quitar los elementos repetidos, que fueron encontrados con $\#(A \cap B)$. Es decir:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Conclusión y Cierre de la Actividad.

Un detalle importante al cierre es proponer ejemplos en los que la intersección de los conjuntos no existe, y de ésta forma mostrar que esos casos la manera de calcular la cardinalidad de la unión será dada por

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

Se comentará que estas nociones de contar, hasta ahora serán vistas bajo la lógica de que las cardinalidades requerirán de enumerar los elementos de cada conjunto. Mas, en actividades relacionadas a los conceptos de combinatoria, se deberá indicar que es posible encontrar las cardinalidades utilizando métodos más rápidos y precisos.

Sugerencias Finales.

Recomendable puede resultar ejemplificar las situaciones mediante diagramas de Venn, para que los alumnos identifiquen los conceptos de intersección y unión de manera más gráfica. Más aún, se pueden entregar algunos datos, en alguna situación, para que ellos efectúen el diagrama de Venn y hagan coincidir las cardinalidades implicadas en el problema.

4.4 Lo clásico en probabilidades

*Desarrollo del Concepto de Probabilidad Clásica
y la Fórmula de Laplace para el Cálculo de Probabilidades.*

Explicación de la Actividad.

La actividad propuesta para este contenido busca guiar a los estudiantes en concluir la necesidad, en la que se basa la teoría de la probabilidad clásica, de suponer cierto tipo de experimentos como sucesos equiprobables. De este modo se analizan las características y propiedades de dichos eventos.

Se trabajarán experimentos aleatorios (particularmente con sucesos equiprobables), los que serán abordados de modo que se irán planteando preguntas que guiarán a los estudiantes para que deduzcan ellos mismos, situaciones en las que se encuentran ante sucesos con igual probabilidad. Avanzando de esta forma en la actividad, se busca que los estudiantes comprendan el por qué se plantea que el cálculo de la probabilidad clásica, implica considerar la cantidad de casos posibles y la cantidad de casos favorables, para con ello aplicar la proporción y obtener la probabilidad de cierto suceso.

El objetivo de la actividad, por tanto, es que el docente vaya guiando a los alumnos para que ellos identifiquen la fórmula de probabilidad clásica como una noción matemática, que nace de la deducción humana; surgida por el análisis de situaciones similares a las que los estudiantes revisarán en esta parte del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como ya se han manejado los conceptos de Espacio Muestral, Suceso y otros necesarios para la comprensión de las propiedades de la probabilidad clásica; es de esperar que simplemente baste un repaso mediante ejemplos, que retraten de la forma más sencilla y concreta a los alumnos, las características propias de estos. Sin embargo, se hace hincapié que algunas notaciones necesarias para esta parte de la unidad deben ser vistas en estos momentos, tales como la *probabilidad de un suceso A*, denotado por *P(A)*.

Desarrollo de la Actividad.

Progresivamente el docente irá situando a los estudiantes ante experimentos aleatorios con distintas características, la particularidad de ellos es la equiprobabilidad de sus sucesos, lo que permitirá deducir de ésta forma, la fórmula del cálculo de probabilidad clásica dada por Laplace.

Se proponen a continuación algunas situaciones, en el orden progresivo que se busca, las que se complementan con preguntas que favorecen las conclusiones de los estudiantes.

a) En una caja oscura, se sabe que hay 100 bolitas, de éstas hay 90 bolitas azules, 5 bolitas verdes y 5 bolitas rojas. Se extrae una bolita al azar.

- ¿Qué es más probable, extraer una bolita azul o una roja?
- ¿Qué color de bolitas tiene más posibilidades de salir?
- ¿Crees que es más probable sacar una bolita roja que una verde? ¿Por qué?

Observación: Este tipo de ejemplos hará en el estudiante crearse la idea de que hay situaciones en que los sucesos estudiados no poseen iguales posibilidades de ocurrir, lo que más adelante se le darán a conocer como sucesos no equiprobables.

b) Suponer la situación en que un equipo de fútbol está 5 puntos por debajo del puntero del torneo, quedando solamente un partido. De acuerdo a los posibles resultados del último partido que dispute el equipo.

- ¿Cuáles son los posibles resultados del encuentro?
- ¿Cuántas opciones hacen que el equipo sobrepase al puntero?
- ¿Qué probabilidad posee el equipo de salir campeón?

Observación: En esta situación se busca que el estudiante identifique que es “imposible” que el equipo sobrepase al líder, que en otras palabras de dice que tiene “cero” posibilidades (probabilidad) de salir campeón.

c) Si dentro del curso se selecciona un estudiante, ¿Qué posibilidades existen de que el alumno o la alumna tenga menos de 20 años de edad?

- ¿Se tendrá la certeza de que eso ocurrirá? ¿Por qué?
- Del total de estudiantes de la clase, ¿cuántos de ellos tienen menos de 20 años de edad?

Observación: Con el ejemplo mencionado se intentará que los estudiantes utilicen la idea de que están completamente seguros de que el suceso ocurrirá. Es decir, que expresen que están “cien por ciento seguros” de que la situación ocurrirá al realizar el experimento. Lo que será complementado más adelante, cuando sea denotado con el valor 1.

d) Del ejemplo planteado en el capítulo anterior, referente al *cachipún*, se había intentado deducir que dicho juego era equitativo, ya que las posibilidades de ganar, empatar o perder eran las mismas para ambos jugadores.

- Se vuelve a preguntar ¿cuántas opciones dan como ganador al segundo niño?
- Si el primer niño saca Tijera, ¿cuántas opciones tiene su contrincante para ganar?

Observación: Este ejemplo proporciona las bases para poder deducir la equiprobabilidad en situaciones sencillas, es claro que ningún jugador tiene más opciones de ganar.

e) Lanzar una moneda al aire

- Qué opción presenta más posibilidades de salir, ¿cara o sello?
- ¿Por qué razón crees, que en los partidos de fútbol, el árbitro arroja una moneda al aire para que los capitanes escojan el lado en que desean jugar?
- ¿Podrán los futbolistas asegurar que una opción (cara o sello) tiene más opciones, para tener certeza de que ganarán el sorteo?

Observación: Finalmente ejemplos como estos intentan que el estudiante deduzca las características de sucesos equiprobables y también comprendan que en ocasiones, convenientemente se definen distintos sucesos como equiprobables; lo que suele suceder cuando no se tiene la certeza de afirmar lo contrario.

Para continuar la actividad se explicará a los estudiantes la forma en que las probabilidades se reparten equitativamente entre sucesos equiprobables, para así hacer comprender que las probabilidades se van conformando como la relación existente entre los casos favorables y los casos posibles.

Un detalle importante es que una fórmula requerida para determinar las probabilidades, debe tener la característica de que un suceso con más elementos, tiene una mayor probabilidad de ocurrir, ya que la razón su cardinalidad es más grande. También es necesario reconocer que la probabilidad de un suceso seguro, debe ser la máxima probabilidad que pueda alcanzar cualquier suceso. Y un suceso imposible debe resultar en una probabilidad cero.

Agregando la idea de que es claro que en el ejemplo a), es más probable obtener una bolita azul que una roja (porque hay más bolitas de color azul), así como en el ejemplo d) la probabilidad de que gane el primer niño es igual a la probabilidad de que gane el segundo, porque la cantidad de situaciones que favorecen a ambos son las mismas.

Entonces, de acuerdo a las características de la primera situación, es posible preguntarse, tal como Laplace pudo haberse cuestionado; *¿cuántas bolitas hay en la urna?, ¿de un total de cuántas?*, pudiendo por tanto proponer una razón entre las cantidades, dada por:

$$\frac{\text{número de bolitas azules}}{\text{número total de bolitas}} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta expresión (razón) posee la característica importante de que al considerar el número de casos favorables en el numerador de la razón, se deduce por tanto que el valor resultante de un suceso con más elementos, será mayor al de un suceso con menos elementos.

Así entonces, como ocurre en el caso c), si todos los estudiantes cumplen con la condición pedida, se verifica que la razón propuesta terminará con un valor correspondiente a 1; ya que el número de casos favorables es igual al número de casos posibles. Esta idea es reafirmada con el capítulo referente a las nociones de la teoría de conjuntos; donde se dijo que cualquier evento no puede tener más elemento que el espacio muestral; por lo que la probabilidad no será mayor que 1.

También se puede afirmar, que para el ejemplo b), la probabilidad de ganar el campeonato, que se asigna al equipo es 0, ya que de las opciones totales (casos posibles) ninguna de ellas le permite resultar campeón (casos favorables).

De otra forma la razón entre la cantidad de elementos de un suceso (casos favorables) y la cantidad de elementos del Espacio Muestral (casos posibles), que se ha visto considera la necesidad de asignar mayor probabilidad a algún suceso con más elementos favorables. Y toma valores que están entre 0 (para un suceso imposible) y 1 (para un suceso seguro). Lo que será definido como probabilidad clásica:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} \qquad P(A) = \frac{(A)}{\Omega}$$

Teniendo definida esta fórmula, se analizan las propiedades relacionadas al cálculo de la probabilidad clásica. Para ello es necesario referenciar las características vistas en el capítulo sobre la teoría de conjuntos.

i) Recordando que un suceso A, se define como un subconjunto del Espacio Muestral Ω. Y como #(A) se refiere a contar los elementos de A, se afirma que $0 \leq \#(A)$, de forma similar $2 \leq \#(\Omega)$ (ya se vio que el Espacio Muestral deberá poseer a lo menos dos posibilidades). También es sabido que la cantidad de elementos de un conjunto no puede ser inferior a la cantidad de elementos de alguno de sus subconjuntos. Lo que permite asegurar,

$$0 \leq \#(A) \leq \#(\Omega)$$

Por tanto, si se divide todo por $\#(\Omega) > 0$.

$$\frac{0}{(\Omega)} \leq \frac{(A)}{(\Omega)} \leq \frac{(\Omega)}{(\Omega)} \quad \text{y} \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$$

ii) Como también se ha visto, $\#(A) + \#(A^c) = \#(\Omega)$

De la misma forma, al dividir todo por $\#(\Omega) > 0$ $\quad \frac{(A)}{(\Omega)} + \frac{(A^c)}{(\Omega)} = \frac{(\Omega)}{(\Omega)}$

esto es, $\quad P(A) + P(A^c) = 1$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

iii) Otra propiedad importante, se refiere al cálculo de la probabilidad de la unión de dos eventos,

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Dividiendo por $\#(\Omega) > 0$.

$$\frac{(A \cup B)}{(\Omega)} = \frac{(A)}{(\Omega)} + \frac{(B)}{(\Omega)} - \frac{(A \cap B)}{(\Omega)}$$

así, $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Resumiendo, se tienen las propiedades:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) = 1 - P(A^c)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Estas propiedades serán de gran utilidad a la hora de resolver problemas de probabilidad en situaciones cotidianas y, específicamente, en las futuras actividades propuestas por este trabajo.

Conclusión y Cierre de la Actividad.

Al realizar el cierre de la actividad, el docente debe plantear situaciones sencillas en las que sea necesario calcular probabilidades, considerando cautelosamente, el espacio muestral y los casos favorables para cada una de las situaciones. Se busca entonces comprobar el aprendizaje de los alumnos con respecto a la llamada fórmula de Laplace.

Se deberá considerar constantemente las dudas que surjan de los estudiantes, para asegurarse de que la metodología utilizada ha sido efectiva; en caso contrario es necesario rescatar otros ejemplos que motiven a los estudiantes y cumplan con los objetivos que se vean más débiles.

Sugerencias Finales.

Los ejemplos considerados en la actividad deben ser analizados detalladamente, adelantándose a las posibles respuestas y deducciones de los estudiantes, para que no ocurra que algún ejemplo destinado a cumplir cierto objetivo, termine desviándose y no cumpla la labor correspondiente. Es importante también rescatar situaciones que a los propios estudiantes les surjan como propuestas para ciertos ejemplos, con lo que se puede complementar las nociones que el docente posee, y desea que los alumnos conozcan, con la visión propia de los estudiantes.

Conclusiones

Debemos reconocer que las actividades propuestas por el autor no serán las que mejoren los aprendizajes de todos los alumnos (lo que tampoco es su intención). Sin embargo, es *bastante probable* que la inclusión de situaciones de este tipo permita una mejor recepción de los contenidos por parte de los estudiantes.

Pensamos importante que para la enseñanza de la probabilidad sean manejados los principales conceptos, desde los más básicos como el concepto de azar; además de las propiedades de la teoría de conjuntos: como también se desea el conocimiento de los métodos de conteo aportados por la teoría combinatoria; particularmente el principio de la multiplicación, potente herramienta para determinar las cardinalidades de los Espacios Muestrales y de algunos Sucesos. Las actividades desarrolladas, que fortalecen lo mencionado antes, permitirán a los estudiantes poseer una base importante para el desarrollo de los futuros contenidos de probabilidades. Al mismo tiempo, éstas propuestas servirán de base para el entendimiento posterior de los principios básicos de la estadística descriptiva e inferencial.

Esperamos con este trabajo poder motivar la creación de nuevas propuestas para la enseñanza de los contenidos de la unidad de probabilidades. Y resaltar la necesidad de cambio y del intercambio respecto del tipo de actividades y ejemplos en la enseñanza de esta unidad, mostrando situaciones que *intentan dejar de lado* el típico lanzamiento del dado y la moneda.

Finalmente convocamos al desarrollo de una nueva academia, y particularmente un impulso que surja en primera instancia de los futuros educadores, para de esta forma, poder renovar las propuestas de enseñanza de esta ciencia, que cada vez más y con mayor fuerza va tomando posición en el desarrollo científico, tecnológico y práctico de nuestra sociedad.

Reconocimiento

Trabajo que forma parte de la tesina de pregrado del autor, bajo la supervisión del profesor Dr. Antonio Sanhueza Campos en la Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

Bibliografía

Andradas, C. (2000). Lo que usted estudió y nunca debió olvidar en matemáticas. Acento, Madrid. España.

Autor, M. (1997). Precálculo. Pearson Educación, D.F. México.

Dacunha-Castelle, D. (1996). Les Chemins de l'Aléatoire. (Primera Edición). Flammarion, Paris. Francia.

De León, M. (2006, 30 de Enero). La importancia de las Matemáticas. El País, opinión. Recuperado el 16 de Octubre de 2007, de www.elmundo.com

Gardner, H. (1997). La mente no escolarizada. Paidós Ibérica. Barcelona. España.

Jiménez, L., Jiménez, J. R. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, 6(1).

Nuñez, F., Sanabria, G., García, P. (2004). Sobre la probabilidad, lo aleatorio y su pedagogía. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet, 5(1).

Obagi, J. (2003). Elementos de teoría de probabilidad para ingenieros. Bogotá: Centro Editorial Javeriano.

Ochsenius, M. (1999). Diseño y elaboración de un instrumento para evaluar innumeralismo en adultos. Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago: Chile.

Santaló, L. (1999). Hacia una didáctica humanista de la matemática. Troquel S.A. Buenos Aires. Argentina.

Ugochukwu, L. (2004). Matemáticas amenas. Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

Vygotsky, L.S. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.

Manuel Alejandro González Navarrete: es profesor de estado en matemática, Universidad de La Frontera, Chile (2008). Posee el título de magíster en estadística por la Universidade de Sao Paulo, Brasil (2011). Actualmente es alumno del programa de doctorado en estadística de la misma institución. Su área de investigación son los sistemas de partículas interactuantes y tiene especial interés en la educación estadística. **manuelg@ime.usp.br** y **www.ime.usp.br/~manuelg**