

Buscando máximos y mínimos: desafíos con la media y la mediana

Uldarico Malaspina

Resumen	Se presenta un problema trabajado con estudiantes universitarios de educación, de la especialidad de matemáticas para secundaria. Es de contexto extramatemático, en el que debe relacionarse los conceptos de media aritmética y mediana para examinar posibilidades de obtención de valores máximos y mínimos de la mediana de un conjunto de datos posibles. Se presenta la solución de uno de los estudiantes, así como un problema creado por él, a partir del problema dado. Se hacen comentarios y reflexiones en relación a procesos de aprendizaje en el entorno matemático de las medidas de tendencia central. <i>Palabras clave:</i> media aritmética, mediana, estadística, optimización, creación de problemas, resolución de problemas.
Abstract	This article presents a mathematical task developed with university students enrolled in a secondary mathematics teacher education program. Set in an extra-mathematical context, the problem requires relating the concepts of arithmetic mean and median to determine the maximum and minimum values of the median for a given dataset. A solution produced by one student is presented, together with a new problem posed by the student based on the original task. The article concludes with comments and reflections on the teaching and learning of measures of central tendency and on the learning processes involved. <i>Keywords:</i> arithmetic mean, median, statistics, optimization, problem posing, problem solving.
Resumo	Apresenta-se um problema trabalhado com estudantes universitários de pedagogia, da especialização em matemática para o ensino médio. Trata-se de um contexto extramatemático, no qual é necessário relacionar os conceitos de média aritmética e mediana para examinar as possibilidades de obtenção dos valores máximo e mínimo da mediana de um conjunto de dados possíveis. Apresenta-se a solução de um dos alunos, assim como um problema criado por ele, a partir do problema proposto. São feitas observações e reflexões relacionadas aos processos de aprendizagem no campo matemático das medidas de tendência central. <i>Palavras-chave:</i> média aritmética, mediana, estatística, otimização, criação de problemas, resolução de problemas.

Problema

En un curso se deben rendir cinco prácticas calificadas y cada una tendrá solo una de las siguientes notas: 08, 10, 12, 14 o 16. La nota final de prácticas del curso es la media aritmética de las cinco calificaciones. Si Jovita obtuvo 10 como nota final de prácticas en el curso (sin redondeos), determinar los valores máximo y mínimo que podría haber tenido la mediana de sus cinco calificaciones.

Este problema fue creado por variación, a partir de un problema propuesto en la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas (ONEM) del Perú, en el nivel 2 de la etapa Unidad de Gestión Educativa Local (Ver Anexo). Formó parte de las actividades propuestas en una sesión de aprendizaje con estudiantes de educación, de la especialidad de matemáticas, considerando la importancia de trabajar problemas de optimización, esta vez en el marco de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) vigente en el Perú. En la ficha de trabajo se pidió no solo resolver el problema, sino atender algunas interrogantes de carácter didáctico relacionadas con él y tenerlo como referencia para crear un problema para estudiantes de secundaria. Es decir, crear un problema por variación, a partir del problema dado.

Teniendo en cuenta mi enfoque sobre creación de problemas (Malaspina, 2021; Malaspina et al., 2025), en este caso, la información del problema es la media aritmética de las cinco notas obtenidas por Jovita (10 es su nota final, sin redondeos), y el conjunto de posibles notas a obtener ($\{08, 10, 12, 14, 16\}$). El requerimiento es determinar los valores máximo y mínimo que podría haber tenido la mediana de las cinco calificaciones de Jovita. El contexto es extramatemático y el entorno matemático es medidas de tendencia central. Estas precisiones serán útiles al examinar la creación de un problema por variación.

Una forma de resolver el problema dado

A continuación, en la Figura 1, muestro la resolución hecha por Jesús Ibáñez, uno de los estudiantes de educación, con los que trabajamos el problema, que además la expuso muy bien en la clase:

$$\text{NOTA FINAL} = 10 = \frac{\sum \text{NOTAS}}{\# \text{NOTAS}}$$

$$10 = \frac{\sum \text{NOTAS}}{5}$$

$$50 = \sum \text{NOTAS}$$

$$50 = _ + _ + _ + _ + _$$

↑
MEDIANA

1º CASO:
 $50 = 08 + 08 + 08 + 10 + 16$ ✓ $\rightarrow \text{Me} = 08$
 2º CASO:
 $50 = 08 + 08 + 10 + 12 + 12$ ✓ $\rightarrow \text{Me} = 10$
 3º CASO:
 $50 = _ + _ + 12 + 12 + 12$ ✗
 EXCEDERÍA MÍNIMO Y FALTA 14
 4º CASO:
 $50 = _ + _ + 14 + 14 + 14$ ✗
 EXCEDERÍA MÍN Y FALTA 08
 5º CASO:
 $50 = _ + _ + 16 + 16 + 16$ ✗
 IMPOSIBLE QUE SUMEN 2

Figura 1

Podemos observar que Jesús ha advertido que, conociendo el promedio de 5 calificaciones, puede conocerse la suma de tales calificaciones, que en este caso es 50; él representa esta suma mostrando espacios para los 5 sumandos al lado izquierdo de su hoja de trabajo, indicando, además, el espacio correspondiente a la ubicación de la mediana; supuestamente luego de haber colocado los sumandos en orden no decreciente, de izquierda a derecha.

Al lado derecho, Jesús examina la posibilidad de que cada una de las notas obtenibles sea mediana. En el primer caso, si la mediana fuera 8, la primera y segunda nota también tendrían que ser 8, pues tienen que ser menores o iguales que la mediana y menores no pueden ser, pues no hay calificación menor que 8. Así, ya tendría 24 puntos acumulados y la cuarta y quinta nota podrían ser 10 y 16 para que se totalice 50. De esta manera, muestra que 8 es un valor posible de la mediana. Ciertamente, hay también otras posibilidades para la cuarta y quinta nota (basta que sumen 26); por ejemplo, la cuarta podría ser 16 y la quinta 10; la cuarta podría ser 12 y la quinta 14, etc. Lo importante es que se muestra que es posible que la mediana sea 8.

En el segundo caso, Jesús muestra que la mediana podría ser 10. Él considera las notas 8, 8, 10, 12 y 12. Esta es una de las posibles notas que podría haber obtenido Jovita en cada una de sus cinco prácticas calificadas, para que su promedio sea 10 y su mediana también sea 10. Otra vez, lo importante es que se muestra que es posible que la mediana sea 10. Otra posibilidad es 8, 8, 10, 10 y 14.

En los casos 3°, 4° y 5°, Jesús muestra que es imposible que la mediana sea 12, 14 o 16, respectivamente. Por ejemplo, en el tercer caso, si la mediana fuera 12, los menores valores que podrían tomar los sumandos de la derecha son también 12 y 12; pero aun así ya la suma sería 36 y es imposible que las notas de la primera y segunda prácticas calificadas sumen 14 (para que la suma total sea 50) pues tales notas solo pueden ser 8, 10 o 12.

Así, Jesús concluye, correctamente, que los únicos valores posibles de la mediana son 8 y 10 y, en consecuencia, los valores máximo y mínimo que podría haber tenido la mediana de las cinco calificaciones de Jovita son 10 y 8 respectivamente.

Creación de un problema

Como dije antes, las actividades en la clase incluían también la creación de un problema por variación, a partir del problema dado. Jesús presentó y resolvió un problema que creó (Figura 2). Como puede observarse, el problema es bastante similar al problema dado. Se mantiene el contexto extramatemático y el entorno matemático, pero se modifica la información y el requerimiento del problema, pues ahora son solo tres calificaciones obtenibles (08, 12 y 16), el promedio es 12 y lo que se pide es determinar los valores posibles de la mediana.

La resolución que mostró fue muy similar a la del problema dado (Figura 3), pues usando el hecho que ahora la suma es 36 analizó si cada una de las notas podría ser mediana y mostró la imposibilidad de que sea 8 o 16 y una posibilidad

4. Crear un problema nuevo, para secundaria, inspirado en el problema dado.

Escribir el texto del problema creado

En un curso se deben rendir tres prácticas calificadas y cada una tendrá solo una de las siguientes notas: 08, 12 o 16. La nota final de prácticas es la media aritmética de las tres calificaciones. Si Pancho obtuvo 12 como nota final de prácticas en el curso (sin redondeos), determinar ~~que~~ qué valor (o valores) puede tomar la mediana de las tres calificaciones.

$$\text{NOTA FINAL} = 12 = \frac{\sum \text{NOTAS}}{\# \text{ NOTAS}}$$

$$12 = \frac{\sum \text{NOTAS}}{3}$$

$$36 = \sum \text{NOTAS}$$

$$36 = _ + _ + _$$

1º Caso: $36 = \frac{08}{\substack{\uparrow \\ \text{no hay otra opción}}} + \frac{08}{\substack{\uparrow \\ \text{No puede ser 20}}} + _ \times$

2º Caso: $36 = \frac{12}{\substack{\uparrow \\ \text{MEDIANA}}} + \frac{12}{\substack{\uparrow \\ \text{MEDIANA}}} + \frac{12}{\substack{\uparrow \\ \text{MEDIANA}}} \checkmark \therefore \text{Rpta} = \text{Me} = \underline{\underline{12}}$

3º Caso: $36 = _ + \frac{16}{\substack{\uparrow \\ \text{No puede ser 04}}} + \frac{16}{\substack{\uparrow \\ \text{No hay otra opción}}} \times$

Comentarios y reflexiones

En este caso, la optimización es en un espacio discreto y lleva al estudiante a construir escenarios para encontrar valores extremos (máximo o mínimo) bajo restricciones lógicas, relacionando media aritmética y mediana. En ese sentido, es una forma de ir más allá de los simples cálculos aritméticos e introducir al pensamiento algorítmico, combinatorio y optimizador en la educación secundaria. Es una manera de elevar la estadística escolar de un nivel meramente operativo a uno predominantemente estratégico.

UNIÓN

(conocer la suma de los datos a partir de la media aritmética), que es un paso fundamental en el problema dado.

El problema también permite ilustrar una diferencia importante entre la media y la mediana de un conjunto de datos: manteniendo el promedio completamente fijo (10 en este caso), los datos internos (del conjunto de datos posibles) pueden moverse y reconfigurarse, de modo que la mediana pueda ser 8 o 10.

El problema creado por Jesús, como bien lo manifestó él mismo, es un problema PRE, respecto al problema dado, pues – como caracteriza a estos problemas – su solución ayudaría a los estudiantes a resolver el problema inicial. Él ha reducido la información y simplificado el requerimiento. No es un problema de optimización, pero familiarizarse con el análisis de posibles valores de la mediana contribuirá a examinar valores máximo y mínimo de esta, como se requiere en el problema inicial.

Con estas reflexiones concluyo *El Rincón de Problemas* de este número de *UNIÓN* y, como en los números anteriores, invito a los lectores a participar en *El Rincón Intercreativo*, de este número.

A continuación, dejo algunas preguntas que podrían ser usadas para escribirme algo que se publicaría en *El Rincón Intercreativo* del próximo número:

- i) ¿Considera usted importante trabajar en la educación básica con problemas como el propuesto? ¿En qué nivel? ¿Por qué?
- ii) ¿Cómo implementaría el problema de este artículo en una sesión de aprendizaje con sus estudiantes?
- iii) Teniendo en cuenta el problema y las reflexiones expuestos en este artículo, ¿qué problema propondría para estimular en los estudiantes el uso creativo de las medidas de tendencia central?
- iv) ¿Qué opina sobre la introducción de problemas de optimización, en el marco de conceptos de estadística?
- v) ¿Cómo resolvería usted el problema de este artículo o qué comentarios haría a la resolución mostrada?

Agradezco los comentarios que me hicieron llegar, relacionados con el problema del número anterior de *UNIÓN* y con el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas, y los invito a leerlos en *El Rincón Intercreativo* de este número.

Finalmente, reitero mi exhortación amigable a que me hagan llegar sus comentarios o – mejor aún – sus experiencias en aula, a partir de sus reflexiones de carácter didáctico o matemático, motivados por la lectura de este artículo. Nos dará

mucho gusto publicar y comentar lo que me escriban, en el próximo número de *UNIÓN*, como lo estoy haciendo en este número.

Agradecimiento: Agradezco al estudiante de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Jesús Ibáñez, por su involucramiento entusiasta en el problema durante la clase y por autorizar el uso de su resolución, así como del problema que creó, en este artículo.

Bibliografía

- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17>
- Malaspina, M., Malaspina, U., & Barraga, G. (2025). La creación de problemas como marco para inventar juegos que estimulen el pensamiento matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (28), 97–116. <https://doi.org/10.35763/aiem28.7521>

Anexo

Problema

[Propuesto en el 2022, en la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas (ONEM) del Perú, en el nivel 2 de la etapa Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL)]

En el curso de estadística de un Instituto Superior dejaron cinco actividades y establecieron que la calificación de cada actividad podía ser solamente 0, 1, 2, 3 o 4.

La nota del curso es la suma de las cinco calificaciones. Si Sandra obtuvo 11 en el curso, determinar el valor mínimo que podría tomar la mediana de sus cinco calificaciones.