REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 265-271

Construcción de una caja rectangular de volumen máximo: Indagaciones geométricas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Zoila tiene una lámina rectangular de 36 cm por 27 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), de máximo volumen, que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la lámina? (No considerar solapas para las uniones)

Este problema surgió en un taller de creación de problemas con profesores de secundaria de la especialidad de matemáticas, pero se origina en un taller similar con profesores de primaria, teniendo como situación inicial únicamente el hecho de disponer de una lámina rectangular de las dimensiones dadas.

Como se verá en este artículo, se llega a proponer este problema luego de indagaciones geométricas que llevaron a otros problemas, partiendo de la situación inicial. Las socializaciones de los trabajos en grupo fueron fuente de nuevas indagaciones constructivas, tanto para llegar a la formulación del problema, como para las reflexiones sobre las soluciones que se iban encontrando.

Cabe mencionar que si bien estamos ante un problema de optimización que puede resolverse usando cálculo diferencial, inclusive considerando una función de tres variables y el método de los multiplicadores de Lagrange, las indagaciones no solo llevaron a una solución muy aproximada a la que se obtiene por tal método, sino que – como se muestra – llevaron a otra solución, que es fuente para nuevas indagaciones, preguntas y conjeturas.

Situación inicial y creación de problemas

Una de las formas de crear problemas es “dejando volar la imaginación matemática” a partir de una situación dada. En nuestro enfoque de creación de problemas, esta es una forma de crear problemas que llamamos “*por elaboración*”; en este caso, por elaboración libre. Ciertamente, la creación de problemas a partir de una situación dada, está muy relacionada con la indagación en matemáticas, pues ambas actividades conllevan el plantearse preguntas.

La situación que se propuso en un taller de creación de problemas, con profesores de primaria, fue la siguiente:

> *Zoila dispone de una lámina de cartulina en la cual está representado un rectángulo de 27 cm de ancho y 36 cm de largo.*

A continuación, algunos de los problemas que crearon los profesores de primaria, trabajando en parejas:

Prob. 1

Si la región rectangular dibujada representa el piso de un patio, en una escala de 1/100, ¿cuáles serán las dimensiones de las losas cuadradas más grandes que se usen sin partir, para embaldosar el patio?

Prob. 2

¿Cuánto debo aumentar al ancho y disminuir al largo del rectángulo representado para obtener un cuadrado del mismo perímetro que tal rectángulo?

Prob. 3

¿Cuánto debo añadir al ancho y quitar al largo del rectángulo dibujado para obtener un cuadrado cuya área sea la misma que la de tal rectángulo?

Prob. 4

¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la región rectangular mostrada en la lámina?

El problema 4 está muy relacionado con el problema propuesto al inicio de este artículo y le prestamos especial atención. En la sesión con profesores de primaria, la primera idea que surgió para resolverlo fue la de formar un cubo, e hicieron su diseño, como se muestra en la figura 1

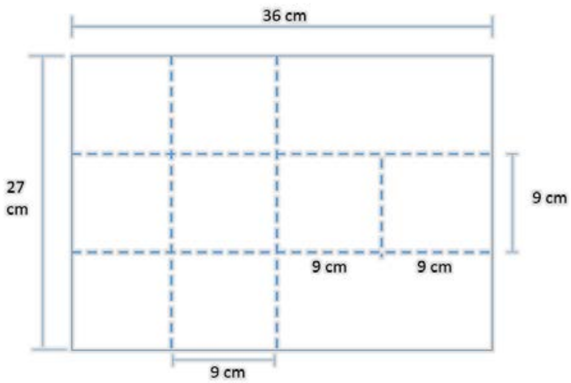

Figura 1

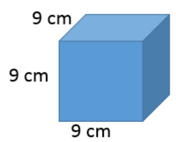

Figura 2

Tal diseño corresponde al cubo que mostraron en un dibujo como el de la figura 2. Resulta evidente que el volumen de tal cubo es

$$(9\text{cm})^3 = 729 \text{ cm}^3.$$

Indagaciones geométricas

Indagando otras posibilidades de construcción de la caja con tapa, en trabajo intergrupal propusieron otro diseño, como el que se muestra en la figura 3, que corresponde a la caja mostrada en la figura 4, cuyo volumen es

$$(19 \text{ cm})\text{x}(14 \text{ cm})\text{x}(4 \text{ cm}) = 1064 \text{ cm}^3$$

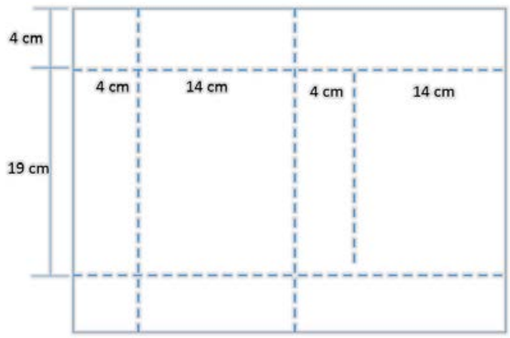

Figura 3

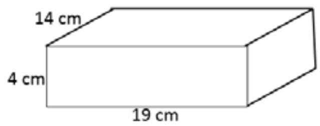

Figura 4

Al advertir, en la socialización amplia, que el volumen de esta caja es mayor que el volumen del cubo, surgió la pregunta: ¿será posible construir otra caja con mayor volumen? Se pasó entonces a la búsqueda del diseño y un grupo obtuvo el que se muestra en la figura 5, que corresponde a una caja cuyo volumen es

$$(17 \text{ cm})\text{x } (13 \text{ cm}) \text{ x } (5 \text{ cm}) = 1105 \text{ cm}^3$$

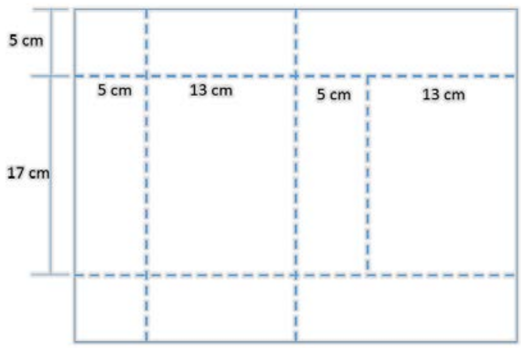

Figura 5

Entonces, de manera natural, surgió la pregunta sobre la existencia de otro diseño sobre la misma lámina rectangular, con el cual se pudiera construir otra caja de mayor volumen. Los intentos no tuvieron éxito.

Quedó claro que no había una respuesta única a la pregunta formulada en el Prob. 4. La respuesta podría ser única si se pide la construcción de la caja con tapa de máximo volumen. Hice notar que todos los intentos para diseñar esa caja fueron considerando solo números enteros (obviamente positivos) y que no había razón para descartar los números racionales; y en una perspectiva matemática, considerar inclusive los números irracionales. Una profesora usó el diseño de la figura 5 y propuso las dimensiones 18 cm y 13,5 cm para la base rectangular y 4,5 cm para la altura, pero se verificó que el volumen correspondiente es 1093.5 cm^3, que no es mayor que el obtenido. También comenté que así tenemos ya un problema de optimización matemática y que hay formas de resolverlo usando el cálculo diferencial. Así, se puede considerar una función objetivo de tres variables – el volumen del paralelepípedo – y dos restricciones, dadas por las dimensiones de la lámina rectangular. Ciertamente este enfoque está fuera del conjunto de conocimientos que normalmente se imparten a los profesores de primaria, inclusive a los de secundaria.

Un taller con profesores de secundaria

En un trabajo similar, con profesores de secundaria, ante la misma situación, se crearon diversos problemas. A continuación, dos de los problemas creados en este taller, diferentes a los propuestos en el taller con profesores de primaria

Prob. A

> *¿En qué porcentajes se podrían modificar las longitudes del ancho y el largo del rectángulo dibujado para que el área de la región rectangular aumente en 20%?*

Prob. B

> *¿Cuáles son las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se puede construir con la lámina rectangular de 27 cm de ancho por 36 cm de largo?*

Luego de la socialización de estos problemas, sobre todo del Prob. B, surgió el problema de optimización que hemos comentado, a partir del Prob.4 y quedó formulado como lo hemos presentado al inicio de este artículo.

Prob. C

> *Zoila tiene una lámina rectangular de 36 cm por 27 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del paralelepípedo recto (caja con tapa), de máximo volumen, que se puede construir haciendo cortes y dobleces en la lámina? (No considerar solapas para las uniones)*

En los trabajos en parejas y en la socialización amplia, se tuvo propuestas y discusiones similares a las del taller con profesores de primaria. Considerando su mayor conocimiento de las matemáticas, formulé el problema de optimización matemática, considerando un diseño similar a los que ya hemos visto, pero considerando variables en lugar de números por ensayo y error, como se muestra en la figura 6

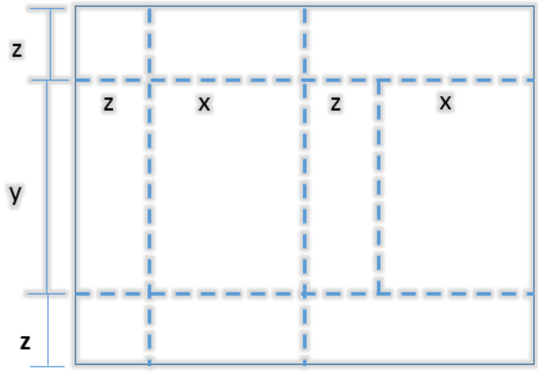

Figura 6

Así, el volumen de la caja diseñada es

$$V = xyz,$$

que es la función objetivo del problema de optimización.

Las restricciones en este problema están dadas por la longitud del ancho y del largo del rectángulo presentado en la situación inicial, y observando la figura 6, debe cumplirse que:

$$y + 2z = 27 \quad \text{y} \quad 2z + 2x = 36 \qquad (1)$$

Una restricción adicional, que parece obvia, pero que es importante hacerla explícita en estos problemas, es la no negatividad de las variables.

Tenemos entonces el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & xyz \qquad (2) \\ \text{Sujeto a:} \quad & y + 2z = 27 \\ & 2z + 2x = 36 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{aligned}$$

Es un problema de optimización con tres variables y dos restricciones. Parece natural resolverlo empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, pero también puede resolverse llevándolo a un problema de optimización de una función cúbica de una variable. Si la variable que elegimos es x, entonces su valor óptimo se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 15x + 27 = 0$ y en consecuencia es un número irracional, cuya aproximación racional con dos cifras decimales es 12,91.

Una vez hallado el valor óptimo de x, es fácil hallar los valores óptimos de y y de z, usando las restricciones dadas en (1). En consecuencia, y considerando aproximaciones racionales a los números irracionales resultantes, decimos que las dimensiones de la caja de volumen máximo son

Ancho de la base rectangular (x): 12,91 cm

Largo de la base rectangular (y): 16,82 cm

Altura (z): 5,09 cm

Curiosamente, el volumen correspondiente (máximo) es 1105,27 cm^3, que es bastante cercano al obtenido por ensayo y error en el taller con profesores de primaria.

Nuevas indagaciones

Comentando este problema con el colega Sergio Petrozzi, con quien creamos y resolvimos muchos problemas de optimización cuando compartimos cátedra impartiendo el curso de Matemática para Economistas, surgió el reto de indagar en torno a la pregunta *¿habrá otra forma de construir la caja, con un diseño diferente al usado para resolver el problema (2), que tenga volumen mayor que 1105,27 cm^3?*

A los pocos días, Sergio me llevó el diseño de la figura 7, que corresponde a la caja que se muestra en la figura 8.

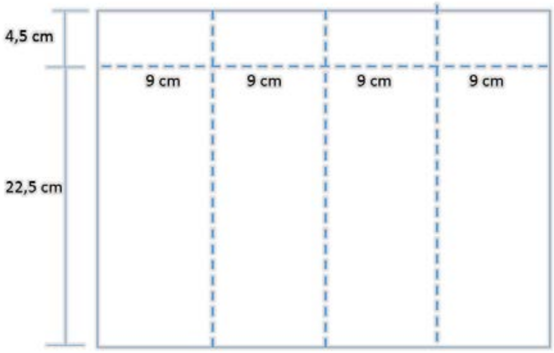

Figura 7

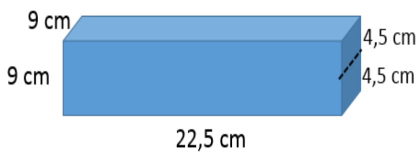

Figura 8

Así, la caja con tapa diseñada tiene el volumen

$$(22,5 \text{ cm}) \times (9 \text{ cm}) \times (9\text{cm}) = 1822,5 \text{ cm}^3$$

que evidentemente es mayor al obtenido antes y que además tiene la ventaja de no desperdiciar material, pues se usan los 972 cm^2 de la lámina rectangular de 27cm x 36 cm.

Quedan entonces preguntas para indagar y con ellas conjeturar, para demostrar o rechazar tales conjeturas. A continuación cuatro de tales preguntas:

- ¿La caja con tapa mostrada en las figuras 7 y 8 es la de volumen máximo que se puede construir a partir de una lámina rectangular de 27 cm de ancho por 36 cm de largo?
- ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo si la lámina rectangular que se dispone es de 30 cm de ancho por 40 cm de largo?
- ¿Existe algún programa computacional para uso práctico en talleres de construcción de cajas de madera o metal?

- ¿Cuál es el modo racional de obtener la caja de volumen máximo, partiendo de una lámina rectangular, de dimensiones a cm y b cm, de modo que no se desperdicie el material?

Comentarios

1. Es muy importante cultivar y estimular el aprendizaje de la matemática mediante la indagación. En este artículo y las experiencias narradas se hacen evidentes relaciones de la indagación con la creación y resolución de problemas, y con las conjeturas y demostración o rechazo de ellas. Diseñar y concretar experiencias didácticas – con profesores y alumnos – que estimulen el desarrollo de estas relaciones, contribuirá a cultivar el pensamiento matemático y científico en general.

2. Hemos transcrito algunos de los otros problemas creados en los talleres con profesores de primaria y de secundaria y no nos hemos detenido en ellos ni hecho comentarios, pero, ciertamente, son interesantes y también se relacionan con el aprendizaje de la matemática mediante la indagación. El lector queda invitado a analizarlos, a hacer comentarios y a usarlos como problemas iniciales para crear otros por variación de estos.