REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 51. Diciembre 2017
Páginas 83-106

# Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori

**Francisco Regis Vieira Alves**

**Fecha de recepción: 26/04/2017**
**Fecha de aceptación: 07/09/2017**



| | |
|---|---|
| **Resumo** | O presente trabalho descreve as duas primeiras etapas de uma Engenharia Didática clássica com o tema relacionado com propriedades da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Reconhecidamente, tais noções foram introduzidas, recentemente, na literatura científica por Anatassov (2011; 2012), entretanto, algumas propriedades combinatórias e identidades podem ser investigadas com um recurso computacional. Finalmente, duas situações problemas são descritas, de sorte que a Teoria das Situações Didáticas – TSD foi empregada a fim de indicar possíveis interações que devem ser exploradas envolvendo o trinomio – professor – conhecimento – estudantes. Finalmente, o trabalho apresenta uma tabela resumida das propriedades verificadas por indução matemática e que não foram discutidas na literatura científica até o momento, envolvendo processo de extensão numérica dos respectivos índices. **Palavras-chave**: Sequência de Jacobsthal, Engenharia Didática, Ensino, História da Matematica. |
| **Abstract** | The present work describes the initial two stages of a classical Didactical Engineering with the theme related to properties of the Generalized Sequence of Jacobsthal and the (s,t)-Generalized Sequence of Jacobsthal. Admittedly, such notions were, recently, introduced in the scientific literature by Anatassov (2011; 2012). However, some combinatorial properties can be identitied and investigated with a computational resource. Finally, two problem situations are described, so that the Theory of Educational Situations - TSD was used in order to indicate possible interactions that must be explored involving the trinomial - teacher - knowledge - students. Finally, the work presents a summary table of the properties verified by mathematical induction and that have not been discussed in the scientific literature until the moment, involving process of numerical extension of the respective indices. **Keywords**: Sequência de Jacobsthal, Didatical Engineering, History of Mathematics. |
| **Resumée** | Cet article décrit les deux premières étapes d'un d'Ingénierie Didactique classique avec le sujet lié aux propriétés de s-Generalized séquence Jacobsthal et (s, t) Généralisée Jacobsthal-séquence. Il est vrai que, ces notions ont été introduites, récemment, dans la littérature scientifique par Anatassov (2011, 2012), cependant, certaines identités combinatoires et |

propriétés peuvent être étudiées avec une ressource de calcul. Enfin, deux problèmes sont des situations décrites, de sorte que la Théorie des Situations Didactiques - DST a été utilisé pour indiquer les interactions possibles qui devraient être explorées impliquant la triade - enseignant - connaissances - étudiants. Enfin, la travail présente un tabel qui résumé des propriétés observées par induction mathématique qui ne sont pas abordés dans la littérature scientifique à ce jour, impliquant l'extension numérique du processus d'indices respectifs.
**Mots clées**: Séquence de Jacobsthal, L´Ingenierie Didactiques, Histoire des Mathematiques.

## 1. Introducción

A sequência de Jacobsthal é determinada pela seguinte relação de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ e determinada pelas seguintes condições iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Tal recorrência é atribuída ao matemático alemão Ernst Erich Jaconsthal (1882 - 1965). A partir da relação de recorrência anterior, poderemos determinar o seguinte conjunto numérico: $\{J_n\}_{n \in IN} : \{0,1,1,3,5,11,21,43,85,171,\ldots\}$ (*). Na figura abaixo divisamos um trecho de uma obra de Jacobshthal que, apesar de ser em Alemão, podemos distinguir claramente a equação de recorrência $f_{n+1} = f_n + x \cdot f_{n-1}$ e que, para $x = 1$ podemos deteminar os valores da Sequência de Fibonacci e, para o caso $x = 2$ determinamos o conjunto em (*). Por outro lado, outros elementos podem ser observados na figura abaixo como, por exemplo, determinadas relações algébricas expressas por relações matriciais, sobretudo, matrizes de ordem indicada por 2x2.

werte $x$ eintreten. Um diese zu charakterisieren, bemerke ich, daß die Substitution (5) sich auch in der Form

(6) $$z_n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n z_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben läßt Diese Gleichung sieht nach Ausrechnung der Potenz $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ so aus:

(7) $$z_n = \begin{pmatrix} f_n & x f_{n-1} \\ f_{n-1} & x f_{n-2} \end{pmatrix} z_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierin bedeutet $f_n = f_n(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von $x$, die dem Rekursionsgesetze

(8) $$f_{n+1} = f_n + x f_{n-1}, \quad f_{-1} = 0, \ f_0 = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügt. Bekanntlich sind die Zahlen $f_n(1)$ die sogenannten Fibonaccischen Zahlen. Man nennt daher die Polynome $f_n(x)$ die Fibonaccischen Polynome.

**Figura 1. Jacobsthal (1919 – 1920) estudou propriedades de sequências numéricas. Fuente: Jacobsthal (1919 - 1920).**

Na figura 2, trazemos a imagem do matemático alemão, especialista em Teoria dos Números e ex aluno de Ferdinand G. Frobenius, *Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965).* Siegmund-Schultze (2009, p. 327) recorda que Jacobsthal fugiu de Berlim, na Alemanha, para Normandia e Suíça em 1939 e 1943.

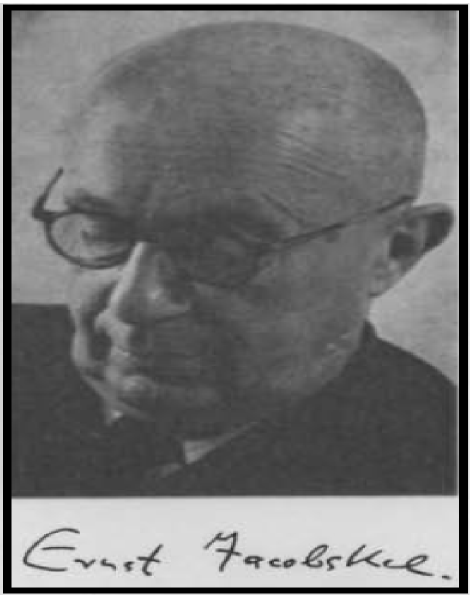


**Figura 2. Erns Erich Jacobsthal (1882 – 1965).**
**Fuente: Siegmund-Schultze (2009).**

Mais recentemente, deparamos a descrição da Sequência Generalizada de Jacobsthal (SGJ), por intermédio das seguintes definições formais.

**Definição 1**: Chamamos de s – Sequência Generalizada de Jacobsthal a relação de recorrência determinada pela seguinte relação $J_n^s = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0$, $s \geq 2$. (Anatassov, 2011).

**Definição 2**: Chamamos de (s,t) – Sequência Generalizada de Jacobsthal a relação de recorrência determinada pela seguinte relação $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0$, $t, s \geq 2, s \neq -t$. (Anatassov, 2011).

A partir dos dados anteriores, três elementos merecem destaque: (i) A partir dos elementos observados nos trabalhos de Anatassov (2007; 2011; 2012) podemos compreender que um processo de generalização da sequência indicada em (*) prossegue e inspira a pesquisa atual em Matemática; (ii) A partir das sequências definidas há pouco, podemos observar um alto custo operacional a fim de determinar, por recorrência, seus elementos; (iii) As representações matriciais permitem a verificação de uma série de propriedades relacionadas com a Sequência Generalizada de Jacobsthal.

Um aspecto que temos buscado fortalecer em nossos trabalhos envolve a possibilidade de efetuar transposições didáticas (CHEVALLARD, 1991) eficientes, com o interesse de efetuar modificações necessárias sobre um conhecimento matemático especifico, muitas vezes discutido apenas num círculo restrito como, por exemplo, o movimento de divulgação da pesquisa em Matemática Pura e Aplicada atual, que ocorre por meio de *pappers* e revistas especializadas. Nossa perspectiva se diferencia na medida em que, ensejamos acentuar elementos e roteiros para a exploração de certos conteúdos matemáticos em sala de aula e que proporcionam um entendimento do processo epistemológico, histórico e matemático evolutivo ininterrupto (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2015).

Isso posto, trazemos o seguinte questionamento oriundo de uma problemática indicada nos parágrafos predecessores: Como descrever situações de ensino envolvendo as sequências s-SGJ e (s,t)-SGJ e suas propriedades matriciais?

Assim, a partir do questionamento anterior, indicaremos os seguintes objetivos:

(a) Descrever propriedades matriciais relacionadas com as sequências s-SGJ e (s,t)-SGJ que refletem um carater evolutivo epistemológico cuja herança pode ser identificada nos trabalhos de Anatassov (2011; 2012);

(b) Conceber situações problema envolvendo propriedades discutidas, de modo restritivo, apenas em periódicos de Matemática Pura ou Aplicada;

(c) Compreender o processo de generalização da Sequência de Jacobsthal.

Vamos exemplificar rápidamente o ítem (c), por exemplo, a partir de um trabalho recente de Anita (2016) e que descreve o processo de extensão (e generalização) correspondente aos índices, originalmente inteiros positivos (ver lista (*)). Abaixo (ver figura 3), na primeira linha, Anita (2016) apresenta alguns elementos do tipo $\{J_{-n}\}_{n\in IN}$. Com origem nesse processo de generalização (dos índices) e tomando como referência as definições formais 1 e 2, iremos introduzir duas propriedades (identidades) não abordadas e/ou introduzidas nos trabalhos (artigos) consultados.

Lema 1: Para todo inteiro positivo $n\geq 0$, vale as seguintes relações: (i) $J_{-n}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}J_n$; (ii) $J^s_{-n}=\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J^s_n$; (iii) $J^{s,t}_{-n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(st)^n}\cdot J^{s,t}_n$.

Demonstração: Basta ver $\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}J_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\cdot\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{1-(-1)^n\cdot 2^{-n}}{3}=$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{(-1)^n(-1)^{-n}-(-1)^n\cdot 2^{-n}}{3}=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{(-1)^n\cdot[(-1)^{-n}-2^{-n}]}{3}=\frac{(-1)^{2n+1}}{1}\cdot\frac{[(-1)^{-n}-2^{-n}]}{3}$$

$=\frac{(-1)^{2n}}{1}\cdot\frac{[2^{-n}-(-1)^{-n}]}{3}=\left(\frac{2^{-n}-(-1)^{-n}}{3}\right)=J_{-n},n\geq 0$. No segundo ítem, observamos

$$\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J^s_n=(-1)\frac{(-1)^n}{s^n}\cdot\frac{s^n-(-1)^n}{s+1}=(-1)\frac{(-1)^n}{1}\cdot\frac{1-(-1)^n s^{-n}}{s+1}=(-1)\left(\frac{(-1)^n}{1}\right)\cdot\frac{[(-1)^n(-1)^{-n}-(-1)^n s^{-n}]}{s+1}$$

$=(-1)\cdot(-1)^{2n}\left(\frac{(-1)^{-n}-s^{-n}}{s+1}\right)=1\cdot\left(\frac{s^{-n}-(-1)^{-n}}{s+1}\right)=J^s_{-n}$. No último ítem, teremos também

que $\frac{(-1)^{n+1}}{s^nt^n}\cdot J^{s,t}_n=\frac{(-1)^{n+1}}{s^nt^n}\cdot\frac{s^n-(-t)^n}{s+t}=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{\frac{s^n}{s^nt^n}-(-1)^n\frac{t^n}{s^nt^n}}{s+t}=\frac{(-1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{t^{-n}-(-1)^n s^{-n}}{s+t}$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{1} \cdot \frac{(t^{-n} - (-1)^n s^{-n})}{(s+t)} = \frac{(-1)^{n+1}}{1} \cdot \frac{[(-1)^{-n} \cdot (-1)^n t^{-n} - (-1)^n s^{-n}]}{(s+t)} = \frac{(-1)^{2n+1}}{1} \cdot \frac{((-1)^{-n} t^{-n} - s^{-n})}{(s+t)} =$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{1} \cdot \left( \frac{(s^{-n} - (-t)^{-n})}{(s+t)} \right) = \frac{(s^{-n} - (-t)^{-n})}{(s+t)} = J_{-n}^{s,t} \, \square$$

Dessa forma, o lema 1, permite avaliar ou determinar um termo qualquer das sequências que indicamos por $\left\{ J_{-n}^{s} \right\}_{n \in IN}$ ou $\left\{ J_{-n}^{s,t} \right\}_{n \in IN}$, com índices inteiros o que exemplifica o processo de extensão que indicamos no ítem (c).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{-n}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $-\frac{5}{16}$ | $\frac{11}{32}$ | $-\frac{21}{64}$ | $\frac{43}{128}$ | $-\frac{85}{256}$ | $\frac{171}{512}$ | $-\frac{341}{1024}$ |
| ... | | | | | | | | | | | |
| $j_{-n}$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{17}{16}$ | $-\frac{31}{32}$ | $\frac{65}{64}$ | $-\frac{127}{128}$ | $\frac{257}{256}$ | $-\frac{511}{512}$ | $\frac{1025}{1024}$ |

**Figura 3. Annita (2016) discute o processo de extensão para índices inteiros.**
**Fuente: Annita (2016).**

De modo simplificado, a partir da tradição de trabalhos da vertente francesa que adotam, numa perspectiva de complementaridade, a Engenharia Didática – ED, como metodología de pesquisa e a Teoria das Situações Didáticas – TDS, como metodología de ensino, asumiremos o emprego dessas teorías a fim de atingir nossos objetivos (a, b e c) declarados nos itens acima. Antes, porém, na seção subsequente, acentuaremos apenas alguns elementos elementos de ordem teórica e que podem apontar/antever eventuais entraves para uma efetiva e real inserção em sala de aula.

## 2. Engenharia Didática: alguns elementos

O *design* de investigação que permite, dentre outros aspectos, a obtenção de dados científicos visando o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem de determinado conteúdo ou objeto matemático, adquiriu destaque em meados dos anos de 1980 e com um distinguido período de efervescência entre as décadas de 80 e 90. A partir dos interesses do nosso estudo, declaramos que a vertente da Engenharia Didática – ED adotada aquí, se caracteriza como pertencente à primeira geração. No trecho abaixo observamos sua descrição, conforme Almouloud & Silva (2012).

> Lembramos que a noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos de 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. (ALMOULOUD & SILVA, 2012).

Assim, de modo prosaico, todo o projeto ou a preparação para uma intervenção deve ser pensada nos momentos de planejamento que antecedem a aula, propriamente dita, nos momentos de experimentação da aula, em que todo o aparato teórico conceitual é colocado em movimento e, finalmente, uma depuração dos dados e informações coligidas após ter sido encerrado o fenômeno aula, de sorte que, o conjunto das ações planejadas, envolvendo o trinômio aluno – professor – conhecimento matemático, devem concorrer para o acúmulo de conhecimentos didáticos-metodológicos sobre assuntos específicos, conhecimentos precisos e particulares. De modo simplificado, Artigue (1996) esclarece o seguinte interesse:

> Trata-se de etiquetar, de certa forma, uma forma de trabalho didático, comparável ao do engenheiro, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre diversos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita a se submeter a um controle do tipo científico e, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos mais depurados da ciência [...] (ARTIGUE, 1996, p. 243)

A constatação da ED como metodologia de pesquisa (Almouloud, 2007) se caracteriza, então, como um esquema experimental baseado num conjunto de experimentações e realizações didáticas em sala de aula. Artigue (1996, p. 247) indica as seguintes etapas: concepção, realização, observação e a análise de sequências de ensino. Mas, do ponto de vista da ação experimental e do tempo (ou fases) investigativo, Artigue distingue ainda: (1) fase de análises preliminares; (2) fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas; (3) experimentação e, por fim, (4) análise *a posteriori* e a validação de todo aparato teórico construído tendo como fim e escopo a obtenção de conhecimentos científicos sobre o ensino.

De modo sistemático, conforme Artigue (1996, p. 249-250), nesta etapa consideramos: (i) uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino de determinado conteúdo; (ii) análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; (iii) exame das concepções e os conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados e livros adotados) e seus efeitos no que tange o ensino.

No que concerne ao primeiro ítem, como mencionado anteriormente, abordamos um conteúdo matemático que se mostra discutido, de modo restrito, num contexto de pesquisa em Matemática Pura e Aplicada e, dessa forma, se mostra desprovido de qualquer interesse ou intenção pedagógica, apesar de que, predominantemente as propriedades aquí discutidas podem ser verificadas por Indução Matemática. No que concerne ao campo do ensino que nossa transposição didática procura fazer correspodência, acentuamos o ambiente da formação inicial de professores que, no Brasil, no que concerne ao conhecimentos de sequências numéricas e recursivas, de modo standard, os autores de livros de História da Matemática – HM costumam recordar apenas a Sequência de Fibonacci e desconsideram a pesquisa atual sobre o assunto. Não realizaremos aquí ítem (iii), que se refere ao exame das concepções dos estudantes, posto que, nossa pesquisa se restringe aos dois primeiros momentos previstos por uma ED de 1ª geração (Almouloud & Silva, 2012).

Neste sentido, recordamos as ponderações de Robinet (1983), quando observou a ação investigativa desenvolvida por Guy Brousseau, nos anos de 1980, ao recordar que:

> Brousseau possui por objetivo por intermédio de que meios podemos fazer com que um grupo de alunos se apropriem de um conhecimento matemático. Para estudar uma situação de ensino, os parámetros que devem ser considerados são reconhecidamente inúmeros que se mostra impossível de compreendermos de que modo eles intervêem na construção do conhecimento matemático. (Robinet, 1983, p. 6).

Diante do exposto no trecho acima, acentuamos ainda a preocupação de organizar um conjunto de situações propostas aos estudantes que proporcionem uma espécie de gênese artificial de um conceito científico. Assumindo tal perspectiva, iremos propor um conjunto de situação de ensino que envolvem tal intenção e preocupação didático-metodológica. No que concerne ao estudo da s-Sequências Generalizadas de Jacobsthal e da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal (discutida anteriormente), torna-se imprescindível o solucionador de problemas compreender o engendramento e a contribuiçao progressiva constante de matemáticos para a generalização da sequência numérica que indicamos na seção preliminar.

Doravante, nossa discussão restringir-se-á justamente ao momento de análises preliminares e de análise *a priori*, seguindo da concepção e descrição de situações. Assinalamos um motivo, relativamente ao qual, algumas das propriedades e identidades matriciais que devem ser apresentadas são, originalmente, abordadas somente em trabalhos científicos de Matemática Pura ou Aplicada, desprovidos de uma intenção didático-metodológica. Sendo assim, o grau ou o teor de pormenorização que apresentaremos deve evitar um estilo econômico e cifrado, relativamente comum no meio de divulgação da pesquisa em Matemática.

Observamos, ainda, tendo em vista os objetivos declarados anteriormente, sobretudo o que envolvem uma preocupação com o intuito de descrever um roteiro ou proposta de abordagem do conteúdo aquí discutido, adotaremos os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986, 1998), introduzidas na vertente da Didática da Matemática e, classicamente discutida na literatura em carater de complementaridade com a ED (ARTIGUE, 2009). Diante deste argumento, nas seções subsequentes, abordaremos uma descrição das fases dialéticas de ensino, nominadas por: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e institucionalização (previstas pela TSD.

Na próxima seção, as propriedades matriciais abordadas constituem um entendimento do objeto matemático envolvido e concorrem para a análise epistemológica dos conteúdos e registro de eventuais entraves para o seu ensino.

## 3. Propriedades matriciais da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal

A partir das definições 1 e no caso particular para $s=2$ podemos determinar que $J_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$ como o termo geral da sequência numérica indicada em (*). Por outro lado, a partir da definição 1, poderemos determinar que: $J_0^s=0$, $J_1^s=1$, $J_2^s=s-1$, $J_3^s = \frac{s^3+1}{s+1} = \frac{(s+1)(s^2-s+1)}{s+1} = (s^2-s+1)$, $J_4^s = \frac{s^4-1}{s+1} = s^3-s^2+s-1$, $J_5^s = \frac{s^5+1}{s+1} = s^4-s^3+s^2-s+1$. Um problema natural envolve a determinação de outros elementos da s-SHJ na medida em que o índice cresce $J_n^s$ ou decresce indefinidamente $J_{-n}^s$, com $n \geq 0$.

Para tanto, vamos considerar (e definir) as seguintes matrizes $F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix}$. A partir disso, vamos avaliar as matrizes do tipo $F_s^n$: $F_s^2 = \begin{pmatrix} s^2-s-1 & s(s-1) \\ s-1 & s\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3^s & s\cdot J_2^s \\ J_2^s & s\cdot J_1^s \end{pmatrix}$, $F_s^3 = \begin{pmatrix} s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^2-s+1) \\ s^2-s+1 & s\cdot(s-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_4^s & s\cdot J_3^s \\ J_3^s & s\cdot J_2^s \end{pmatrix}$, $F_s^4 = \begin{pmatrix} s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \\ s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^2-s+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_5^s & s\cdot J_4^s \\ J_4^s & s\cdot J_3^s \end{pmatrix}$, $F_s^5 = \begin{pmatrix} s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \\ s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^3-s^2+s-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_6^s & s\cdot J_5^s \\ J_5^s & s\cdot J_4^s \end{pmatrix}$, $F_s^6 = \begin{pmatrix} J_7^s & s\cdot J_6^s \\ J_6^s & s\cdot J_5^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^5-s^4+s^3-s^2+s-1) \\ s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^4-s^3+s^2-s+1) \end{pmatrix}$. $F_s^7 = \begin{pmatrix} J_8^s & s\cdot J_7^s \\ J_7^s & s\cdot J_6^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^7-s^6+s^5-s^4+s^3-s^2+s-1 & s\cdot(s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1) \\ s^6-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1 & s\cdot(s^5-s^4+s^3-s^2+s-1) \end{pmatrix}$, etc. Assim, a partir desses casos iniciais, os estudantes podem ser estimulados na determinação e identificação de propriedades algébricas e invariantes para a determinação desse conjunto preliminar e seu comportamento respectivo ou termo geral.

De modo semelhante, vamos determinar que ocorrem os seguintes casos: $F_s^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \\ \frac{1-s}{s^2} & \frac{s^2-s+1}{s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2}{s^{2-1}}\cdot J_1^s & s\frac{(-1)^{2+1}}{s^2}\cdot J_2^s \\ \frac{(-1)^{2+1}}{s^2}\cdot J_2^s & s\frac{(-1)^{2+2}}{s^{2+1}}\cdot J_3^s \end{pmatrix}$, $F_s^{-3} = \begin{pmatrix} \frac{1-s}{s^2} & \frac{s^2-s+1}{s^2} \\ \frac{s^2-s+1}{s^3} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^3} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^3}{s^{3-1}} \cdot J_2^s & s\frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s \\ \frac{(-1)^{3+1}}{s^3} \cdot J_3^s & s\frac{(-1)^{3+2}}{s^{3+1}} \cdot J_4^s \end{pmatrix}, \ F_s^{-4} = \begin{pmatrix} \frac{s^2-s+1}{s^3} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^3} \\ \frac{s^3-s^2+s-1}{s^4} & \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^4}{s^{4-1}} \cdot J_3^s & s\frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s \\ \frac{(-1)^{4+1}}{s^4} \cdot J_4^s & s\frac{(-1)^{4+2}}{s^{4+1}} \cdot J_5^s \end{pmatrix},$$

$$F_s^{-5} = \begin{pmatrix} \frac{-s^3+s^2-s+1}{s^4} & \frac{s^4-s^3+s^2-s+1}{s^4} \\ \frac{s^4-s^3+s^2-s+1}{s^5} & \frac{-s^5+s^4-s^3+s^2-s+1}{s^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^5}{s^{5-1}} \cdot J_4^s & s\frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s \\ \frac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s & s\frac{(-1)^{5+2}}{s^{5+1}} \cdot J_6^s \end{pmatrix}.$$

Mais uma vez, uma apreciação minuciosa os casos particulares acima poderá instigar e estimular a conjectura de propriedades reveladas a partir de determinados invariantes algébricos indicados nas matrizes $F_s^{-2}, F_s^{-3}, F_s^{-4}, F_s^{-5}$, $F_s^{-6}$, $F_s^{-7}$, $F_s^{-8}$etc.

Na figura 4, logo abaixo, podemos verificar a determinação de potências $F_s^{n}$ com os expoentes elevados. Com o auxílio do recurso computacional podemos antever/verificar e comprovar determinadas propriedades extraidas dos elementos do conjunto indicado por $\left\{J_{-n}^s\right\}_{n\in IN}$. Abaixo, determinamos ainda o comportamento das matrizes das potências $F_s^{10}, F_s^{11}, F_s^{12}, F_s^{13}, F_s^{14}, F_s^{15}, F_s^{16}, F_s^{17}$ com o recurso computacional. Assim, poderemos determinar uma fórmula fechada para $F_s^{n}, n \geq 0$. Tal propriedade será retomada na seção subsequente.

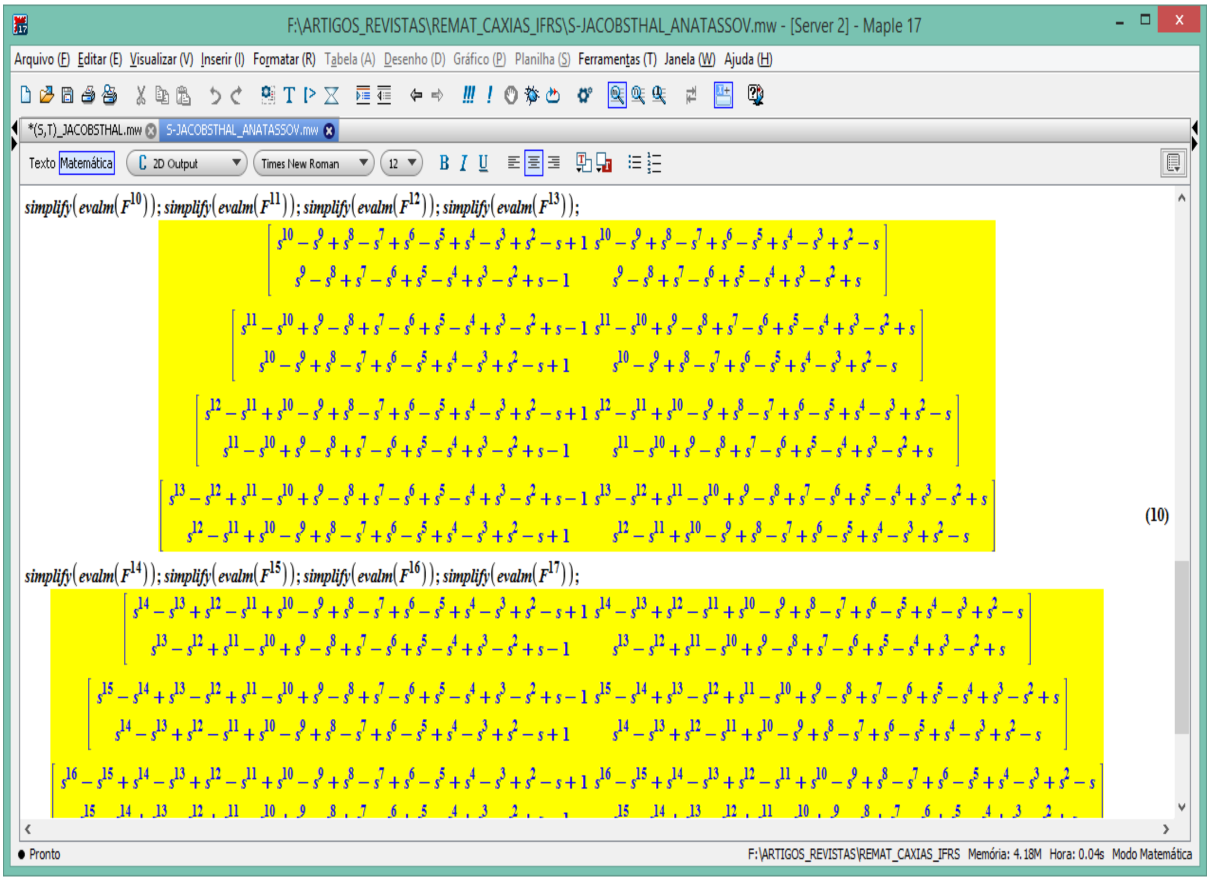


**Figura 4. Investigação do comportamento das matrizes $F_s^{\,n}, n \geq 0$ com o uso do CAS Maple**
**Fonte: Elaboração do autor.**

De modo natural, nosso processo investigativo progride no sentido de determinar o comportamento e a identificação de alguma regularidade e propriedade quando considerarmos matrizes do tipo $F_s^{-10}\ F_s^{-11}\ F_s^{-12}\ F_s^{-13}\ F_s^{-14}\ F_s^{-15}\ F_s^{-16}\ F_s^{-17}$. Na figura seguinte, trazemos os dados fornecidos pelos CAS Maple que podem auxiliar no processo de investigação de formulação de conjecturas no que concerne ao processo de identificação de padrões e invariantes algébricos para a descrição de uma fórmula fechada, deduzida indutivamente, para potências negativas da matriz $F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1-s}{s} \end{pmatrix}$. Agora, a partir do lema 1, poderemos observar ainda que

$$F_s^{-5} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^5}{s^{5-1}} \cdot J_4^s & s\dfrac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s \\ \dfrac{(-1)^{5+1}}{s^5} \cdot J_5^s & s\dfrac{(-1)^{5+2}}{s^{5+1}} \cdot J_6^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-4}^s & sJ_{-5}^s \\ J_{-5}^s & sJ_{-6}^s \end{pmatrix},\quad F_s^{-7} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^7}{s^{7-1}} \cdot J_{7-1}^s & s\dfrac{(-1)^{7+1}}{s^7} \cdot J_7^s \\ \dfrac{(-1)^{7+1}}{s^7} \cdot J_7^s & s\dfrac{(-1)^{7+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{7+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-6}^s & sJ_{-7}^s \\ J_{-7}^s & sJ_{-8}^s \end{pmatrix}$$

$$, F_s^{-8} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^8}{s^{8-1}} \cdot J_{8-1}^s & s\dfrac{(-1)^{8+1}}{s^8} \cdot J_8^s \\ \dfrac{(-1)^{8+1}}{s^8} \cdot J_8^s & s\dfrac{(-1)^{7+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{8+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-7}^s & sJ_{-8}^s \\ J_{-8}^s & sJ_{-9}^s \end{pmatrix}, F_s^{-9} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^9}{s^{9-1}} \cdot J_{9-1}^s & s\dfrac{(-1)^{9+1}}{s^9} \cdot J_9^s \\ \dfrac{(-1)^{9+1}}{s^9} \cdot J_9^s & s\dfrac{(-1)^{9+2}}{s^{7+1}} \cdot J_{9+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{-8}^s & sJ_{-9}^s \\ J_{-9}^s & sJ_{-10}^s \end{pmatrix}.$$

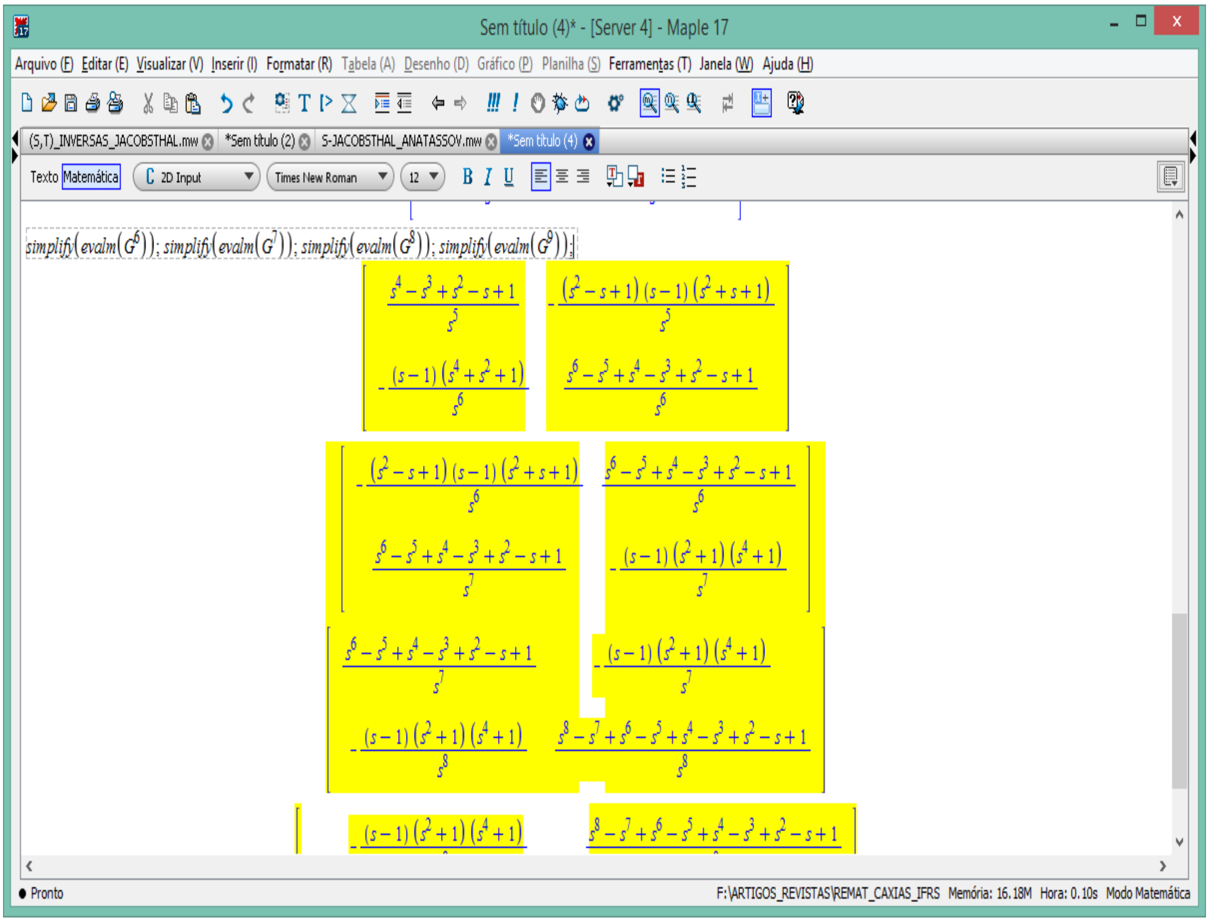


**Figura 5. O software permite a determinação das potências negativas das matrizes relacionadas com a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal.**
**Fonte: Elaboração do autor.**

Na seção subsequente, semelhantemente aos elementos discutidos para o caso da s-Sequência generalizada de Jacobsthal, retomaremos propriedades semelhantes relacionadas com a (s,t)-Sequência generalizada de Jacobsthal e a apreciação de suas propriedades com o arrimo do modelo computacional.

## 4. Propriedades matriciais da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal

A partir da definição 2, vamos lidar com o termo geral $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n - (-t)^n}{s+t}, n \geq 0$, $t, s \geq 2, s \neq -t$. (Anatassov, 2011). Alguns termos iniciais podem ser determinados diretamente por intermédio de $J_0^{s,t} = 0, J_1^{s,t} = \dfrac{s^1 + t}{s+t} = 1, J_2^{s,t} = \dfrac{s^2 - t^2}{s+t} = s - t$, $J_3^{s,t} = \dfrac{s^3 + t^3}{s+t} = \dfrac{(s+t)(s^2 - st + t^2)}{s+t} = s^2 - st + t^2$, $J_4^{s,t} = \dfrac{s^4 - t^4}{s+t} = \dfrac{(s+t)(s^3 - s^2 t + st^2 - t^3)}{s+t} = s^3 - s^2 t + st^2 - t^3$, $J_5^{s,t} = \dfrac{s^5 + t^5}{s+t} = \dfrac{(s+t)(s^4 - s^3 t + s^2 t^2 - st^3 + t^4)}{s+t} = s^4 - s^3 t + s^2 t^2 - st^3 + t^4$,

$$J_6^{s,t}=\frac{s^6-t^6}{s+t}=\frac{(s+t)\cdot(s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5)}{(s+t)}=s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5.$$

$$J_7^{s,t}=\frac{s^7+t^7}{s+t}=s^6-s^5t+s^4t^2-s^3t^3+s^2t^4-st^5+t^6,\quad J_8^{s,t}=\frac{s^8-t^8}{s+t}=s^7-s^6t+s^5t^2-s^4t^3$$
$$+s^3t^4-s^2t^5+st^6-t^7,\ J_9^{s,t}=\frac{s^9+t^9}{s+t}=s^8-s^7t+s^6t^2-s^5t^3+s^4t^4-s^3t^5+s^2t^6-st^7+t^8,\text{ etc.}$$

Mais uma vez, identificamos o elevado custo operacional que dificulta uma apreciação de demais propriedades dos números presentes no conjunto $\left\{J_n^{s,t}\right\}_{n\in IN}^{s,t\in IR}$. Com o recurso computacional, poderevemos antever algumas de suas propriedades.

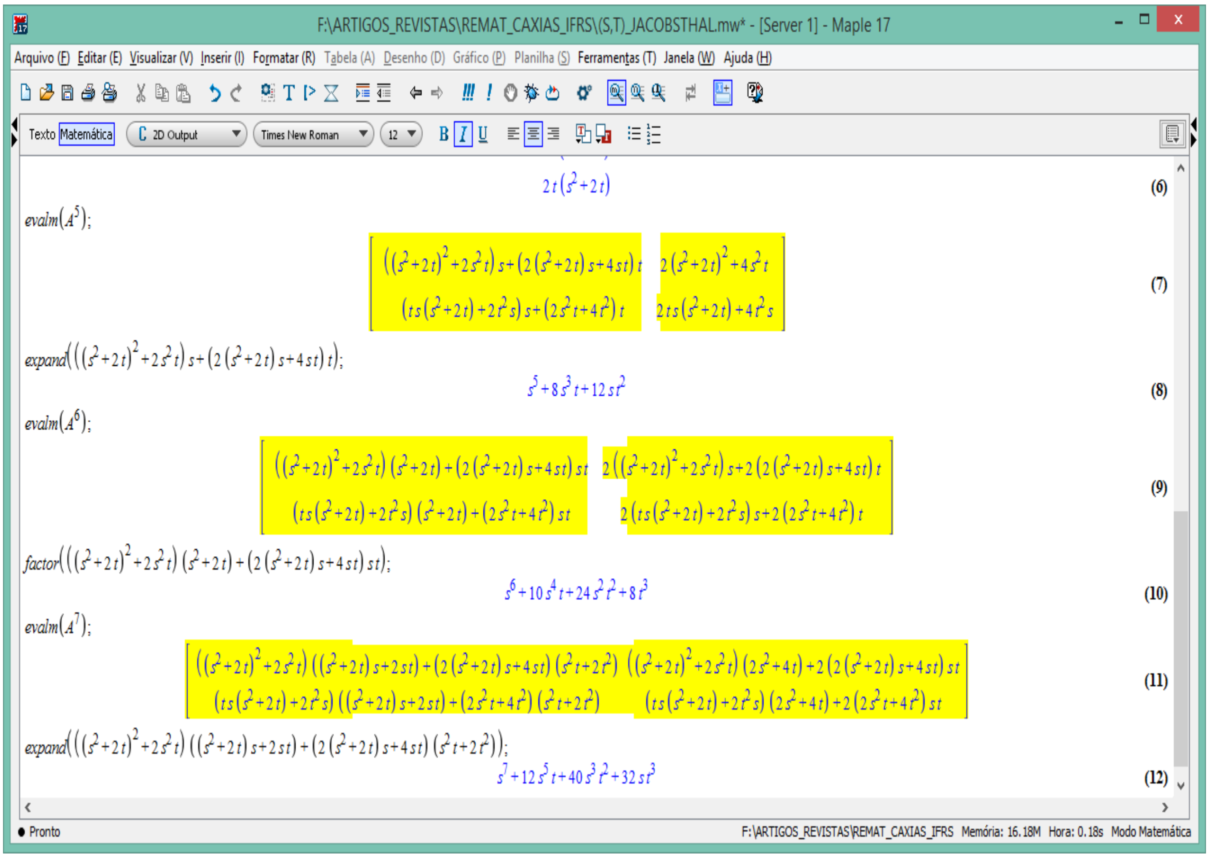


**Figura 5. Annita (2016) discute o processo de extensão para índices inteiros.**
**Fonte: Elaboração do autor.**

Repetimos nossa preocupação da seção passada e declaramos o interesse na determinação das propriedades das matrizes (2x2) inversas do tipo indicado:

$$F_{s,t}^{-2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{st} & \frac{t-s}{t^2s}\\ \frac{t-s}{ts^2} & \frac{s^2-st+t^2}{s^2t^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-1)^2}{st}\cdot J_1^{s,t} & s\frac{(-1)^3}{t^2s^2}\cdot J_2^{s,t}\\ t\frac{(-1)^3}{s^2t^2}\cdot J_2^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{2+2}}{s^3t^3}\cdot J_3^{s,t}\end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-3}=\begin{pmatrix}\frac{t-s}{s^2t^2} & \frac{s^2-st+t^2}{t^3s^2}\\ \frac{s^2-st+t^2}{t^2s^3} & \frac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{s^3t^3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^3}{s^2t^2}\cdot J_2^{s,t} & s\dfrac{(-1)^4}{t^3s^3}\cdot J_3^{s,t} \\ t\dfrac{(-1)^4}{t^3s^3}\cdot J_3^{s,t} & (st)\dfrac{(-1)^5}{s^4t^4}\cdot J_4^{s,t} \end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-4}=\begin{pmatrix} \dfrac{s^2-st+t^2}{s^3t^3} & \dfrac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^4s^3} \\ \dfrac{-s^3+s^2t-st^2+t^3}{t^3s^4} & \dfrac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{s^4t^4} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^4}{s^{4-1}t^{4-1}}\cdot J_3^{s,t} & s\dfrac{(-1)^{4+1}}{t^4s^4}\cdot J_4^{s,t} \\ t\dfrac{(-1)^{4+1}}{t^4s^4}\cdot J_4^{s,t} & (st)\dfrac{(-1)^{4+2}}{s^5t^5}\cdot J_5^{s,t} \end{pmatrix},\quad F_{s,t}^{-5}=\begin{pmatrix} -\dfrac{s^3-s^2t+st^2-t^3}{s^4t^4} & \dfrac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{t^5s^4} \\ \dfrac{s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4}{t^4s^5} & -\dfrac{s^5-s^4t+s^3t^2-s^2t^3+st^4-t^5}{s^5t^5} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^5}{s^{5-1}t^{5-1}}\cdot J_4^{s,t} & s\dfrac{(-1)^{5+1}}{t^5s^5}\cdot J_5^{s,t} \\ t\dfrac{(-1)^{5+1}}{t^5s^5}\cdot J_5^{s,t} & (st)\dfrac{(-1)^{5+2}}{s^6t^6}\cdot J_6^{s,t} \end{pmatrix}$$

. Quando lidamos com matrizes com expoente elevado, poderemos explorar e avaliar os dados obtidos apenas com o recurso computacional. Os dados exibidos na figura 5 devem auxiliar na investigação.

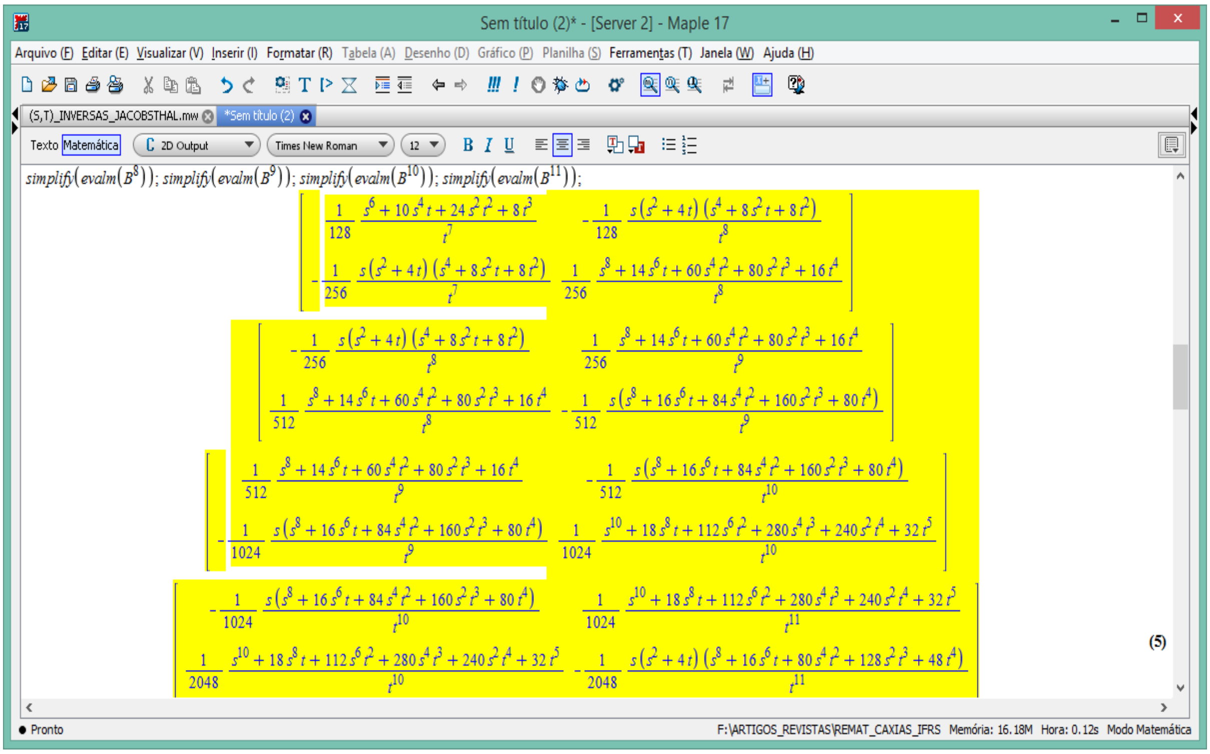


**Figura 5. O software permite a determinação das potências negativas das matrizes relacionadas com a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal.**
**Fonte: Elaboração do autor.**

## 5. Análise *a priori* e a concepção de situações envolvendo a s-SGJ e (s,t)-SGJ.

A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar a hipótese indicadas há pouco. Para indicar os elementos essenciais da fase atual debemos considerar que "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Por fim, na etapa da *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prevê Artigue (1995).

Outrossim, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (MARGOLINAS, 1995, p. 344). E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela Teoria das Situações Didáticas - TSD, registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (BROUSSEAU, 1986; 1998)

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2009, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância das variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Ademais, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (MARGOLINAS, 1995, p. 344). Notamos ainda que "a palavra variável designa, a priori, aquilo que pode variar nas situações de ensino e de aprendizagem. Nos problemas ou nas situações propostas aos alunos, várias variáveis podem ser escolhidas pelo professor [...]" (ALMOULOUD, 2016, p. 119).

A partir de agora, segundo nossos objetivos, passaremos a discutir, de modo pormenorizado e, em consonancia com as fases da TSD, as situações problemas elaboradas, tendo como objetivo final, sua possível abordagem e discussão em sala de aula. Recordamos que algumas propriedades, que discutiremos, se mostram restritas ao campo científico de circulação e publicação em artigos especializados.

Situação-didática I: A Sequência de Jacobsthal recebeu tal denominação tendo em vista a contribuição do matemático alemão Ernst Erich Jacobsthal (1882 – 1965) que empregou a relação $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$, com os seguintes valores iniciais $J_0 = 0, J_1 = 1$. Muito tempo depois, o matemático búlgaro Krassimir Todorov Atanassov (1954 - ?) formulou a descrição da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal, cujo termo geral é definido por $J_n^s = \dfrac{s^n - (-1)^n}{s+1}, n \geq 0, s \geq 2$. A partir dessa relação, recentemente introduzida na literatura especializada, verificar por indução matemática que: (i) $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$; (ii) $F_{s}^{\;n} = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s} & s \cdot J_{n}^{s} \\ J_{n}^{s} & s \cdot J_{n-1}^{s} \end{pmatrix}, n \geq 2$;

(iii) $F_{s}^{\;-n} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n}}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s} & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^{s} \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{s^{n}} \cdot J_{n}^{s} & s \cdot \dfrac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s} \end{pmatrix}$.

Situação de ação: As relações e significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser movilizada pelo grupo (ALMOULOUD, 2007, p. 38). Nesse caso, a ação de professor deverá ser decisiva para a apropriação e familiarização com o sistema notacional oriundo das definições 1 e 2. A manipulação de casos particulares deve ser estimulada (ver figuras 4 e 5). Preliminarmente a relação de recorrência da sequência de Jacobsthal $J_{n} = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ pode ser comparada com a relação $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$. No primeiro caso, os estudantes devem comprender o caráter de recorrência, todavía, no caso da identidade $J_{n+1}^{s} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$, a recorrência é determinar por um elementos antecessor e uma potência de $(-1)^{n}$. No que concerne aos itens (ii) e (iii), os elementos particulares das potências de $F_{s}^{\;n}$ e $F_{s}^{\;-n}$, para $n \geq 2$. Ver figuras 4 e 5.

Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns". Com explicamos na fase dialética anterior, os alunos precisam se apropriar de um sistema notacional que deve proporcionar a homogeneização da comunicação entre o grupo, oriundo das interações com o software proposto. Ademais, como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos que "o estudante poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige". Alguns casos particulares podem ser estimulados em sua verificação, por exemplo, o caso de $J_{7}^{s} = \dfrac{s^{7} - (-1)^{7}}{s+1} = \dfrac{s \cdot s^{6} - s \cdot (-1)^{6} + s \cdot (-1)^{6} + (-1)^{6}}{s+1}$
$= \dfrac{s \cdot (s^{6} - (-1)^{6}) + s \cdot ((-1)^{6} + (-1)^{6})}{s+1} = \dfrac{s \cdot (s^{6} - (-1)^{6})}{s+1} + \dfrac{(s+1)(-1)^{6}}{s+1} = s \cdot \dfrac{(s^{6} - (-1)^{6})}{s+1} + (-1)^{6} = s \cdot J_{6}^{s} + (-1)^{6}$.
O professor deverá asumir posição importante no processo de discussão pelo grupo e na estimulação da discussão dos casos preliminares, como indicamos acima.

Assim, a partir do ítem (i), se espera que os alunos considerem a relação $J_{n+1}^{s} = \dfrac{s^{n+1} - (-1)^{n+1}}{s+1} = \dfrac{s \cdot s^{n} - s \cdot (-1)^{n} + s \cdot (-1)^{n} + (-1)^{n}}{s+1} = \dfrac{s \cdot (s^{n} - (-1)^{n}) + s \cdot ((-1)^{n} + (-1)^{n})}{s+1} =$
$\dfrac{s \cdot (s^{n} - (-1)^{n})}{s+1} + \dfrac{(s+1)(-1)^{n}}{s+1} = s \cdot \dfrac{(s^{n} - (-1)^{n})}{s+1} + (-1)^{n} = s \cdot J_{n}^{s} + (-1)^{n}$ e que confere o resultado do ítem (i). Por outro lado, a despeito dos casos particulares que podem ser

apreciados com o recurso computacional (CAS Maple), para determinar que $F_s{}^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \\ J_n^s & s\cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}$ o procedimento por indução será o indicado. Assim, vemos $F_s{}^{n+1} = F_s{}^n F_s = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \\ J_n^s & s\cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s-1)J_{n+1}^s + s\cdot J_n^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ (s-1)J_n^s + s\cdot J_{n-1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s - J_{n+1}^s + s\cdot J_n^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s - J_n^s + s\cdot J_{n-1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s - (-1)^n & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s - (-1)^{n-1} & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cdot J_{n+1}^s + (-1)^{n+1} & s\cdot J_{n+1}^s \\ s\cdot J_n^s + (-1)^n & s\cdot J_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n+2}^s & s\cdot J_{n+1}^s \\ J_{n+1}^s & s\cdot J_n^s \end{pmatrix}$ e empregamos a identidade $J_{n+1}^s = s\cdot J_n^s + (-1)^n$. Por fim, a partir dos casos particulares da matrizes inversas indicadas pelo software, deve ser indicado aos mesmos, mais uma vez, verificar por indução que $F_s{}^{-n-1} = F_s{}^{-n}\cdot F_s{}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^s & s\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & s\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n}{s^{n-1}}\cdot J_{n-1}^s + (1-s)\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s + (1-s)\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot sJ_{n-1}^s + (1-s)(-1)^{n+1}J_n^s}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot sJ_n^s + (1-s)(-1)^{n+2}J_{n+1}^s}{s^{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot\left(sJ_{n-1}^s + sJ_n^s - J_n^s\right)}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot\left(sJ_n^s + sJ_{n+1}^s - J_{n+1}^s\right)}{s^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n\cdot\left(sJ_{n-1}^s - J_n^s + sJ_n^s\right)}{s^n} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^{n+1}\cdot\left(sJ_n^s - J_{n+1}^s + sJ_{n+1}^s\right)}{s^{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & \frac{(-1)^n}{s^n}\left((-1)^n + sJ_n^s\right) \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & \frac{(-1)^2(-1)^{n+1}}{s^{n+1}}\left((-1)^{n+1} + sJ_{n+1}^s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{s^n}\cdot J_n^s & s\frac{(-1)^n}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^s & s\frac{(-1)^{n+3}}{s^{n+2}}\cdot J_{n+2}^s \end{pmatrix},\ n\ge 1.$$

Situação de validação: Recordamos que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário “provar o que foi afirmado na fase anterior” (ARTIGUE, 1984, p. 7 – 8). Nessa fase, num contexto do “debate da certeza das asserções” (ALMOULOUD, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferencias lógicas empregadas com o intento de obter a certeza das relações estabelecidas e das propriedades coligidas após a implementação de um plano de estratégia. Na situação didática I, os estudantes devem ser estimulados na identificação dos modelos matemáticos formais que concorreram para a verificação/demonstração de todas as propriedades mobilizadas na fase predecessora. Nesse caso, uma série de propriedades matriciais e o modelo de Indução Matemática se mostram imprescindíveis, tendo em vista que, a necesidade da verificação formal e o emprego de métodos inferenciais lógico formais, tendo em vista confirmar as conjecturas elaboradas na fase anterior.

Situação de institucionalização: Brousseau (1986, p. 342) comenta que “a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]”. Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos que determinaram sua aparição. Por outro lado, vale comentar que o conhecimento matemático abordado na situação presente é proveniente de um artigo científico recente. O professor poderá estimular a exploração dos documentos originais (ANATASSOV, 2011; 2012) disponíveis na *internet* e confrontar, comparar o estilo resumido e cifrado de um trabalho em Matemática. Por outro lado, os dados produzidos pelo software devem ser comparados com os dados extraidos pelo grupo, concernentemente ao modelo computacional. Desse modo, a investigação proposta não permanece restrita ao simples emprego de modelos matemáticos e, sim, pelo entendimento de seu procesos evolutivo e a contribuição do modelo computacional (ver figuras 4 e 5) na verificação/testagem de propriedades derivadas dos números oriundos dos conjuntos $\left\{J_n^s\right\}_{n\in IN}$ e $\left\{J_{-n}^s\right\}_{n\in IN}$.

Situação didática II: O termo geral da s-Sequência Generalizada de Jacobsthal é definido por $J_n^s = \dfrac{s^n-(-1)^n}{s+1}, n\geq 0, s\geq 2$. Por outro lado, de modo natural, podemos pensar em substituir o termo indicado por $(-1)^n$ por $(-t)^n$ e, dessa forma, vamos determinar o seguinte termo geral $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n-(-t)^n}{s+t}, n\geq 0, t,s\geq 2, s\neq -t$. Tal definição foi recentemente introduzida na literatura científica por Anatassov (2011) e revela o processo evolutivo e de generalização da Sequência Generalizada de Jacobsthal. Sabendo isso, vamos determinar: (i) alguns dos seus termos iniciais avaliados; (ii) verificar a relação $J_{n+1}^{s,t} = s\cdot J_n^{s,t} + (-t)^n$; (iii) considerando a matriz $F_{s,t} = \begin{pmatrix} s-t & s\cdot 1 \\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix}$, verificar que os elementos da (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal pode ser determinada por intermédio das potências de matrizes.

Situação de ação: No que concerne ao primeiro ítem (i), os estudantes são estimulados na substituição direta na fórmula $J_n^{s,t} = \dfrac{s^n-(-t)^n}{s+t}$ e, observar que, quando substituem índices pares do tipo (n=2m), determinam que $J_{2m}^{s,t} = \dfrac{s^{2m}-t^{2m}}{s+t}$ e, quando ocorre a substituição com índices ímpares (n=2m+1), devem encontrar que $J_{2m+1}^{s,t} = \dfrac{s^{2m+1}+t^{2m+1}}{s+t}$. De sorte que, com a verificação da propriedade com o software, a divisão polinomial sempre resulta numa função não racional. Por exemplo, podem constatar que $J_{2m}^{s,t} = \dfrac{s^{2m}-t^{2m}}{s+t} = s^{2m-1} - s^{2m-2}t + s^{2m-3}t^2 - s^{2m-4}t^3 + \cdots - t^{2m-1}$

e $J_{2m+1}^{s,t} = \frac{s^{2m+1}+t^{2m+1}}{s+t} = s^{2m} - s^{2m-1}t + s^{2m-2}t^2 - s^{2m-3}t^4 \cdots + t^{2m}$. Outro elemento a considerado ainda diz respeito na comparação do caráter de recursivadade da sequência de Jacobsthal $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ e a fórmula deduzida por Anatassov (2011), que foi indicada por $J_{n+1}^{s,t} = s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n$.

Situação de formulação: Alguns casos particulares podem ser sugeridos aos estudantes. Desse modo, por exemplo, o número $J_8^{s,t} = \left(\frac{s^8-(-t)^8}{s+t}\right) = \left(\frac{s^{7+1}-(-t)^{7+1}}{s+t}\right)$ $= \frac{s \cdot s^7 + t\cdot(-t)^7}{s+t} = \frac{s\cdot s^7 - s\cdot(-t)^7 + s\cdot(-t)^7 + t\cdot(-t)^7}{s+t} = \frac{\left[s\cdot(s^7-(-t)^7) + (s+t)\cdot(-t)^7\right]}{(s+t)} =$ $= s\cdot\left[\frac{s^7-(-t)^7}{(s+t)}\right] + \left[\frac{(s+t)\cdot(-t)^7}{(s+t)}\right] = \left(s\cdot J_7^{s,t} + (-t)^7\right) = s\cdot J_7^{s,t} - t^7$. Para confirmar o comportamento invariante, podemos observar $J_{15}^{s,t} = \left(\frac{s^{15}-(-t)^{15}}{s+t}\right) = \left(\frac{s^{14+1}-(-t)^{14+1}}{s+t}\right) =$ $= \frac{s\cdot s^{14} + t\cdot(-t)^{14}}{s+t} = \frac{s\cdot s^{14} - s\cdot(-t)^{14} + s\cdot(-t)^{14} + t\cdot(-t)^{14}}{s+t} = \frac{\left[s\cdot(s^{14}-(-t)^{14}) + (s+t)\cdot(-t)^{14}\right]}{(s+t)} =$ $s\cdot\left[\frac{s^{14}-(-t)^{14}}{(s+t)}\right] + \left[\frac{(s+t)\cdot(-t)^{14}}{(s+t)}\right] = s\cdot J_{13}^{s,t} + (-t)^{14} = s\cdot J_7^{s,t} + t^{14}$. Na fase subsequênte, devem empregar o modelo de indução matemática com o objetivo de deduzir a propriedade para qualquer inteiro ‘n’ natural.

Situação de validação: Como comentada na situação precedente, sinalizamos que o carater de verificação da certeza das ilações produzidas na fase de formulação se mostra imprescindivel. Desse modo, vemos que $J_{n+1}^{s,t} = \left(\frac{s^{n+1}-(-t)^{n+1}}{s+t}\right) =$ $= \frac{s\cdot s^n + t\cdot(-t)^n}{s+t} = \frac{s\cdot s^n - s\cdot(-t)^n + s\cdot(-t)^n + t\cdot(-t)^n}{s+t} = \frac{\left[s\cdot(s^n-(-t)^n) + (s+t)\cdot(-t)^n\right]}{(s+t)} =$ $s\cdot\left[\frac{s^n-(-t)^n}{(s+t)}\right] + \frac{(s+t)\cdot(-t)^n}{(s+t)} = s\cdot J_n^{s,t} + (-t)^n$. Por outro lado, no caso da verificação por indução matemática das potências das matrizes (2x2) do tipo $F_{s,t}{}^n$, podem também verificar a seguinte relação: $F_{s,t}{}^{n+1} = F_{s,t}{}^n \cdot F_{s,t} = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s\cdot J_n^{s,t} \\ t\cdot J_n^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n-1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-t & s\cdot 1 \\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s\cdot J_n^{s,t} \\ t\cdot J_n^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_{n-1}^{s,t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s-t & s\cdot 1 \\ t\cdot 1 & st\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s-t)\cdot J_{n+1}^{s,t} + st\cdot J_n^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ (s-t)\cdot t\cdot J_n^{s,t} + (s\cdot t^2)\cdot J_{n-1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-tJ_{n+1}^{s,t}+st\cdot J_n^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_n^{s,t}-t^2J_n^{s,t}+s\cdot t^2\cdot J_{n-1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-t(J_{n+1}^{s,t}-sJ_n^{s,t}) & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_n^{s,t}-t^2(J_n^{s,t}-sJ_{n-1}^{s,t}) & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}-t((-t)^n) & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ st\cdot J_n^{s,t}-t^2((-t)^{n-1}) & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sJ_{n+1}^{s,t}+(-t)^{n+1} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t(s\cdot J_n^{s,t}+(-t)^{n+1}) & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{n+2}^{s,t} & s\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t\cdot J_{n+1}^{s,t} & (s\cdot t)\cdot J_n^{s,t}\end{pmatrix}.$$

Com origem dos argumentos anteriores, os estudantes devem comprovar a fórmula fechada para a determinação da potências da matriz $F_s=\begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. A referida fórmula permite a determinação de qualquer elemento presente na s-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Por outro lado, desde que vimos o lema 1, indica um processo de extensão natural para um conjunto maior de índices inteiros.

Dessa forma, vem que $F_{s,t}^{-n-1}=F_{s,t}^{-n}\cdot F_{s,t}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^n}\cdot J_n^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^n}\cdot J_n^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t} & \frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^{n-1}}\cdot J_n^{s,t} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n-1}s^n}\cdot J_n^{s,t} & \frac{(-1)^{n+2}}{s^nt^n}\cdot J_{n+1}^{s,t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{s} & \frac{t-s}{st}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^n}\cdot J_n^{s,t} & \frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t}+\frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^{n-1}}\cdot J_n^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st} \\ \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^n}\cdot J_{n+1}^{s,t} & \frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^n}\cdot J_n^{s,t}+\frac{(-1)^{n+2}}{s^nt^n}\cdot J_{n+1}^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st}\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^n}\cdot J_n^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+2}s^{n+2}}\cdot J_{n+2}^{s,t}\end{pmatrix}$ o que confirma/produz a fórmula por Indução Matemática. De fato, podemos considerar na posição (1x2) a seguinte expressão

$$\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\cdot J_{n-1}^{s,t}+\frac{(-1)^{n+1}}{t^ns^{n-1}}\cdot J_n^{s,t}\cdot\frac{t-s}{st}=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(J_{n-1}^{s,t}-J_n^{s,t}\cdot\frac{(t-s)}{st}\right)=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(\frac{st\cdot J_{n-1}^{s,t}-tJ_n^{s,t}+sJ_n^{s,t}}{st}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(\frac{t\cdot(s\cdot J_{n-1}^{s,t}-J_n^{s,t})+sJ_n^{s,t}}{st}\right)=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(\frac{t(-(-t)^{n+1})+sJ_n^{s,t}}{st}\right)=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(\frac{(-t)^{n+2}+sJ_n^{s,t}}{st}\right)=$$

$=\frac{(-1)^n}{t^ns^{n-1}}\left(\frac{sJ_n^{s,t}+(-t)^n}{st}\right)=\frac{(-1)^n}{t^{n+1}s^n}\cdot J_{n+1}^{s,t}=s\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{t^{n+1}s^{n+1}}\cdot J_{n+1}^{s,t}$, recordando que empregamos a seguinte relação de recorrência $J_{n+1}^{s,t}=s\cdot J_n^{s,t}+(-t)^n$.

Situação de institucionalização: Temos acentuado em nossos trabalhos o carater de imprescindibilidade de proporcionar, num contexto de investigação histórica, elementos que proporcionam ao estudantes constatar que a atividade produtora e do estabelecimento de definições matemáticas funciona como uma “maquina” produtora e novos teoremas e que concorrem para o processo evolutivo matemático epistemológico que, nem sempre, se mostra visível. Ademais, tendo em vista que os documentos (artigos científicos) se constituirem relativamente recentes (ANATASSOV, 2011; 2012), a identificação de elementos desconsiderados pelo autor e a contribuição do grupo de estudantes nas atividades proporciona uma ação que simula a real atividade do matemático profissional, respeitando-se suas especificidades.

Ademais, o papel dos momentos previstos pela TSD, no sentido de distinguir/descrever momentos particulares envolvendo a interação do trinomio estudantes – conhecimento matemático – professor, que concorrem para a construção de um conhecimento por parte do grupo, oriundo do debate em sala de aula e ainda pela constação de elementos que concorrem para o processo matemático, epistemológico evolutivo da SJ, por meio de derivações abordadas no corrente trabalho, que indicamos por s-SGJ e (s,t)-SGJ. Por fim, outros elementos teóricos, a partir das próprias ponderaçõess de Anatossov (2012), os números da forma $Y_n^{s,t} = \frac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1}$ e $JP_n^s = \frac{p_n^s - (-1)^n}{p_{s+1}}$, aonde $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5\ldots$ são números primos, envolvem algumas questões e propriedades ainda em aberto. Assim, poderemos instigar os estudantes rumo a uma nova incursão matemática investigativa, envolvendo a generalização da SJ.

## 6. Considerações finais.

No trabalho atual, abordamos uma proposta de descrição teórico-conceitual, correspondentemente às duas primeiras etapas de uma ED (análises preliminares e análise *a priori*) que se enquadra num contexto de preocupação de proporcionar um dispositivo técnico e um conjunto de situações didáticas comunicáveis e reprodutíveis, em sala de aula, envolvendo as noções de s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal. Para tanto, do ponto de vista matemático, apresentamos algumas propriedades e identidades que, a despeito de constituir uma herança de uma sequência numérica, originalmente estudada por E. E. Jacobsthal, possui um interesse de estudo atual e os números do tipo $J_n^s$ e $J_n^{s,t}$, com n um inteiro qualquer, confirmam seu processo matemático epistemológico evolutivo (ver lema 1).

Vale observar que, seguindo a tradição dos trabalhos da vertente da Didática da Matemática, o uso, em carater de complementaridade, da ED com a TSD, visando a obtenção, acúmulo, constação e determinação de conhecimentos técnicos, didáticos e metodológicos sobre uma prática controlada de transmissão e transposição didática, relativamente a determinado conteúdo matemático. Assim, diante do carater atual dos conceitos científicos e definições matemáticas (ver definição 1 e 2), recentemente discutidas na literatura especializada, se evidencia o carater de relevância de sua abordagem no âmbito da formação inicial de professores, com enfase em seus aspectos históricos e epistemológicos. Tais elementos devem concorrer para um entendimento de um progresso ininterrupto na Matemática que pode ser revelado, de modo particular, a partir das derivações da relação $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$.

Por outro lado, podemos constatar o alto custo operacional no sentido da determinação efetiva das potências das matrizes que indicamos na tabela 1, 3ª e 4ª linhas. Dessa forma, com o recurso computacional (aquí empregamos o CAS Maple), podemos fornecer aos estudantes dados e exemplos particulares das mesmas a fim de estimular e instigar a produção de conjecturas relativamente ao intento da determinação de determinadas fórmulas fechadas paras as matrizes (que indicamos na tabela 1) do tipo $F_s{}^n$, $F_s{}^{-n}, F_{s,t}{}^n$ e $F_{s,t}{}^{-n}$, sobretudo nas fases dialéticas de ação e formulação, previstas pela TSD.

Por conseguinte, as fases de validação e institucionalização devem concorrer para a possibilidade de incorporação/elaboração aos conhecimentos dos estudantes determinados saberes que se encontram restritos aos meios de informação do tipo artigos científicos e livros especializados de Matemática Pura e Aplicada, isentos de preocupações históricas, epistemológicas e de transmissão. Desse modo, assinalamos o alcance do objetivo (a) e (b) de nosso trabalho que delimita um conjunto de informações que permitem sua eventual exploração e aplicação em sala de aula. As simples imformações que exibimos na tabela abaixo podem funcionar como um “fio condutor” para tal entendimento evolutivo na Matemática.

**TABELA 1.** Quadro resumido de formulas derivadas da SGJ.

| Fórmulas e identidades | s-Sequência Generalizada de Jacobsthal | (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal |
|---|---|---|
| Relação de recorrência | $J_{n+1}^s = s \cdot J_n^s + (-1)^n$ (ANATASSOV, 2011) | $J_{n+1}^{s,t} = s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n, \, ,n \geq 0$. (ANATASSOV, 2011) |
| Extensão ao campo de índices inteiros | $J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \; ,n \geq 0$ | $J_{-n}^{s,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(st)^n} \cdot J_n^{s,t} \; ,n \geq 0$ |
| Matrizes de representação | $F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \, s \geq 2$. | $F_{s,t} = \begin{pmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & st \cdot 0 \end{pmatrix}, \, s,t \geq 2$. |
| Potências com expoentes positivos | $F_s{}^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}, \, n \geq 2$. | $F_{s,t}{}^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{n-1}^{s,t} \end{pmatrix}, n \geq 2$. |

| | | |
|---|---|---|
| **Potências com expoentes negativos** | $F_s^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}} \cdot J_{n-1}^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s \\ \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s & s \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}} \cdot J_{n+1}^s \end{pmatrix}$ para $n \geq 1$. | $F_{s,t}^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{s^{n-1}t^{n-1}} \cdot J_{n-1}^{s,t} & s\frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} \\ t\frac{(-1)^{n+1}}{t^n s^n} \cdot J_n^{s,t} & (st)\frac{(-1)^{n+2}}{s^{n+1}t^{n+1}} \cdot J_{n+1}^{s,t} \end{pmatrix}$ para $n \geq 1$. |
| **Propriedade em aberto e ainda desconhecida** | $Y_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s^2 - 1}$, $JP_n^s = \frac{p_n^s - (-1)^n}{p_{s+1}}$ | $Y_n^{s,t} = \frac{s^n - (-t)^n}{s^2 - 1}$ (ANATASSOV, 2012) |

**Tabela 1.** Elaboração do autor

Ademais, não podemos desconsiderar a importancia do entendimento do processo de extensão dos índices que, originalmente, na sequência de Jacobsthal, se indicam apenas índices (naturais) inteiros positivos mas, todavía, podem ser extendidos, para um conjunto amplo e, ainda, de formas de representação variadas (HORADAM, 1996), como podemos apreciar na figura abaixo. Do ponto de vista histórico, iniciamos uma discussão da propriedade correlata no caso da Sequência de Fibonacci (ALVES, 2016) e que comprova uma trajetória natural dos modelos de sequências homogéneas recorrentes de orden n.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_n$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 | 85 | 171 | 341 | ... |
| $j_n$ | 2 | 1 | 5 | 7 | 17 | 31 | 65 | 127 | 257 | 511 | 1025 | ... |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{T}_n$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 20 | 41 | 84 | 169 | 340 | 681 | 1364 | ... |
| $\hat{j}_n$ | 0 | 1 | 6 | 13 | 30 | 61 | 126 | 253 | 510 | 1021 | 2046 | ... |

**Figura 6. Horadam (1996) discutiu o processo de extensão e representação da SJ por intermedio de argumentos matemáticos variados.**

Para comprovar, ainda, um processo de generalização e interesse especial neste tipo de propriedade, sugerimos a consulta do trabalho de Arslan & Koken (2016) que desenvolvem um estudo da determinação de elementos presentes na sequência de Jacobsthal com índices racionais, ainda com o emprego de propriedades matriciais.

$$\{\ldots,\ldots,J_{-n},J_{-n+1},J_{-n+2},\ldots,J_{-4},J_{-3},J_{-2},J_{-1},J_0,J_1,J_2,J_3,J_4,\ldots,J_n,J_{n+1}\ldots\}$$
$$\{\ldots,\ldots,J_{-n}^s,J_{-n+1}^s,J_{-n+2}^s,\ldots,J_{-3}^s,J_{-2}^s,J_{-1}^s,J_0^s,J_1^s,J_2^s,J_3^s,J_4^s,\ldots,J_n^s,J_{n+1}^s\ldots\}$$
$$\{\ldots,\ldots,J_{-n}^{s,t},J_{-n+1}^{s,t},J_{-n+2}^{s,t},\ldots,J_{-3}^{s,t},J_{-2}^{s,t},J_{-1}^{s,t},J_0^{s,t},J_1^{s,t},J_2^{s,t},J_3^{s,t},J_4^{s,t},\ldots,J_n^{s,t},J_{n+1}^{s,t}\ldots\}$$

Finalmente, os próximos passos da engenheria didática devem concorrer para a aplicação e experimentação efetiva das questões (situações didáticas) abordadas ao decurso do trabalho. De modo geral, os dados produzidos em sua aplicação, seguindo ainda a última fase (de validação da engenharia e de todo o aparato produzido para o ensino), deve concorrer para o acúmulo de conhecimentos didáticos e metodológicos sonre o assunto matemático abordado aquí.

## Bibliografía


Almouloud, Ag Saddo. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

Almouloud, Ag Saddo & Silva, Maria. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, nº 2, 2012.

Almouloud, Ag Saddo. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações problemas: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 11, nº 2, 109 – 141, 2016.

Alves, Francisco, R. V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci na disciplina de História da Matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 18, nº 1, 61 – 93, 2016a. Recuperado el 10 de abril de 2017, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive

Alves, Francisco, R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da Sequência Generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, nº 68, 1 – 5, 2016b. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=archive

Alves, Francisco, R. V. Sequência Generalizada de Pell – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista THEMA*. v. 13, nº 2, 27 – 41, 2016c. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo13.pdf

Alves, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação*. v. 7, nº 21, 131 – 150, 2016d. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/issue/view/109/showToc

Alves, Francisco. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. *VYDIA Educação*. v. 35, nº 1, 133 – 146, 2015. Recuperado el 10 de abril de 2017, de http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/issue/archive

Anita, A.Gnanam, B. (2016). Negative Jacobsthal Numbers. International Journal of Science, *Engineering and Technology Research* (IJSETR). v. 5, nº 3, 663 – 665.

Artigue, M. (1996). Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). *Didactiques de Mathématiques*, 243 – 264. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France.

Artigue, M. (2009). Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (eds). *NORMA08*, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark, 7 – 16.

Arlsan. S. & Koken, F. (2016). The Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers via Square Roots of Matrices. *International Mathematical Forum*, 11(11), 513 – 520.

Recuperado el 15 de mayo de 2017, de http://www.m-hikari.com/imf/imf-2016/9-12-2016/p/kokenIMF9-12-2016.pdf

Brousseau, G. (1986). Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33 – 115.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.) (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160.

Chevallard. Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition.

Jacobsthal, E. (1919 – 1920). Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen. *Berlinger Mathematische Gesellschaft*. Sitzungsberichte. v. 13, 43 – 57.

Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. *The Fibonacci Quarterly*, v. 34, nº 1, 40 – 55.

Koken, F. & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. *Int. Journal Contemp. Math. Sciences*, 3(13), 605 – 614. http://m-hikari.com/ijcms-password2008/33-36-2008/kokenIJCMS33-36-2008.pdf

Margolinas, C. (1995). Dévolution et intitutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. Comiti, C.; Bessot, M. P. *Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, 342 – 347.

Robinet, J. (1983). De L´ingenierie Didactiques. *Les Cahiers Blancs*. 1(1), 1 – 11.

Siegmund-Schultze*, Reinhard.* (2009). *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact.* Princenton: Princenton University.

**Autor:**
**Francisco Regis Vieira Alves**
Doutor em Educação com enfase no ensino de Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Programa de Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM. Fortaleza/Brasil. Email: fregis@ifce.edu.br