UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 75. Diciembre 2025
Páginas 01-16

Mathematics inside a puzzle - semiotic activity from Thought Experiments on area

Matemáticas dentro de un puzzle - actividad semiótica a partir de Experimentos Mentales sobre el área

Matemática dentro de um quebra-cabeça – atividade semiótica a partir de Experimentos Mentais sobre área

Lúcia Cristina Silveira Monteiro y Willian José da Cruz Lukinha

Fecha de recepción: 01-04-2024
Fecha de aceptación: 04-09-2025

Resumen

Este texto se presenta como una propuesta que busca comprender cómo los rompecabezas pueden contribuir al desarrollo de ideas matemáticas significativas, capaces de transformar ejercicios en problemas mediante Experimentos Mentales, en el contexto de la formación de profesores que enseñan matemáticas. Para responder a esta pregunta, nos hemos fijado los siguientes objetivos: i) comprender mejor la perspectiva semiótica en el contexto de la enseñanza de las matemáticas; ii) analizar cómo se pueden percibir los experimentos mentales en la dinámica de construcción de los rompecabezas; iii) esbozar un conjunto de perspectivas teóricas dirigidas directa y/o indirectamente a la temática en cuestión. Concluimos que los diagramas pitagóricos pueden ayudar a comprender y construir el pensamiento matemático cuando se observan desde una perspectiva lúdica, como juegos de rompecabezas, ampliando las posibilidades investigativas y experimentales en las clases de matemáticas.

Palabras clave: Diagramas, Formulación de Problemas, Semiótica de Peirce, Experimentos Mentales, Intuición sobre área.

Abstract

This text is presented as a proposal that seeks to understand how puzzles can contribute to the development of meaningful mathematical ideas, capable of transforming exercises into problems through Thougth Experiments, in the context of training teachers who teach mathematics. To answer this question, we set the following objectives: i) to better understand the semiotic perspective in the context of mathematics teaching; ii) to analyse how Thougth Experiments can be perceived in the dynamics of puzzle construction; iii) to outline a set of theoretical perspectives directly and/or indirectly related to the topic in question. We concluded that Pythagorean diagrams can aid in the understanding and construction of mathematical thinking when viewed from a playful perspective, such as puzzle games, expanding the investigative and experimental possibilities in mathematics classes.

Keywords: Diagrams, Problem Formulation, Peirce Semiotics, Thought Experiments, Intuition about area.

Resumo

Este texto apresenta-se como uma proposta que busca compreender como os quebra-cabeças podem contribuir para o desenvolvimento de ideias matemáticas significativas, capazes de transformar exercícios em problemas por meio de Experimentos Mentais, no contexto da formação de professores que ensinam matemática. Para responder a essa questão, traçamos como objetivo: i) compreender melhor a perspectiva semiótica no contexto do ensino de matemática; ii) analisar como os Experimentos Mentais podem ser percebidos na dinâmica de contrução dos quebra-cabeças; iii) delinear um conjunto de perspectivas teóricas direcionadas direta e/ou indiratamente à temática em questão. Concluimos que os diagramas pitagóricos podem auxiliar na compreensão e na construção do pensamento matemático, quando observados sob uma perspectiva lúdica, como jogos de quebra-cabeça, ampliando as possibilidades investigativas e experimentais em aulas de matemática.

Palavras-chave: Diagramas, Formulação de Problemas, Semiótica de Peirce, Experimentos Mentais, Intuição sobre área.

1. Introdução

O desenvolvimento de competências e habilidades para raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, bem como para elaborar hipótese, formular e resolver problemas, precisa estar presente em todos os níveis do ensino de Matemática. Uma abordagem de caráter formalista e propedêutico não tem alcançado os objetivos esperados em termos de competências e habilidades na educação básica. Desde 1993, Otte alertava para esse fenômeno no ensino, ao afirmar que:

> [...] alguém resolveu um exercício, estudou um problema e alcançou um resultado, mesmo assim, mais tarde, num contexto diferente, por exemplo, num exame, não dispõe de forma alguma desse resultado e do saber nele envolvido, isto é, não reconhece o exercício de modo algum (Otte, 1993, p. 72-73).

A abordagem predominante no ensino é tratar a Matemática como um jogo de regras e fórmulas prontas e, nessas situações, o processo cognitivo se restringe à memorização, sem a preocupação com a construção de significados que ultrapassem as estruturas operatórias.

Mesmo com a predominância das estruturas operatórias, pesquisas sobre o aproveitamento dos alunos da educação básica indicam que a maioria não atinge os objetivos mínimos. Sobre a igualdade numérica, por exemplo, Van de Walle aponta que:

> O sinal de igualdade é um dos símbolos mais importantes na aritmética elementar, na álgebra e em toda matemática ao usar números e operações.

> Ao mesmo tempo, pesquisas desde 1975 até o presente indicam claramente que o “=” é um símbolo muito mal compreendido. (2009, p. 288).

Exemplificando com uma questão dessa pesquisa, em que Van de Walle apresenta o seguinte problema: “[...] na expressão seguinte, que número você pensa que pode ser colocado na caixa? 8 +4 = $\square$ + 5” (2009, p. 288), observa-se que não mais do que 10% de alunos, de qualquer série, colocaram o número correto. Uma quantidade expressiva de professores de matemática, ao tomar conhecimento desses resultados, pode, de antemão, concluir que os alunos não sabem somar. No entanto, ao se analisar com atenção, a mesma pesquisa revela que as respostas mais comuns dadas por esses alunos foram 12 e 17. (Van de Walle, 2009). Mesmo com pouco conhecimento matemático, é possível perceber que 12 e 17 correspondem, respectivamente, à soma de 8 e 4 e à soma de 8, 4 e 5. Portanto, fica evidente que os alunos *sabem somar*, mas não compreendem a igualdade expressa pelos símbolos da aritmética básica.

O resultado da pesquisa de Van de Walle alerta para a necessidade de desenvolver novas abordagens que explorarem diferentes formas de representar quantidades numéricas. As decomposições numéricas, que expressam uma igualdade com a quantidade em questão, constituem a essência dos estudos aritméticos, sendo as igualdades fundamentais para a compreensão da Matemática. Tais questões demandam aprofundamento a fim de subsidiar intervenções didáticas.

Daí surge nossa questão de pesquisa: como os quebra-cabeças podem ajudar a desenvolver ideias Matemática significativas, capazes de transformar exercícios em problemas, por meio de Experimentos Mentais, na formação de professores que ensinam matemática?

Para responder à nossa questão de pesquisa, estabelecemos os seguintes objetivos: i) Compreender melhor a perspectiva semiótica no contexto do ensino de matemática; ii) Analisar como os Experimentos Mentais podem ser percebidos na dinâmica de contrução dos quebra-cabeças; iii) Traçar um conjunto de perspectivas teóricas direcionadas direta ou indiratamente à temática em questão.

Uma questão primordial para a Didática da Matemática é a clara distinção entre problemas e exercícios. Sob uma perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial no fazer Matemática, além de permitir ter contato com ideias matemáticas significativas. Já, na visão tradicional do ensino dessa ciência, somos levados a acreditar que os problemas da Matemática são meramente os exercícios prontos que encontramos nos livros didáticos, apresentados como um conjunto de regras e respostas únicas.

Segundo Brown e Walter (2009) devemos questionar a origem dos exercícios presentes nos livros didáticos. Esses autores sugerem que se exerça um controle crítico, tratando os exercícios dos livros didáticos como problemas. Ou seja, os Educadores Matemáticos precisam desenvolver competências e habilidades para a formulação de problemas.

Polya (2003), em sua obra intitulada “*Como resolver problemas*”, já destaca que a atividade de resolução de problemas se torna empobrecida se não é articulada com a *formulação* de problemas.

Os problemas podem ser abertos ou fechados. Os problemas abertos podem ser interpretados como investigações, apresentando mais de um caminho para chegar à solução e mais de uma resposta correta. São necessárias explorações para, assim, descobrir regularidades e formular conjecturas. (Ponte, 2005; Smith; Stein, 2011).

Os problemas abertos proporcionam recursos a diferentes representações e incentivam a comunicação. Além disso, fomentam o raciocínio e a justificação, permitindo estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos, bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (Boavida; Paiva; Cebola; Vale; Pimentel, 2008).

Ponte (2005) e Smith e Stein (2011) contribuem com essa dinâmica ao diferenciar exercícios e problemas, classificando diferentes tipos de tarefas. Para Ponte (2005), há quatro tipos essenciais de tarefas: (1) exercícios fechados com desafios reduzidos; (2) problemas fechados com desafios elevados; (3) explorações abertas com desafio reduzido; (4) investigações abertas com desafios elevados. Para Smith e Stein (2011) há quatro tipos essenciais de tarefas: 1 - exercícios de memorização que envolve reprodução; 2 - procedimentos sem conexões que são algoritmos sem ligação com nada conhecido; 3 - problemas com procedimentos com conexões, mantendo atenção aos níveis de compreensão de ideias e conceitos matemáticos dos estudantes; 4 - o fazer Matemática, que demanda pensamento complexo e não algorítmico, exigindo que os estudantes explorem e compreendam a natureza, os processos ou as relações próprias da Matemática.

Segundo Brown e Walter (2009), para se ter o controle do processo didático, é necessário reconstruir a tarefa, inserindo o novo problema no próprio processo de resolução e questionando constantemente a interpretação do problema. A mesma referência destaca ainda que uma excelente estratégia para despertar ideias é o uso de raciocínios indutivos.

Brown e Walter (2009) propõe abordagens aos conceitos de formas implícitas de maneira lúdica e, posteriormente, ou concomitantemente, exige-se um envolvimento conceitual que provoque reflexões sobre o significado.

Monteiro (2013) faz referência à importância da interpretação da interpretação da interpretação, *ad infinitum,* de conhecidos problemas encontrados no desenvolvimento da Matemática, para propor uma abordagem semiótica da Matemática na circularidade das interpretações.

Os problemas abertos, com significados para o aluno, são situações que também podem favorecer o desenvolvimento do raciocínio matemático abdutivo, indutivo e dedutivo. Problemas abertos que podem ser explorados por meio de questões indutivas constituem caminhos promissores para a atividade semiótica. Nesse trabalho, buscaremos explorar problemas abertos representados em processos de transformação de quebra-cabeças reconhecíveis pelos estudantes e que podem ser compreendidos como diagramas para a Matemática, mediados pela atuação do Educador Matemático.

Desde Polya (1954) e, mais recentemente, Brown e Walter (2009), destaca-se que a resolução de problemas sem a formulação de problemas constitui uma abordagem empobrecida na Didática da Matemática. Brown e Walter (2009) argumentam que a arte de propor problemas é uma competência necessária a ser desenvolvida nas aulas de Matemática.

Sendo assim, para formular problemas, a partir de intuições sobre área, utilizando o conceito de equivalência em uma proposta de intervenção, este texto se propõe a apresentar superfícies geométricas subdivididas em outras superfícies, que podem ser reconhecidas como quebra-cabeças. Esses quebra-cabeças correspondem a peças de quebra-cabeças ou diagramas que contêm relações pitagóricas e que, por sua vez, podem receber um tratamento indutivo na proposição de problemas. Parte das atividades apresentadas foi desenvolvida no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, no ano de 2021.

2. O raciocínio Diagramático e os Experimentos Mentais na construção de quebra-cabeças para o ensino de Matemática

No contexto deste artigo, os quebra-cabeças são identificados como diagramas que auxiliam na construção e/ou demonstração de determinados conceitos Matemáticos.

Para Peirce (2010), diagrama é a construção de uma representação, a experimentação dessa construção e a observação dos resultados. No entanto, o mais importante para esse teórico da semiótica é que esses passos estejam englobados por um sistema de representação. Assim, interpretamos que diagrama é predominantemente um ícone de relações, devendo ser realizado em um sistema perfeitamente consistente de representações, fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível (Peirce, 2010).

Mueller (1969) descreve a importância dos diagramas nas demonstrações em Matemática para a apresentação da verdade do fato. No entanto, o mesmo autor esclarece que, na atualidade (pensamento de sua época), para alguns matemáticos, os diagramas não são essenciais. Ainda assim, esses matemáticos admitem que os diagramas podem ser considerados o objeto da prova. O que se observa, na verdade, é que os diagramas desempenham um papel importante nos argumentos matemáticos desde Euclides. Esses casos são vistos por Mueller (1969) como um indicativo do caráter experimental da Matemática desde a Geometria Euclidiana. Esse caráter experimental, neste trabalho, será interpretado como atividade semiótica. Brown (1997) destaca a importância dos diagramas para o desenvolvimento da Matemática e afirma que eles são considerados por alguns matemáticos, como recursos psicologicamente importantes e heuristicamente úteis, e acrescenta que:

> Para os matemáticos, desenhos, diagramas e ilustrações, podem se tornar prova desde que, venham com informações úteis e recursos matemáticos verídicos, pois toda prova vem formada por argumentos lógicos. Um diagrama é uma representação visual estruturada e simplificada de um determinado conceito... e etc. Foram criados no intuito de facilitar as relações... (Brown, 1997, p.120).

Alguns diagramas também ficaram conhecidos, na história da Matemática, como experimentos mentais, ou provas que explicam (Brown, 1997; Cruz, 2018). Por isso, neste trabalho, propomos *processos em diagramas* (Monteiro, 2021), a fim de criar um ambiente propício a potencializar a interpretação de ideias matemáticas por meio da complementaridade entre a Geometria e a Aritmética e, portanto, entre intuições e conceitos. Muitos desses diagramas aparecem em obras de Nelsen (1993) e são designados por *provas sem palavras*[1] (tradução livre).

[1] Nelsen, R. Proofs without word. Exercises in visual thinking. Number 1, 1993.

Cruz (2018) argumenta que os experimentos sensíveis fornecem informações novas e inesperadas. Os Experimentos Mentais, ao contrário, só podem se basear em informações já disponíveis. A similaridade entre os dois tipos de experimentos reside no fato de que, em certas ocasiões, os Experimentos Mentais nos facultam o acesso a informações que estão à nossa disposição, mas que não nos parece acessíveis. A experimentação mental, ainda que não apresente novos dados, é mais próxima da experimentação efetiva (sensível) do que poderíamos supor. Nota-se que a utilização de quebra-cabeças pode dar a impressão de um processo de experimentação sensível, mas a associação com conceitos matemáticos, em especial conceitos geométricos, os traduz como representações desses objetos, sendo, portanto, tais experimentos característicos dos Experimentos Mentais.

É importante para a Didática da Matemática perceber que os resultados dos experimentos mentais podem nos permitir utilizar, como parte integrante de nosso conhecimento, aquilo que antes nos era inacessível; é nesse sentido que eles transformam nosso entendimento de mundo.

Para alcançar esses objetivos, o Experimento Mental deve nos permitir utilizar nossos conceitos da mesma forma como foram usados anteriormente; ou seja, não podemos violar o seu uso habitual. A situação apresentada no Experimento Mental já deve ter se manifestado de alguma forma para nós, independentemente de quão obscura tenha sido sua percepção: “se não tiver tido essa experiência não estamos prontos para aprender com o Experimento Mental” (Kuhn, 2011, p. 282).

Kuhn (2011) afirma que as situações experimentais não devem ser arbitrárias, e a perspectiva desse autor nos estudos sobre Experimentos Mentais indica três questões a serem consideradas: 1) A quais condições de verossimilhança a situação imaginada no experimento deve estar sujeita, já que não pode ser arbitrária? 2) Em que sentido a situação apresentada precisa corresponder ao “como” a natureza apresentaria a situação? 3) De que maneira um Experimento Mental pode conduzir a novos conhecimentos ou a uma nova compreensão?

Cruz (2018) destaca a importância dos Experimentos Mentais como caminhos para o desenvolvimento de analogias e/ou para a identificação de contradições em provas matemáticas formais. O mesmo autor conceitua os “Experimentos Mentais como formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos, por meio de um determinado contexto, como objeto de consideração” (Cruz, 2018, p. 74), representados por meio de diagramas.

Por mais de 2000 anos, o livro *Elementos de Euclides*, foi considerado um paradigma do raciocínio matemático rigoroso. No final do século XIX, quando foram estabelecidos os métodos axiomáticos modernos, *Os Elementos* perdeu sua proeminência nesse aspecto, e as provas de Euclides passaram a ser consideradas Experimentos Mentais (Cruz, 2018).

O destaque ao conceito de área como base para a construção da Matemática surge antes de Euclides e chega aos dias atuais por meio da abordagem analítica do cálculo diferencial e integral, uma vez que a integral relativa a uma curva é interpretada como a área da superfície delimitada por essa curva. O que se observa são as diferentes interpretações em torno do conceito de área ao longo do desenvolvimento da atividade matemática, bem como a evolução dos processos matematicizados utilizados para representar igualdades entre áreas.

Parece jocoso que, diante de tantos esforços na atividade simbólica da Matemática, a maioria dos alunos, ao término do 9º ano da educação básica, não consiga dissertar sobre áreas. Esses alunos apresentam dificuldades na compreensão das unidades de áreas como quantidades bidimensionais, e pode-se até evidenciar a confusão que fazem entre a fórmula da área e a fórmula do perímetro de algum polígono.

Dessa forma, buscaremos contribuir para a proposta de uma abordagem semiótica para a Didática da Matemática por uma metodologia baseada na complementaridade de intuição e conceito. Kant afirma que:

> [...] a intuição e os conceitos, portanto, constituem os elementos de todo nosso conhecimento, de tal modo que nem os conceitos sem uma intuição correspondem de algum modo a eles, nem uma intuição sem conceitos pode fornecer um conhecimento (Kant, 2013, B74).

A complementaridade entre geometria e aritmética, na Didática da Matemática proposta por Otte (1990), constitui a melhor interpretação da complementaridade de intuição e conceito, conforme proposta por Kant. Se tomamos como referência a evolução da própria Matemática, percebemos que essa ciência avança pela complementaridade de intuição e conceito desde a obra de Euclides, a qual se fundamenta em Experimentos Mentais, ou seja, de um lado, intuições e premissas, do outro, conceitos e construções.

No entanto, há quem tente ignorar essa realidade sobre o desenvolvimento da Matemática, o que obviamente, constitui uma crença que contribui para a formação de imensas lacunas em Didática da Matemática capaz de promover acesso aos raciocínios inerentes à disciplina e às considerações relevantes sobre as distintas interpretações dos objetos de estudo dessa ciência. Os Experimentos Mentais, desenvolvidos por meio de quebra-cabeças (diagramas pitagóricos), tendem a reduzir essas lacunas e a proporcionar uma aprendizagem mais significativa.

3. Metodologia da complementaridade de sentidos e significados na formulação de problemas-processos e a interpretação da interpretação

Olhar um tópico padrão sob uma nova perspectiva e buscar uma compreensão mais aprofundada do problema encoraja a criação de novas ideias derivadas desse mesmo tópico. Para conhecer algo, é necessário comprometimento com uma ação: uma atividade semiótica sobre a coisa que se quer conhecer, e até mesmo modificar, além de combinar outras ideias com aquilo que se pretende entender.

A proposta consiste na utilização de quebra-cabeças como suporte para as atividades semióticas apresentadas neste texto, desenvolvidas por meio de Experimentos Mentais. Este texto, em forma de esboço, configura-se como uma elaboração teórica sobre a temática em questão. Os materiais sugeridos podem ser produzidos com o uso de EVA e do suporte oferecido pelo software de geometria dinâmica Geogebra. Para ilustrar, foram apresentadas, em 2021, três questões a graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, juntamente com uma possível atividade representada na figura 5, acompanhada de duas respostas desses estudantes.

As duas respostas destacadas são consideradas pistas semióticas, ou seja, signos emitidos na relação com os quebra-cabeças em associação aos conceitos matemáticos apresentados, bem como em sua construção e experimentação. A análise dessas pistas constitui novos signos, isto é, significados produzidos por meio da ação interpretativa dos pesquisadores.

Na atualidade, despontam possibilidades para a investigação de tarefas da Matemática sob a perspectiva dos softwares de Geometria Dinâmica, com o objetivo de favorecer a compreensão dos conceitos e a constituição de processos. Nesse sentido, o estudo por tarefas a partir da experimentação com diagramas, presentes na formação do pensamento matemático, mostra-se frutífero.

Proporcionar ao aluno a visualização de um diagrama padrão sob uma nova perspectiva pode fornecer uma compreensão mais profunda do problema (Brown; Walter, 2009). Por outro lado, essa forma de proceder também pode estimular a criação de novas ideias a partir de diferentes tarefas apresentadas sobre o tópico em questão. Essa abordagem na Didática da Matemática também possibilita vivenciar a Matemática em relação a outros campos do conhecimento, promovendo debates e construções.

Brown e Walter (2009) destacam que, para conhecer “algo”, é necessário assumir um ponto de vista que exija alguma operação sobre o “algo” a ser conhecido e, se essa operação contribui para modificá-lo, isso pode constituir um começo adequado.

Monteiro (2021), ao considerar a importância da mudança de perspectiva sobre problemas conhecidos da Matemática, propõe a necessidade da provocação de semiose na formação inicial e continuada de professores de Matemática, ou seja, apresentar semiose para provocar semiose. Essa estratégia também favorece a transformação de um problema fechado, com resposta única, em um problema aberto, que admite diferentes soluções.

Os desafios devem ser encarados como propulsores para uma maior imersão no problema, favorecendo a busca de relações, combinação de ideias e o aprofundamento dos sentidos e significados dos conceitos e noções intrínsecos ao problema investigado em seu processo histórico-filosófico (Monteiro, 2021). Assim, é possível afirmar que o desenvolvimento de Experimentos Mentais com quebra-cabeças, por meio da atividade semiótica associada ao pensamento indutivo, mantém uma relação intrínseca com o alcance das dimensões da criatividade, isto é, apresentar atividade semiótica para provocar atividade semiótica.

Como sugestão de processos, propomos a criação de um passo a passo para o trabalho com quebra-cabeças, iniciando pelo diagrama mais simples que expresse a ideia e o conceito de área. Desde os primeiros níveis de escolaridade, é possível vivenciar dimensões da criatividade. Por exemplo, a subdivisão de uma superfície quadrada por meio de suas diagonais[2] é uma atividade que possibilita a formulação de muitos problemas, os quais podem ser explorados lde forma lúdica quando interpretados como quebra-cabeças, conforme ilustrado na Figura 1.

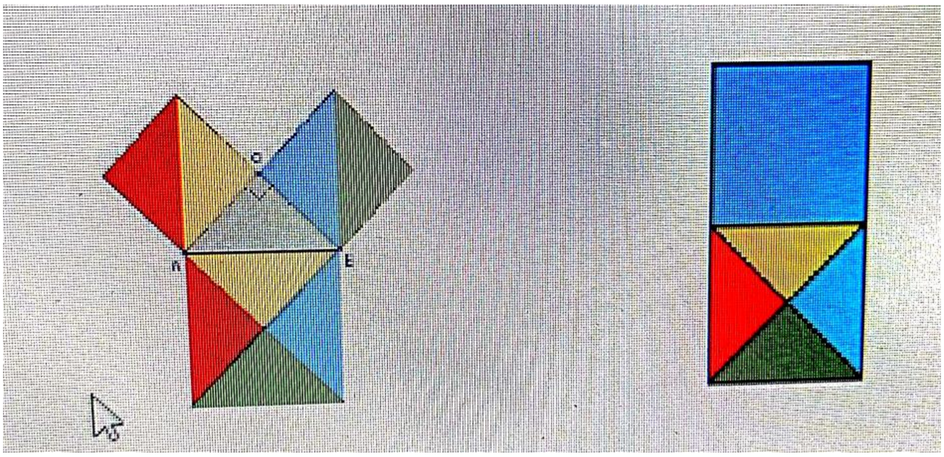


Figura 1. Quebra-cabeças, Ramirez (2009).

Em seguida, o aluno pode ser conduzido à compreensão da construção de uma infinidade de peças. Partindo da ideia da Figura 1, a subdivisão de área de uma superfície quadrada pelas diagonais, é possível dar continuidade ao processo de divisão, por exemplo, a partir dos pontos médios dos lados do quadrado. Depois, novamente pelas diagonais das novas superfícies quadradas que surgirem, e assim sucessivamente.

Figura 2. Provas que explicam[3]

O objetivo desses quebra-cabeças é levar os alunos a perceber que, por mais subdivisões que ocorram, a soma das áreas das peças do quebra-cabeça será equivalente à área da superfície quadrada inicialmente considerada. Dessa forma, é possível estimular a percepção do quebra-cabeça geométrico como um diagrama. Por outro lado, observa-se que os diagramas também podem ser interpretados como quebra-cabeças e utilizados em demonstrações que se *explicam* durante os processos didáticos para o ensino de Matemática, como exemplificado na Figura 2.

[2] Em Ramirez (2009) ooutros critérios de subdivisões para a superfície quadrada podem e devem ser explorados, como por exemplo, a divisão pelos pontos médios, ou a terça parte, ou a quarta parte etc., dos lados ou das diagonais.

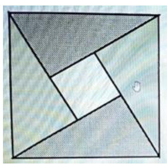
[3] Apresentação de alunos da Universidade Federal de Alagoas, Licenciatura em Pedagogia.

Figura 3. diagrama pitagórico construído (Souza, 2017)

À medida que produzimos novas peças, podemos buscar combinações com outras peças conhecidas e explorá-las. Por exemplo, as peças do quebra-cabeça da Figura 3 podem ser interpretadas como uma composição de triângulos semelhantes aos encontrados na Figura 2. O Experimento Mental sobre a conservação da área do quadrado deve ser estimulado nesse momento, para, em seguida, ser conduzido para verificações, podendo alcançar representações numéricas e algébricas. Ao final, é desejável que se perceba que, mesmo após muitas subdivisões das peças, é possível elaborar hipóteses sobre a soma das novas áreas e compará-la a área do quadrado ou à fração de área de um quadrado, dependendo da perspectiva adotada.

Percebemos que interpretar diagramas conhecidos como quebra-cabeças, explorando processos de replicação de suas peças, possibilita investigar outras igualdades que podem surgir. Por exemplo, o diagrama abaixo, apresentado por Nelsen (1993), pode ser transformado: ao completar o quadrado da Figura 4b utilizando *peças* que são triângulos retângulos congruentes aos triângulos do diagrama da Figura 4a, obtemos, assim, o diagrama da Figura 5. Esse é o início de uma nova investigação voltada à elaboração de hipóteses sobre áreas.

4a4a



4b4b

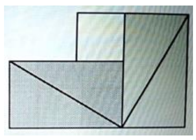


Figura 4. Diagramas pitagóricos transformados em peças de quebra-cabeça (Nelsen, 1993, p. 4)

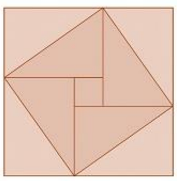


Figura 5. Uma nova investigação.

Ao construir uma nova igualdade a partir da área do quadrado maior da Figura 5, podemos identificar um produto notável relacionado à igualdade pitagórica inicial e, consequentemente, uma circularidade no conhecimento. Dessa forma, percebe-se que explorar transformação por meio de quebra-cabeças geométricos (Monteiro, 2021) contribui para o estudo de conceitos matemáticos, considerando a Matemática como atividade semiótica. Essas combinações podem estimular a criatividade e a elaboração de novas igualdades a partir da intuição sobre área e conservação da área. Com o auxílio de um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, outras hipóteses podem surgir a partir da observação dos dados numéricos na janela da álgebra, referentes à construção de cada polígono. Além disso, por meio da elaboração de hipóteses sobre igualdades, é possível indicar possibilidades de relações entre áreas.

Em se tratando de uma situação-problema que abarca as dimensões da criatividade, por se apresentar de forma mais fluente, flexível e original, é possível continuar elaborando novos problemas com o diagrama da Figura 5.

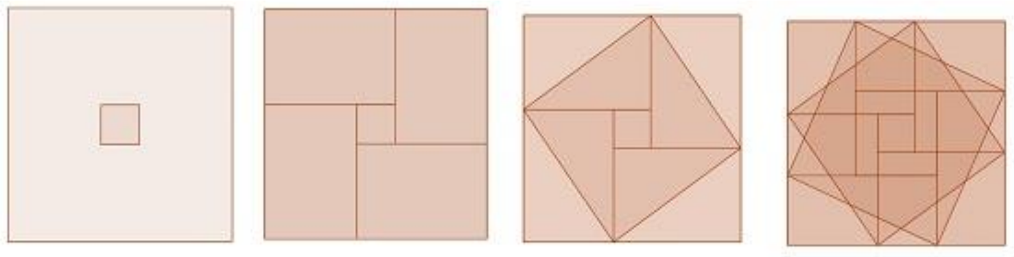


Figura 6. Provocando atividade semiótica[4]

Por exemplo, foram solicitados aos professores em formação inicial, estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, que, com base no diagrama da Figura 5, respondessem às seguintes questões: 1) Qual é a próxima figura na sequência dos diagramas, conforme pode ser observada na Figura 6? 2) Existe relação entre esses diagramas? 3)Elabore igualdades percebidas no processo.

Duas categorias de respostas foram identificadas neste ensaio. Elas estão representadas pelo diagrama A e pelo diagrama B na Figura 7.

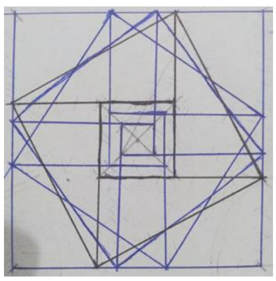


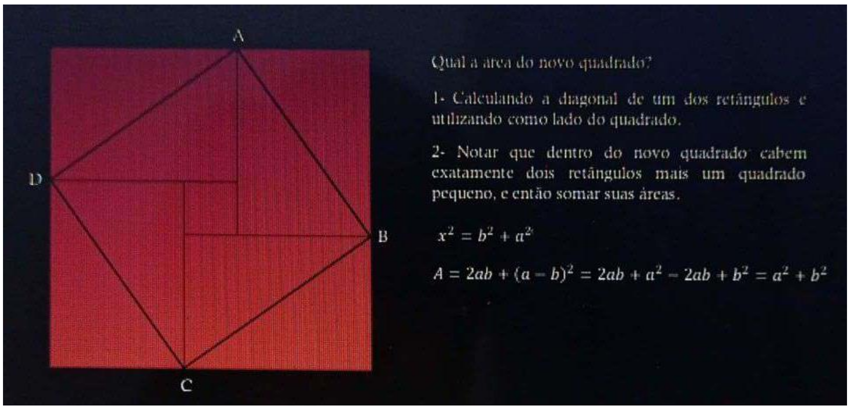
Figura 7. A representação da reposta “A”.[5]

Essa elaboração parte da hipótese do processo apresentado e tem como referência os pontos simétricos pertencentes às diagonais do maior quadrado dado.

[4] atividade semiótica para provocar atividade semiótica – durante formação de professores de matemática da Licenciatura em Matemática, Ufal, março de 2021.
[5] SILVA, A.C. Portfólio de A.C. Silva, com notas de aula, apresentado em maio de 2021.

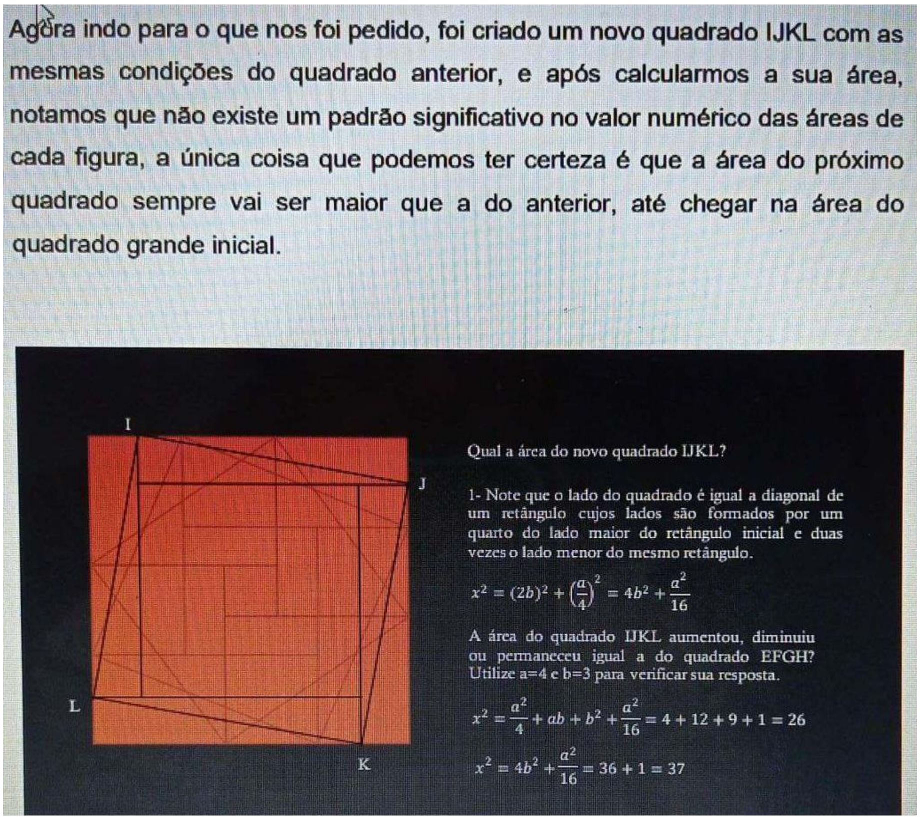
Esses pontos simétricos tornam-se os vértices de um novo quadrado, localizado ao centro (olhar Figura 7).

Em outra elaboração, a representada pela resposta B (Figura 8), o processo apresentado foi deixado de lado, adotando-se como novo ponto de partida a referência ao conceito da metade[6] entre os vértices dos quadrados maiores, percebida a partir da terceiro diagrama (Figura 6). Observa-se que, para a análise da questão, são atribuídos valores numéricos que podem contribuir para a formulação de hipóteses, bem como para a verificação e explicação do diagrama A em relação às novas igualdades a serem construídas, como mostrado na Figura 8.



De maneira similar, também foi pedida a área do quadrado formado pela próxima figura, onde para isso, definimos que os vértices do quadrado EFGH haviam sido colocados no ponto médio entre os vértices do quadrado ABCD e os do quadrado grande inicial.

[6] No caso, o conceito de ponto médio entre os vértices dos diagramas precedentes foi considerado como hipótese. A aluna faz uma inferência não comprovada sobre o ponto médio do diagrama 4, constrói mas, não verifica.



Agora indo para o que nos foi pedido, foi criado um novo quadrado IJKL com as mesmas condições do quadrado anterior, e após calcularmos a sua área, notamos que não existe um padrão significativo no valor numérico das áreas de cada figura, a única coisa que podemos ter certeza é que a área do próximo quadrado sempre vai ser maior que a do anterior, até chegar na área do quadrado grande inicial.

I J L K

Qual a área do novo quadrado IJKL?

1- Note que o lado do quadrado é igual a diagonal de um retângulo cujos lados são formados por um quarto do lado maior do retângulo inicial e duas vezes o lado menor do mesmo retângulo.

$$x^2 = (2b)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4b^2 + \frac{a^2}{16}$$

A área do quadrado IJKL aumentou, diminuiu ou permaneceu igual a do quadrado EFGH? Utilize a=4 e b=3 para verificar sua resposta.

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + ab + b^2 + \frac{a^2}{16} = 4 + 12 + 9 + 1 = 26$$

$$x^2 = 4b^2 + \frac{a^2}{16} = 36 + 1 = 37$$

Figura 8. Exemplificando a resposta “B”. [7]

Percebemos que ambas as respostas podem continuar sendo exploradas, pois são fluentes, flexíveis e originais, além de possibilitar outras elaborações. Podemos optar por continuar combinando quebra-cabeças e, também, explorar questões de caráter mais analítico. As hipóteses formuladas devem ser verificadas de forma mais rigorosa, utilizando diferentes ferramentas, digitais e não digitais, permitindo assim o surgimento de uma explicação mais completa, ou seja, uma prova explicativa com argumentação dedutiva.

Diante desses resultados, percebe-se que tarefas do tipo *processos em diagramas*, passíveis de serem tratadas como problemas abertos, possuem grande potencial para investigações e atividades semióticas em aulas de Matemática. Elas permitem a utilização de noções intuitivas sobre área e a construção de novas igualdades, constituindo uma complementaridade de intuição e conceito.

4. Considerações e possibilidades

Peirce classifica a Matemática como uma ciência heurística, isto é, uma ciência de descobertas, e afirma que a ciência é processo, o fruto essencial de uma busca concreta “[...] em perpétuo e persistente crescimento, e afirma que a partir da indução, dedução e da abdução, é possível chegar à crença” (Souza, 2014, p.47).

---

[7] Retirados do portfólio do estudante Lima, S. I. P., março 2021, da licenciatura em matemática da Universidade Federal de Alagoas

Para Santaella, “o método científico, que nasce da inter-relação da abdução, dedução e indução, advém de uma lógica universal que habita o coração das metodologias” (2001, p.127). Portanto, mostra-se apropriado para a Didática da Matemática. A definição de Matemática e a descrição do método científico apresentados por Peirce contrariam a ideia da Matemática como um conhecimento de respostas prontas e acabadas, reduzida a um jogo de regras e respostas únicas.

Pimentel e Vale (2013) afirmam que os três tipos de raciocínio, abdutivo, indutivo e dedutivo, podem ser explorados em processos didáticos, acrescentando que o raciocínio indutivo parte de um caso particular para o geral, formulando hipóteses, enquanto o raciocínio dedutivo permite verificar a validade da generalização do caso particular. As autoras também concordam que a hipótese, ou raciocínio abdutivo, corresponde ao momento do insight, ou seja, ao momento da criação.

Portanto, atividades semióticas baseadas na combinação e transformação de diagramas ou quebra-cabeças apontam possibilidades para o desenvolvimento do método científico de Peirce aplicado a diferentes formas de raciocínio na Didática da Matemática básica. Contudo, concluímos ressaltando a necessidade de orientar estudantes, em todos os níveis de ensino, a perceber a Matemática como uma atividade semiótica, voltada ao desenvolvimento do raciocínio e do espírito investigativo, destacando, assim, a importância dos processos de descoberta intrínsecos à própria Matemática.

Diagramas pitagóricos podem contribuir para a compreensão e a construção do pensamento Matemático quando observados sob uma perspectiva lúdica, como um jogo de quebra-cabeça, ampliando as possibilidades investigativas e experimentais nas aulas de matemática. É necessário atentar para a importância de explorar problemas orientados para a recíproca da igualdade[8] pitagórica numérica até chegar a uma representação diagramática dessa igualdade. Essas questões relativas à recíproca estão no rol de possibilidades e merecem destaque, pois não parece óbvio para muitos estudantes de Matemática, afirmar a recíproca do Teorema de Pitágoras. Assim, não concebem imediatamente um triângulo retângulo associado a uma equação com trios pitagóricos. Como hipótese, um possível motivo para essa dificuldade pode estar na abordagem tradicional da igualdade pitagórica, que frequentemente é apresentada sem diagramas e sem atribuições de significados sobre áreas, sendo reduzida apenas à ideia de “quadrado” como expoente de um número.

Elaborar tarefas que possibilitem a utilização de tecnologias digitais e não digitais para investigação, como, por exemplo, lápis, papel e softwares de geometria dinâmica, pode conduzir a verificações e explicações por meio de atividades semióticas. Além disso, a complementaridade entre tecnologias digitais e não digitais pode favorecer interpretações que conduzam à construção de novas igualdades e a provas explicativas com o uso de artefatos científico-tecnológico em nossa contemporaneidade.

[8] ou seja, ao nos depararmos com um trio pitagórico qualquer, sua representação geométrica será um triângulo retângulo,

Em suma, as tecnologias digitais são ferramentas para ampliar as possibilidades de atividade semiótica. Além disso, explicitam a Matemática como uma ciência construída, pois valorizam a produção de significados de professores e alunos e contribuem para a evolução da Didática da Matemática por meio da complementaridade entre Experimentos Mentais e teorias.

5. Referências bibliográficas

Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa:me-dgidc.

Brown, J. R. (1997). *Poofs and pictures*. The british journal for the philosophy of science: vol. 48. N° 2, pp.161 – 180.

Brown, S.; Walter, M. (2009) *The art of problem posing*. Mahwah, nj: erlbaum. Digital printing.

Cruz, W. J. (2018). *Experimentos mentais e provas formais*. Curitiba: appris.

Kant, I. (2013*).* *Crítica da Razão Pura*. 3ª ed. Trad. Mattos, F. C. Bragança Paulista: Editora Universitária São Franscisco.

Kuhn, T. S. (2011). *A tensão essencial*. São Paulo: Editora Unesp, p. 257 – 282.

Monteiro, L.C.S. (2013). Paradoxo de Zenão: perspectivas para Educação Matemática na interpretação da variação do problema. In: *anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática* – Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho - issn 2178-034x)

Monteiro, L.C.S. (2021). *Complementaridade na circularidade das representações: uma abordagem semiótica para a criatividade em Matemática*. São Paulo: editora científica, cap. 44.

Monteiro, L.C.S. (2021). *semiótica na didática da Matemática: a interpretação da interpretação da interpretação...* Curitiba: appris.

Mueller, I. (1969). Euclid’s elements and the axiomatic method, *brit. F. Phil*. Sci. 20.

Nelsen, R. B*. (1993).* Proofs without words. *The mathematical association of America.*

Otte, M. (1990). Arithmetics and Geometry: Some remarks on the concept of complementarity. *Studies in Philosophy and Education, 10, 37-62.*

Otte, M. (1993). *O formal, o social, o subjetivo: uma introdução à filosofia e à Didática da Matemática*. Tra. Raul, F. N. São Paulo: Editora da Unesp.

Peirce, C. S*. (2010). Semiótica*. 4ª ed. – São Paulo: Perspectiva.

Pimentel, T.; Vale, I. (2013). *Raciocinar em geometria*: o papel das tarefas, em a. Domingos, I. Vale, M.J. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa e R.A. Ferreira. (eds), *investigação em Educação Matemática – raciocinio matemático*, (pp.129-145). Lisboa: Spiem.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning,* vol.2: patterns of plausible inference. New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (2003) *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. Em gti /ed.), *o professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa APM.

Ramirez, J. B. (2009). *Um acercamiento didactico al tratamento del teorema de Pitágoras em la ecuela*. Santa Fe, Argentina: El Cid Editor,.

Santaella, L. (2001). Comunicação e pesquisa: projetos para mestrado e doutorado. São Paulo: Hacker Editores.

Smith, M.; Stein, M. (2011). *Practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sousa, J. S. (2014). A abdução em Peirce: um estudo hermenêutico. In: *Dissertação do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática-* Rio Claro: Universidade Estadual Paulista.

Souza, E. (2017). Trabalho de conclusão de Curso. In: *Licenciatura em Matemática* Alagoas: UFA.

Van de Walle, John A. (2009). *Matemática no ensino fundamental [recurso eletrônico] : formação de professores em sala de aula*; trad. Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Artmed.