

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el nivel superior: análisis de dialécticas de un REI codisciplinar

Teaching differential equations at the higher education level: analysis of dialectics from a codisciplinary SRP

Ensino de equações diferenciais no ensino superior: análise da dialética a partir de uma perspectiva interdisciplinar de educação em realidade e inovação.

Laura Noemí Rossi, Patricia Sureda

Fecha de recepción: 10-05-2026
Fecha de aceptación: 18-08-2026

Resumen	Este artículo aborda la importancia de las ecuaciones diferenciales en la formación matemática en el nivel superior y universitario desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se analiza la implementación de un REI codisciplinar en torno al modelo SIR para la pandemia de COVID-19, se estudian las dialécticas identificadas por Chevallard como herramientas analíticas para entender cómo emergen y se construyen obras matemáticas auténticas. El estudio muestra cómo la modelización de fenómenos reales conlleva al desarrollo, investigación y estudio de organizaciones praxeológicas complejas que justifican la introducción de las ecuaciones diferenciales como herramientas fundamentales para interpretar la realidad. Palabras clave: ecuaciones diferenciales - Teoría Antropológica de lo Didáctico – dialécticas- educación superior y universitaria.
Abstract	This article addresses the importance of differential equations in mathematical training at the higher and university levels from the perspective of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The implementation is being analyzed of a co-disciplinary Study and Research Path (SRP) around the SIR model for the COVID-19 pandemic, the dialectics identified by Chevallard are studied as analytical tools to understand how authentic mathematical works emerge and are constructed. The study shows how the modeling of real phenomena leads to the development, research, and study of complex praxeological organizations that justify the introduction of differential equations as fundamental tools to interpret reality. Keywords: differential equations - Anthropological Theory of the Didactic - dialectics - higher and university education.

Resumo

Este artigo aborda a importância das equações diferenciais na formação matemática no nível superior e universitário a partir da perspectiva da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Através da análise da implementação de um Percorso de Estudo e Investigação (PEI) codisciplinar em torno do modelo SIR para a pandemia de COVID-19, as dialécticas identificadas por Chevallard são estudadas como ferramentas analíticas para entender como obras matemáticas autênticas emergem e são construídas. O estudo mostra como a modelagem de fenômenos reais leva ao desenvolvimento, pesquisa e estudo de organizações praxeológicas complexas que justificam a introdução de equações diferenciais como ferramentas fundamentais para interpretar a realidade.

Palavras-chave: equações diferenciais - Teoria Antropológica do Didático - dialécticas - educação superior e universitária.

1. Introducción

Los cursos de ecuaciones diferenciales (ED) en los niveles terciario y universitario, a menudo consisten en la enseñanza de diversos métodos de resolución analítica, y de lograr fórmulas de solución. Sin embargo, la complejidad inherente a cada uno de estos métodos es uno de los mayores obstáculos al momento de estudiarlas. Así, el estudio de las ED en un gran reto tanto para docentes como para estudiantes (Parra, 2020, pp. 2). Por otra parte, esta forma de enseñarlas reduce el saber a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas que carecen de sentido para el estudiante, quién focalizado en realizar adecuadamente los procedimientos pertinentes, acaba con dificultades para identificar la finalidad de ellos, o para interpretar las soluciones calculadas (Blanchard, 1995, pp. 387; Bejarano, 2019, pp. 125). El tipo de enseñanza que se describe, es lo que Chevallard (2013 c) denomina el “*paradigma*” de la “*Visita de las obras*”, y se caracteriza por ser un monumento con valor propio, que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan sus “*razones de ser*”, ni sus funcionalidades. En este contexto todo conocimiento enseñado puede ser legítimamente olvidado.

Un contraparádigma, en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, es el que se denomina “*del cuestionamiento del mundo*”. Uno de los dispositivos didácticos mediante el cual se materializa este paradigma y permite recuperar la *razón de ser* de las obras matemáticas son los “*Recorridos de Estudio e Investigación*” (REI) (Chevallard, 2004). La implementación de este paradigma requiere redefinir el estudio de las organizaciones matemáticas escolares en términos de un conjunto de preguntas, cuya construcción de las respuestas implica encontrar o re-encontrar obras matemáticas escolares propuestas para enseñar en las instituciones educativas.

En este contexto, enmarcar el estudio de las ecuaciones diferenciales en el paradigma del “*cuestionamiento del mundo*”, requiere que el saber emerja de manera funcional como herramienta para dar respuestas a cuestiones problemáticas (Chevallard; 2013, pp 4-5.; 2017, pp. 161-162; 168; Barquero, Bosch, Gascón; 2011, pp. 340-341). Dado que la *razón de ser* de las ecuaciones diferenciales es: ***poder predecir la estimación de cambio*** (Edwards, 2008), su funcionalidad se puede encontrar en ciencias como, biología, física, química, economía entre otras (Thomas, 1999).

Un problema ligado a la *estimación de cambio* que involucró y preocupó a la población mundial en el año 2020, fue la pandemia de COVID-19. Este tipo de enfermedades infectocontagiosas, en epidemiología, se pueden describir mediante modelos matemáticos que permiten el análisis de *variaciones* o *sensibilidad de cambio* entre los conjuntos de personas sanas, infectadas y recuperadas. Estos modelos sirven, entre otras cosas, para tomar decisiones objetivas respecto al control de las enfermedades (Montesinos-López, Hernández-Suarez, 2007).

En este marco, pensar un REI disciplinario para epidemiología, o para matemática, desbordaría los límites estrictos de la disciplina en el cual se contempla. Por estas razones, este trabajo se plantea diseñar, implementar y analizar un REI codisciplinar que involucra epidemiología y matemática, y que tiene como cuestión generatriz la pregunta *Q*₀: *¿Cómo se estima la cantidad de infectados por COVID-19?* Esta propuesta pretende que las ecuaciones diferenciales emerjan de manera funcional como herramienta para dar respuestas a cuestiones problemáticas (Chevallard, 2017). La implementación se llevó a cabo en dos instituciones de formación superior: **a)** la institución uno (I1) es un profesorado en matemática de un instituto terciario con cursada presencial, y, **b)** mientras que la institución 2 (I2) es universitaria, y la investigación se realizó en una formación continua de profesores de matemática en ejercicio, que se realiza en formato virtual. En este trabajo se analiza el desarrollo didáctico del REI en la Institución uno (I1), mediante las diez dialécticas.

2. Marco Teórico

2.1 Teoría Antropológica de lo didáctico:

El Recorrido de Estudio e Investigación (REI) es un dispositivo didáctico que organiza el saber en una sucesión de pares de preguntas *Q* y respuestas *R*. Las preguntas tienen la finalidad de proveer las razones de ser del estudio y recuperar el sentido que las Organizaciones Matemáticas (OM) perdieron, por mostrarse segmentadas y aisladas de las cuestiones que lo generaron (Chevallard, 2013b). En particular, en un REI, un conjunto de estudiantes *X*, con ayuda de uno o más profesores *Y*, estudian una cuestión generatriz *Q* en búsqueda de una respuesta *R*♥. Dependiendo de la generatividad de la pregunta generatriz y de sus preguntas derivadas, los REI permiten estudiar distintas organizaciones matemáticas, como parte del proceso de construcción de una respuesta válida a *Q*. La relevancia otorgada a las preguntas es clave para superar el paradigma clásico de “*visitar los saberes*”, e intenta introducir al grupo de clase, en el nuevo paradigma de “*interrogar al mundo*” (Chevallard, 2013; 2017).

Las dialécticas o formas de saber-hacer del estudio y de la investigación según Chevallard (2013 a) son:

D1. Dialéctica del estudio y de la investigación: no es posible investigar sin estudiar, como también, el hecho de que de un estudio genuino se desprenden preguntas derivadas de una pregunta generatriz. Las obras matemáticas que se encuentran para generar la respuesta, serán estudiadas en distintos niveles de profundidad según la necesidad y pertinencia. En este caso, el grupo no solo “estudia” el modelo SIR existente, sino que “investiga” datos reales de la pandemia

para construir una respuesta a la pregunta generatriz "¿Cómo se estima la cantidad de infectados?"

D2. Dialéctica del individuo y del colectivo: el estudio de la pregunta generatriz implica un reparto entre los estudiantes, de tareas y responsabilidades individuales, que luego serán discutidas en el grupo de estudio donde se sostienen y validan las respuestas que se generan colectivamente. Esto implica que el trabajo individual de cada integrante de dicha comunidad, se debe validar y unificar en el grupo, ya sea en los encuentros presenciales o en el grupo cerrado de WhatsApp, a fin de tomar decisiones conjuntas sobre el modelo.

D3. Dialéctica del análisis y la síntesis: todo análisis praxeológico implica un análisis didáctico y recíprocamente. Para entender una realidad praxeológica, es necesario plantear preguntas didácticas, que permitan analizar las praxeologías matemáticas y su génesis del saber, para su difusión. En base a este REI, el análisis de las praxeologías matemáticas (técnicas de resolución de ED) se sintetiza con el análisis didáctico para entender cómo difundir ese saber de manera funcional.

D4. Dialéctica del tema y fuera del tema: la pregunta generatriz debe ser amplia en el sentido que permita "irse" del tema, saliendo también de la disciplina de referencia y reingresar posteriormente. Para responder a la pregunta generatriz del REI, los estudiantes deben "salir" de la matemática pura e ingresar a la epidemiología (tasas de contagio, inmunidad, entre otros temas ya sea matemáticos o epidemiológicos) y luego "reingresar" para formalizar las ecuaciones diferenciales.

D5. Dialéctica del paracaidista y las trufas: en el sistema didáctico se sugiere la condición de exploradores por parte de los actores, ya que, por un lado, necesitan tomar distancia del problema y explorar el terreno desde muy arriba para inspeccionar las zonas, y luego cuando encuentran la zona deben explorarla como lo hace un buscador de trufas, a fin de focalizarse y analizar la utilidad de lo encontrado.

D6. Dialéctica de las cajas negras y cajas claras: hace referencia a la necesidad de establecer si una obra matemática merece ser estudiada, aclarada o analizada según su funcionalidad para lo que se investiga. Decidir si se profundizará en el método numérico de resolución de la ED (caja clara) o si se usará un software como GeoGebra simplemente para graficar resultados sin analizar el algoritmo interno (caja negra), es parte de la investigación y estudio de este REI.

D7. Dialéctica medio-media: la respuesta elaborada de un REI, es producto de una conjetura, por lo tanto, debe ponerse a prueba. Una media es cualquier sistema de comunicación donde los estudiantes disponen de las respuestas ya establecidas, pero deben ser puestas a prueba, transformadas e incorporadas al medio. Se cuestionan los datos de los diarios o reportes oficiales (media) y se transforman en un sistema de ecuaciones que conforma el nuevo medio didáctico del grupo.

D8. Dialéctica de la conjetura y la prueba: hace referencia a no realizar una transcripción de las respuestas ya existentes, sino que se cuestiona la media y se toma solo de ella la parte útil, reescribiéndose a las necesidades de la investigación. Como ejemplo del REI, Los estudiantes conjeturan que "a mayor aislamiento, menor

es β " y deben probarlo ajustando los parámetros de las ecuaciones y comparándolas con las curvas de contagio reales.

D9. Dialéctica de la lectura y escritura: de la difusión y de la recepción: surge debido a la necesidad de difundir y defender la respuesta producida por la comunidad de estudio. En este REI, Se hace presente en la redacción de los informes preliminares y la defensa de la respuesta ante el docente y los pares, traduciendo el proceso de investigación en un documento comunicable.

D10. Dialéctica de los sistemas y modelos: Los REI parten de una cuestión inicial que se refiere a un sistema. Esta cuestión provoca elaborar un modelo inicial a este sistema. Por lo general, este primer modelo no permite resolver la cuestión directamente. La comunidad tendrá que construir, con la ayuda de unas herramientas (los elementos praxeológicos), un sistema intermedio que permitirá abordar mejor la cuestión inicial. Como afirma Chevallard, en la descripción de los procesos de modelización, se suele olvidar aquello que permite pasar del sistema inicial a uno intermedio. A este fenómeno se lo denomina praxeología evanescente. Se aprecia la transición del sistema real (la propagación del virus en la población) al modelo matemático (sistema de ED no lineales) para predecir el comportamiento futuro del modelo.

2.2. Estimación de la cantidad de contagiados por COVID19 (modelos matemáticos epidemiológicos SIR)

La relevancia de los modelos matemáticos en enfermedades infectocontagiosas radica en que se usan como herramientas para la toma de decisiones sanitarias, ya que permite describir de manera adecuada las características básicas de la epidemia y como se produce su dispersión en una población (Becker, 1979).

La importancia de los modelos matemáticos en la epidemiología, radica en su capacidad para transformar una realidad biológica compleja en un sistema de relaciones lógicas que permiten la predicción, la gestión de recursos y la evaluación de políticas públicas. Esto es, porque la modelización no es solo una representación de datos, sino una herramienta de experimentación ética. Según Hethcote (2000), estos modelos permiten:

- **Entender la dinámica de transmisión:** Identificar qué factores (biológicos o sociales) aceleran o frenan un brote.
- **Evaluar escenarios hipotéticos:** Probar el impacto de vacunas o cuarentenas sin necesidad de implementarlas físicamente primero, lo cual es vital para la toma de decisiones en salud pública.
- **Establecer umbrales críticos:** Determinar el porcentaje de población que debe ser inmunizada para alcanzar la "inmunidad de rebaño".

Dentro de los modelos, se encuentran los determinísticos, como ser el modelo SIR y SIER, en los cuales se controlan los factores que intervienen en el proceso de estudio, permitiendo predecir con exactitud los resultados. En estos modelos se divide a la población en Susceptible, Infectado y Recuperado y se asume que la interacción entre los individuos es aleatoria (Anderson, 1991). La mayor importancia

del modelo SIR es que permite llevar a la infección a una inmunidad vitalicia (Montesinos-López Hernández-Suarez, 2007). El modelo **SIR** (Susceptibles, Infectados, Recuperados) es el "estándar de oro" de los modelos compartimentales. Su importancia científica se divide en tres ejes:

A. Simplicidad Estructural y Potencia Predictiva

A pesar de su sencillez, el SIR captura la esencia de las epidemias donde la recuperación confiere inmunidad. Como señalan **Kermack y McKendrick (1927)** en su trabajo fundacional, el modelo demuestra que una epidemia no termina porque se agoten los susceptibles, sino porque la tasa de infección cae por debajo de un umbral crítico. El modelo **SIR**, divide a la población en tres categorías mutuamente excluyentes basadas en el estado de la enfermedad:

1. **Susceptibles (S):** Personas sanas que pueden contraer el virus.
2. **Infectados (I):** Personas que tienen el virus y pueden transmitirlo.
3. **Recuperados (R):** Personas que han superado la enfermedad (o fallecido) y han adquirido inmunidad.

B. El Cálculo del Número Básico de Reproducción (R_0)

El SIR permite derivar el R_0 probablemente el parámetro más importante en epidemiología. Este valor indica a cuántas personas infectará, en promedio, un solo individuo en una población totalmente susceptible.

- Si $R_0 > 1$, la enfermedad se propaga.
- Si $R_0 < 1$, la enfermedad desaparece.
- En el caso del COVID-19, las estimaciones iniciales variaron entre 2.5 y 5.0, lo que explica el crecimiento exponencial observado en las fases tempranas de 2020.

C. Visualización de la "Curva Epidémica"

Matemáticamente, el modelo muestra cómo el número de infectados (I) alcanza un pico y luego desciende. Esto permite a los gobiernos "aplanar la curva", extendiendo el tiempo de la epidemia para no colapsar el sistema sanitario.

4. Metodología

El trabajo se encuadra en una investigación cualitativa, y se enmarca en un estudio de caso exploratorio, descriptivo e interpretativo (Moreira, 2009). Se utiliza la técnica de observación participante, ya que el profesor que implementa el REI es el investigador. La investigación se divide en tres etapas. En la primera etapa se realiza una revisión de bibliografía de ambas disciplinas, y se construye un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR), similar al adoptado por Costa et al. (2013, pp.77).

El MPR es una herramienta que permite describir y analizar tanto los posibles REI a desarrollar, como el efectivamente desarrollado. En la segunda etapa, se diseña e implementa un REI codisciplinar relativo a los contagiados por Covid-19 en dos instituciones de enseñanza superior. En la tercera etapa, se describe y analiza las praxeologías matemáticas, epidemiológicas y didácticas reconstruidas por el grupo de clase durante la implementación del REI. En particular el análisis didáctico se realizará mediante las dialécticas propuestas por Chevallard (2013a). Para ello se utilizarán categorías de análisis e indicadores inspirados en los propuestos por Parra (2013).

En la Institución 1 (I1) el REI se llevó a cabo de forma presencial en un tercer año del Profesorado de Matemática de un Instituto Terciario de gestión semiprivada, ubicado en la Provincia de Misiones (Argentina). La cátedra donde se implementó es Matemática Aplicada debido a que en esa materia se estudian las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a otras ciencias. Esta materia es cuatrimestral y la cursaron aproximadamente 10 estudiantes de entre 20 y 30 años. El REI se implementó a lo largo de dos meses, con una carga presencial de 3 horas reloj de las clases por semana. Los estudiantes podían intercambiar información mediante un grupo cerrado de WhatsApp y una carpeta disponible en Drive. Se recogieron todas las producciones de los estudiantes: las anotaciones realizadas en sus carpetas, los archivos y discusiones que compartían o generaban en el grupo cerrado de WhatsApp de la cátedra y los archivos compartidos en un drive. Se realizaron registros de audios de las discusiones en clase, y observación participante de la docente, que es a su vez, la investigadora.

Para analizar las dialécticas a lo largo del REI, se realizó la tabla 1 con las siguientes columnas: la primera corresponde a las sesiones realizadas, considerándose que el cambio de sesión es cada encuentro presencial en la Institución 1 (I1), la segunda describe los episodios; el episodio cambia según el tipo de encuentro (presencial o grupo cerrado de WhatsApp). La tercera columna hace referencia a las diez dialécticas y las subdivisiones de las mismas, ya que, se considera que algunas pueden ser analizadas por separado. Por ejemplo, la dialéctica uno ($D_{1,A}$) se puede separar en *dialéctica del estudio* ($D_{1,A}$) cuando se profundiza en la obra matemática o epidemiológica, y en *dialéctica de la investigación* ($D_{1,B}$) cuando los estudiantes buscan información en internet, libros u otros. Con respecto a la segunda dialéctica, también se subdivide, ya que muchas veces, hay en una primera instancia un trabajo del *individuo* ($D_{2,A}$) de explorar, investigar y realizar aportes, mientras que el trabajo *colectivo* ($D_{2,B}$) es el que determina la toma de decisiones y su avance. La dialéctica tres y cuatro mantiene su estructura. Con respecto a la dialéctica cinco, se divide en considerar por una parte al *paracaidista* ($D_{5,A}$) ya que cuando se busca, se hace sobre diferentes temas y usando diversas medias, mientras que, durante el *descubrimiento de las trufas* ($D_{5,B}$) el trabajo del estudiante es puntual y se dedica a analizar un saber en particular. Las dialécticas seis, siete, ocho, nueve y diez se analizan sin dividirse. La siguiente columna, refiere a los indicadores, es decir allí se encuentra la información recolectada en la clase, que muestra lo que sucede en cada sesión. Esto es lo que funciona como soporte de cada dialéctica, y como evidencia del trabajo de los estudiantes.

Sesión	Episodios	Pregunta	Dialécticas										Indicadores
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
			(A) Del Estudio (B) De la Investigación	(A) Del Individuo (B) Del Colectivo	Del análisis (y la síntesis) <i>paraxenológica</i>	(A) Del Tema (B) Fuera del tema	(A) Del Paracaidista (B) De las Trufas	De las cajas negras y cajas claras	De la conjetura y de la prueba (<i>mediana media</i>)	De la lectura y escritura	De la difusión y de la recepción	Del Modelo y el Sistema	

Tabla1: Análisis de las dialécticas

El REI fue documentado, como se explicó en la metodología, en sesiones y episodios, donde se fue registrando las dialécticas emergentes. La aparición de una dialéctica, se especifica con un 1, la ausencia con 0.

En la tabla 2, se muestra el análisis de las dialécticas de la segunda sesión (sesión 2), episodio ocho (E8), donde se trabaja con la siguiente pregunta derivada: *¿Qué función representa un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Argentina? (Q7).*

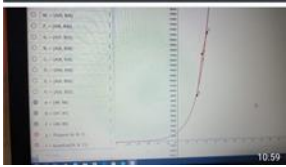
2	Sesión presencial	Episodio 8: Q ₇ : ¿Qué función representa un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Argentina?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	I_{1, B}: Investigación en libros, páginas web, materiales de años anteriores de análisis matemático. I_{1, A}: Estudio de la función determinada al tomar un intervalo de crecimiento de casos de COVID-19 en Argentina. I_{2, A}: Búsqueda individual de información ya sea en internet, libros, carpetas de años anteriores, que aporte a lo que se estaba investigando. I_{2, B}: Decisión respecto a la modelización obtenida en un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Geogebra. I₃: Analizan la praxeología de la modelización de la función exponencial que representa a un intervalo de crecimiento de un mes de contagiados. I₄: Salida a la Matemática: estudio de la praxeología de la función exponencial para representar un intervalo de crecimiento de contagiados. I_{5, B}: Se encuentra información precisa de la función que representa un intervalo de crecimiento de casos. I₆: Clarifican la representación de un intervalo de crecimiento de contagiados. I₇: Conjeturan y prueban a través de la expresión algebraica de las funciones, el tipo de función obtenida. I₈: “La representación de un intervalo de crecimiento de contagios de COVID-19 es una función exponencial” I₁₀: “El modelo inicial se transforma, con la organización matemática en estudio de la función exponencial”  Gráfico realizado en Geogebra
---	-------------------	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabla 2: ejemplo de análisis de dialécticas

Por ejemplo, en la columna uno (1) se indica a la sesión que pertenece, en este caso segunda sesión (sesión 2); en la segunda columna (2), al episodio, en este caso es

el episodio ocho (E8), que refiere a un encuentro presencial, la tercera columna (3) corresponde a las preguntas del REI, acá se observa que corresponde a la pregunta derivada: *¿Qué función representa un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Argentina? (Q7)*. De la columna cuatro (4) a la dieciséis (16), están representadas las dialécticas, donde se indica su presencia o ausencia, y, la última columna, es la de los indicadores del REI, donde se muestra evidencia de los trabajos de los estudiantes registrados durante la clase presencial o el grupo de WhassApp.

En este ejemplo, cuando los estudiantes trabajan con la pregunta derivada *¿Qué función representa un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Argentina? (Q7)*, la descripción muestra mediante los indicadores que hay una búsqueda de información en internet y libros. Esto evidencia la presencia de la dialéctica de la investigación ($I_{1, B}$). También, ya en ese episodio se advierte el estudio de una función determinada, al tomar un intervalo de crecimiento de casos de COVID-19 en Argentina, lo que permite que aparezca la dialéctica del estudio ($I_{1, A}$). Las decisiones grupales respecto a la modelización obtenida en un intervalo de crecimiento de un mes de contagios de COVID-19 en Geogebra, muestra la presencia de la dialéctica referida al colectivo ($I_{2, B}$). El análisis de la función exponencial para un intervalo de crecimiento igual a un mes de contagiados, pauta la presencia de la dialéctica del análisis de la praxeología (I_3). Por otra parte, salir de la praxeología de la función exponencial para representar un intervalo de crecimiento de contagiados, indica que la dialéctica del tema y fuera del tema (I_4) está presente. Cuando los estudiantes logran encontrar información precisa de la función que representa un intervalo de crecimiento de casos, manifiesta la presencia de la dialéctica de las trufas ($I_{5, B}$) lo que permite también clarificar la representación de un intervalo de crecimiento de contagiados a través de la dialéctica de las cajas negras y blancas (I_6). Esto permite a los alumnos realizar nuevas conjeturas y pruebas del modelo funcional lo que indica la presencia de la dialéctica de la conjetura y prueba (I_7), todo lo expuesto conlleva a que se logre poder escribir lo que han estudiado *“La representación de un intervalo de crecimiento de contagios de COVID-19 es una función exponencial”*, manifestándose la dialéctica de la escritura y lectura (I_8), por último, todo lo que se logra a través de esta respuesta construida, transforma el modelo existente, lo que refleja a la dialéctica del sistema y los modelos (I_{10}).

5. Análisis y resultados

La tabla uno (1), describe cómo emergen y desaparecen las diez dialécticas (D1 a D10) a medida que el Recorrido de Estudio e Investigación avanzó durante el transcurso de los 18 episodios. Las dialécticas se encuentran en la primera columna enumeradas de la primera a la décima con las divisiones indicadas en párrafos anteriores. Los episodios están relatados del uno (1) al dieciocho (18), especificados en la anteúltima fila, mientras que la última fila son las sesiones en que se dividió el REI. De la segunda a la dieciochoava columna, se muestra la emergencia o ausencia de cada una de las dialécticas, pudiéndose así ver para cada episodio cuales se registran o no.

	REI 1: Año 2021- Profesorado de Matemática- tercer año: Matemática Aplicada																
D10																	
D9																	

D8																		
D7																		
D6																		
D5B																		
D5A																		
D4																		
D3																		
D2B																		
D2A																		
D1B																		
D1A																		
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18
	S1							S2				S3				S4		

Tabla 1: Emergencia de las dialécticas a lo largo del REI

Para poder realizar un análisis de las dialécticas, se agrupó los episodios (Episodio 1 al 4, Episodio 5 al 8, Episodio 9 al 14, Episodio 15 al 17, Episodio 18). La selección de agrupar de esta forma los episodios, es porque es donde se producen las transformaciones más relevantes del estudio e investigación en el REI. La activación de las dialécticas, se representa con el color verde, mientras que la ausencia de las mismas, con color blanco. De esta forma, se puede realizar el siguiente análisis:

Episodios 1 al 4: La fase exploratoria (El encuentro con el problema)

En los primeros episodios, los estudiantes se enfrentan a la pregunta generatriz: Q_0 : *¿Cómo se estima la cantidad de infectados por COVID-19?* Al ser una pregunta abierta, amplia y codisciplinar (cómo modelizar una situación de la realidad), esto hace que en los estudiantes se lleve adelante la fase exploratoria, autónoma y comenzar a formular las primeras hipótesis de trabajo, por lo tanto, hay un predominio de las dialécticas referidas a la *Investigación* ($D_{1, B}$), del *individuo* ($D_{2, A}$), de la *conjetura y la prueba* (D_8) y la *del sistema y los modelos* (D_{10}).

Aún no hay un estudio de las organizaciones matemáticas y epidemiológicas, como tampoco se consolida un trabajo en conjunto ni hay técnicas matemáticas precisas que requieran ser justificadas teóricamente. Es por eso que hay escasa presencia de las dialécticas referidas al estudio, al colectivo y al análisis praxeológico.

Episodios 5 al 8: Búsqueda de organizaciones matemáticas y epidemiológicas

La investigación inicial da paso a que los estudiantes se den cuenta de que necesitan buscar información externa o modelos preexistentes (por ejemplo, buscar cómo es la función que permite modelizar la cantidad de contagiados de COVID en un mes). De esta forma, el predominio de las dialécticas se centra en las *dialécticas del Estudio* ($D_{1, A}$), se comienza a compartir las búsquedas entre los pares para definir respuestas, lo que hace que emerja la *dialéctica del colectivo* ($D_{2, B}$), también, se produce la aparición de la *dialéctica de las Cajas negras/claras* (D_6) ya que los alumnos encuentran fórmulas o software (como GeoGebra) que usan sin entender del todo ("cajas negras"). Para avanzar, deben "abrir" esas cajas, lo que inevitablemente hace

se active la *dialéctica del análisis y el estudio* (D_3) para comprender el cómo (técnica) y por qué (tecnología) de esas organizaciones matemáticas y epidemiológicas.

Episodios 9 al 14: Consolidación y formalización del modelo

En esta etapa, el REI inicia el proceso de consolidar organizaciones tanto matemáticas como epidemiológicas, es por eso que el predominio de las dialécticas está en el estudio riguroso de la matemática y epidemiología involucrada, siendo las *dialécticas del estudio* ($D_{1,A}$), la *dialéctica de las trufas* ($D_{5,B}$), que representan esos saberes matemáticos específicos y "duros" (por ejemplo, ecuaciones diferenciales en el modelo SIR, o ajustes de curvas) que el currículum exige que el alumno asimile. Esto hace que el trabajo sea en conjunto, por eso la *dialéctica del colectivo* ($D_{2,B}$), como también, el justificar matemáticamente lo que está haciendo a través de la *dialéctica del análisis y el estudio* (D_3).

Episodios 15 al 18: Institucionalización y respuesta $R^\heartsuit$ a la pregunta generatriz del REI

Representa un momento de altísima complejidad didáctica. Suele coincidir con el punto en que el modelo matemático y epidemiológico se contrasta fuertemente con la realidad.

El objetivo es construir la "Obra" final: la respuesta ($R^\heartsuit$) conjunta a la pregunta generatriz, por tal motivo, ya no es momento de seguir buscando información nueva, es por eso que la presencia de la *dialéctica de la investigación* ($D_{1,B}$) es escasa como tampoco se manifiestan visiones aisladas, lo que hace que la *dialéctica del individuo* ($D_{2,A}$), tenga escasa participación. Toda la clase debe consensuar lo aprendido, es por eso que hay una fuerte presencia de la *dialéctica del colectivo* ($D_{2,B}$), también se debe profundizar las praxeologías tanto matemáticas como epidemiológicas a través de la presencia de la *dialéctica del estudio* ($D_{1,A}$), del *análisis praxeológico* (D_3) y del *tema y fuera del tema* (D_4) para la construcción de la respuesta ($R^\heartsuit$). En este momento del REI, es de gran relevancia cómo redactar y comunicar la respuesta a la pregunta generatriz, de manera formal e institucionalizada, y es a través de la activación de las *dialécticas referidas a la lectura y escritura* (D_8) y de la *difusión y divulgación* (D_9).

6. Conclusiones

La implementación del Recorrido de Estudio e Investigación (REI) codisciplinar en torno al modelo SIR de propagación del COVID-19 demostró ser un dispositivo didáctico poderoso para superar el paradigma tradicional de la "visita de las obras" en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a nivel superior. Al situar a los estudiantes ante una cuestión generatriz auténtica y abierta (¿Cómo se estima la cantidad de infectados por COVID-19?), las ecuaciones diferenciales dejaron de percibirse como un conjunto desarticulado de algoritmos analíticos abstractos para emerger con plena funcionalidad como herramientas de modelización e interpretación de la realidad.

El análisis dialéctico permitió evidenciar que la articulación entre las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Epidemiológicas (OE) dinamiza los procesos cognitivos e institucionales. En particular, la oscilación constante entre la investigación

empírica de datos reales y el estudio formal de las estructuras matemáticas favoreció la validación de conjeturas, la gestión de cajas negras y claras, y la producción de praxeologías complejas. Asimismo, los resultados confirman que, tanto en la formación docente presencial como en la actualización virtual continua, el enfoque basado en el "cuestionamiento del mundo" estimula el compromiso autónomo y colectivo de los futuros profesores, dotando de sentido riguroso y socialmente relevante al cálculo superior.

7. Referencias Bibliográficas

- Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Los caminos de la modelización matemática en la enseñanza universitaria. *Roteiro*, 36(2), 335-358.
- Becker, N. G. (1979). The spread of an epidemic within a household. *Biometrics*, 35(1), 289-299.
- Bejarano, J. (2019). Dificultades en la comprensión y aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias en estudiantes de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22(2), 123-146.
- Blanchard, P. (1995). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *The College Mathematics Journal*, 26(5), 385-393.
- Chevallard, Y. (2004). *L'enquête sur l'étude et le séminaire de didactique des mathématiques*. IREM de Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (2013a). Enseigner les mathématiques en "classe de mathème": transivité et topos praxéologiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(2), 161-192.
- Chevallard, Y. (2013b). Justification et topos praxéologiques dans la théorie anthropologique du didactique. *Actes du Colloque EMF*, 440-450.
- Chevallard, Y. (2013c). *La TAD face au problème de l'étude*. Université d'Aix-Marseille.
- Chevallard, Y. (2017). Readating research in didactics: The Anthropological Theory of the Didactic as a research program. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 159-174.
- Costa, D., Arlego, M., y Otero, M. R. (2013). Modelización matemática y TICs en la enseñanza universitaria de la física: un estudio de caso desde la TAD. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 8(2), 70-85.
- Kermack, W. O., y McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 115(772), 700-721.
- Montesinos-López, O. A., y Hernández-Suarez, C. M. (2007). Modelos determinísticos y estocásticos en epidemiología. *Interciencia*, 32(8), 530-536.
- Moreira, M. A. (2009). *Investigação em educação em ciências: principais abordagens*. Editora UFRGS.
- Parra, V. (2013). *Análisis didáctico de procesos de estudio e investigación en matemática superior* (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Parra, V. (2020). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias en carreras tecnológicas. *Revista de Educación Matemática*, 35(1), 1-18.

Primer autor: Rossi, Laura Noemí

lalis242000@yahoo.com.ar

Profesora de nivel superior en Matemática y Astronomía (I.S.J.V.González, 2006). Licenciada en Educación de la Matemática (UNICEN, 2018).

Actualmente estudiante del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias.

Mención Matemática. Docente e investigadora en el Instituto Superior de Formación Docente San Agustín de la Provincia de Misiones.

Segundo autor: Sureda, Patricia

psureda@niem.exa.unicen.edu.ar

Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Mención Matemática, por la UNICEN. Investigadora adjunta en CONICET. Investigadora en el Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM) e ISISTAN, de la Facultad de Ciencias Exactas (UNICEN). Actualmente Coordinadora de la Unidad de Enseñanza Universitaria Quequén (UNICEN).