UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Junio de 2005, Número 2, páginas 91 - 110
ISSN: 1815-0640

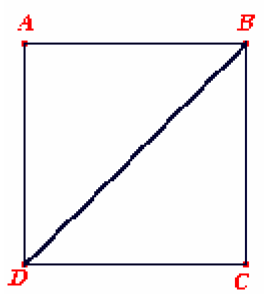
As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método de exaustão»

Vincenzo Bongiovanni

PUC-SP

Introdução

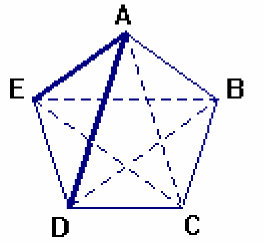
Para os pitagóricos, todas as grandezas (comprimento, área, volume,...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. Admitiam que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, segmentos quaisquer de reta. Dados dois segmentos, supunham que existia sempre um segmento que "cabia" um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Nesse caso, os segmentos eram comensuráveis. Em notação moderna, dizer que os dois segmentos AB e CD são comensuráveis significa dizer que existe um segmento u e dois naturais m e n tais que AB=nu e CD=mu. Num dado momento da história, descobriu-se a existência de grandezas incomensuráveis. Essa descoberta marcou profundamente o desenvolvimento da matemática grega. Vitruvius (século I a.C), na sua obra *Dez livros de arquitetura*, o mais antigo texto sobre a história da matemática que chegou até os nossos tempos em sua versão original, atribui a Pitágoras e a seus discípulos a descoberta de grandezas incomensuráveis. Mais tarde Proclus (420-485 D.C) no prólogo do livro *Os comentários sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides* atribui também tal descoberta à escola pitagórica. Esse fato destruiu a crença de que o universo era governado por números inteiros. Alguns historiadores associam o aparecimento de grandezas incomensuráveis com a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em que a hipotenusa é a diagonal de um quadrado e os catetos são os lados do quadrado.



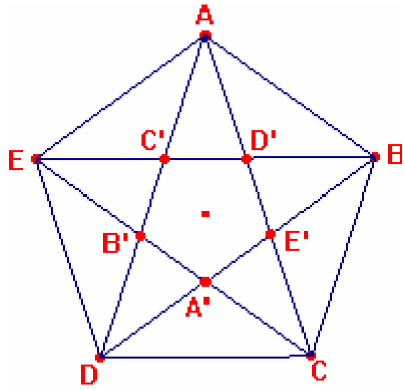
Aristóteles refere-se a uma demonstração onde se supõe que a diagonal e o lado do quadrado são comensuráveis para se chegar num absurdo com a conclusão que um mesmo inteiro é par e ímpar. A idéia do raciocínio por absurdo que segue foi provavelmente concebido no meio da escola pitagórica.

> *Vamos supor que o lado AB e a diagonal DB sejam segmentos comensuráveis. Logo existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que AB = mu e DB = nu. Portanto o segmento AB mede m e o segmento DB mede n. Pelo teorema de Pitágoras $n^2 = m^2 + m^2$, ou seja, $n^2 = 2m^2$. Portanto $(n/m)^2=2$. Seja a/b uma fração irredutível tal que n/m=a/b. Como $(a/b)^2=2$ então $a^2=2b^2$. Portanto a^2 é par e conseqüentemente a é par. Como a/b é irredutível, b deve ser ímpar. Como a é par, existe um inteiro k tal que a=2k. Como $a^2=2b^2$ então $4k^2=2b^2$. Logo b^2 é par. Conclui-se que b também é par. Absurdo pois b é ímpar.*

O artigo de K.von Fritz *A descoberta da incomensurabilidade por Hipasus de Metapontum* introduziu uma nova dimensão ao problema. Ele desloca radicalmente a questão da incomensurabilidade para a divisão de um segmento em média e extrema razão. Von Fritz observa que apesar de Proclus atribuir a Pitágoras a descoberta dos incomensuráveis, todos os outros textos se referem a Hipasus de Metapontum nascido por volta de 500 a.C. Segundo ele essa descoberta pode ter sido feita por volta de 450 a.C e está relacionada com as faces pentagonais de um dodecaedro regular e com o pentagrama (emblema dos pitagóricos). Uma possibilidade de justificar que o lado do pentágono regular e o lado do pentagrama são incomensuráveis é a seguinte:



Vamos supor que o lado AE e a diagonal AD do pentágono regular ABCDE sejam comensuráveis. Logo existe um segmento u e inteiros positivos m e n tais que AE = mu e AD = nu com n > m pois AD é maior que AE. As diagonais do pentágono regular ABCDE determinam um novo pentágono regular A'B'C'D'E'.



Como AD - AE = B'E'com AD = nu e AE = mu então B'E'=(n-m)u.
Como AE-B'E'=A'B', conclui-se que A'B'= mu-(nu - mu)=(2m-n)u
Logo se houver um segmento u que seja submúltiplo comum da diagonal AD e do lado AE do pentágono regular inicial então o mesmo segmento u será submúltiplo dos segmentos E'B' e A'B', ou seja, da diagonal e do lado do novo pentágono regular A'B'C'D'E'.
O mesmo argumento que permitiu passar do pentágono inicial ABCDE ao pentágono A'B'C'D'E' pode ser repetido para se chegar a um outro pentágono menor ainda. Após um número finito de repetições teremos um pentágono de lado a_n e diagonal d_n comensuráveis com relação ao segmento u e com $a_n < u$, o que é uma contradição. Logo o lado e a diagonal do pentágono inicial são incomensuráveis.

Conseqüências dessa descoberta?

Os diálogos de Platão mostram que os matemáticos ficaram profundamente perturbados com essa descoberta que destruía a generalidade da teoria das proporções pois que todas as demonstrações eram baseadas no número como coleção de unidades. O segmento já não podia mais ser considerado indivisível, mas infinitamente divisível. Surgia então a necessidade de se **criar uma teoria sobre razões** envolvendo grandezas comensuráveis e incomensuráveis. As demonstrações começavam a **utilizar cada vez mais raciocínios associados a áreas**.

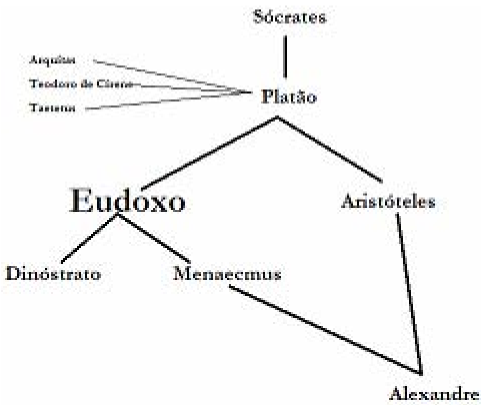
Outra conseqüência dessa descoberta foi a necessidade de se elaborar uma **teoria de divisibilidade mais ampla do que a teoria do par e ímpar.**

Por volta da mesma época em que se dava a devastadora descoberta dos incomensuráveis, Zenão de Eléia apresentava paradoxos onde mostrava que considerar grandezas divisíveis infinitamente levava a contradições e considerar grandezas indivisíveis levava também a contradições.

Boyer no livro *A história do cálculo e seu desenvolvimento conceitual diz: "Aristóteles e outros filósofos gregos procuraram responder a esses paradoxos, mas o fizeram de maneira tão pouco convincente, que os matemáticos da época concluíram que era melhor* ***evitar totalmente os processos infinitos****"*.

Quem foi Eudoxo de Cnido ?

Pouco se sabe da vida de Eudoxo. Foi discípulo de Platão e parece ter sido o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis construindo uma **teoria das proporções** que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis. Essa teoria encontra-se exposta no livro V de Euclides.



Credita-se também a Eudoxo o chamado **método de exaustão** que eliminava o infinito da matemática grega. Esse método permite comparar áreas e volumes e segundo afirma Arquimedes, no prefácio de seu livro *Sobre a esfera e o cilindro*, foi utilizado por Euclides no livro XII.

A partir dessas novas idéias que reabilitaram a geometria, a concepção atomista (que preconizava a existência dos indivisíveis) foi adotada para **números** e a concepção continuísta (que imaginava o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis infinitamente) para **grandezas.** Os números eram considerados finitamente divisíveis e as grandezas infinitamente divisíveis.

A definição de proporção de Eudoxo sem a utilização dos números

Hoje, quando dizemos que os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ são tais que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ estamos tratando com as medidas dos segmentos AD, DB, AE e EC e portanto com números reais. Eudoxo encontrou um modo de definir a igualdade de duas razões sem utilizar números (reais) mas apenas inteiros positivos. Antes de apresentar a definição de Eudoxo vamos utilizar a linguagem moderna para visualizar a idéia de Eudoxo.

Na igualdade $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ temos dois casos a considerar: AD e DB comensuráveis ou incomensuráveis. Se AD e DB forem comensuráveis, isto é, se $\frac{AD}{DB}$ for racional então existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$. Podemos portanto escrever as igualdades na forma de um enunciado que envolve números inteiros:

se m.DB=n.AD então m.EC=n.AE

Supondo que os segmentos AD e DB sejam incomensuráveis, podemos considerar que:

Se m e n são inteiros positivos e $\frac{m}{n}<\frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n}<\frac{AE}{EC}$

Se m e n são inteiros positivos e $\frac{m}{n}>\frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n}>\frac{AE}{EC}$

Podemos escrever as duas implicações na forma de um enunciado que envolve números inteiros:

se m.DB<n.AD então m.EC<n.AE e se m.DB>n.AD então m.EC>n.AE

E o que fez Eudoxo?

Eudoxo evitou a discussão sobre a natureza dos irracionais e sobre a validade dos processos infinitos e definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa. Esta definição se encontra no livro V (definição 6) dos Elementos de Euclides e fixa o critério de razões idênticas:

> *«Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondentes»*

Utilizando a linguagem moderna e considerando como grandezas os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ (comensuráveis ou não), para Eudoxo, dizer que $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ significava dizer que para todo m e n inteiros positivos, as condições a seguir eram verificadas:

Se m.DB<n.AD então m.EC<n.AE

Se m.DB>n.AD então m.EC>n.AE

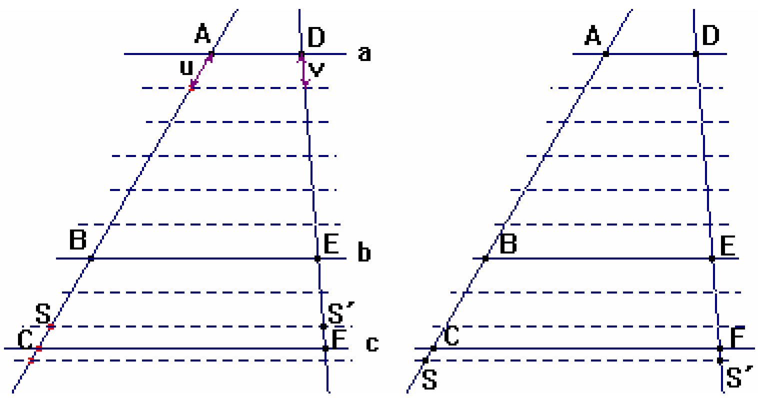
Se m.DB=n.AD então m.EC=n.AE

Mais tarde, essa definição válida para grandezas quaisquer foi fonte de inspiração para a criação dos números reais.

Como exemplo do uso dessa definição voltaremos ao teorema de Tales e apresentaremos uma demonstração completa (para grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis) pela teoria das proporções de Eudoxo.

Supondo a//b e b//c, vamos provar que AB/BC=DE/EF
Sejam n e m dois números naturais qualquer. Vamos dividir AB em n partes iguais. Logo existe um segmento u tal que AB=n.u
Vamos marcar m vezes u em BC. Sendo S a extremidade do último segmento contido em BC temos 3 casos possíveis:

a) S está entre B e C
b) C está entre B e S
c) C=S (nesse caso AB e BC são comensuráveis)



1° caso Vamos supor S entre B e C

Logo BS=mu. De cada ponto de divisão de AB e BC tracemos paralelas às retas a,b e c. Essas retas interceptarão DE e EF em pontos que dividirão DE em n partes iguais a v e ES´ em m partes iguais a v. Logo DE=nv e ES´=mv. De AB=nu vem que mAB=mnu e de BS=mu vem que nBS=nmu. Como BS<BC então mAB=nBS<nBC. Portanto mAB<nBC.
De DE=nv vem que mDE=mnv e de ES´=mv vem que nES´=nmv. Como ES´<EF então mDE=nES´<nEF. Portanto mDE<nEF. Conclusão mAB<nBC $\Rightarrow$ mDE<nEF

2°caso Vamos supor C entre B e S
De AB=nu vem que mAB=mnu. De BS=mv vem que nBS=nmv. Como BS>BC então mAB=nBS>nBC. Portanto mAB>nBC.
De DE=nv vem que mDE=mnv e de ES´=mv então nES´=nmv. Como ES´>EF então mDE=nES´>nEF. Portanto mDE>nEF. Conclusão mAB>nBC $\Rightarrow$mDE>nEF

3°caso C=S
De AB=nu vem que mAB=mnu e de BS=mv vem que nBS=nmv. Logo mAB=nBS
De DE=nv vem que mDE=mnv e de EF=mv vem que nEF=nmv. Logo mDE=nEF
Conclusão mAB=nBS$\Rightarrow$mDE=nEF

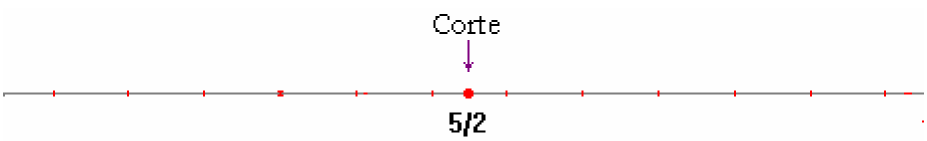
Eudoxo e Dedekind

Desde a crise provocada pela descoberta das grandezas incomensuráveis na Antiga Grécia, os matemáticos levaram vinte séculos para construir um objeto matemático cujo quadrado seja 2. Sabiam que nenhum número racional ao quadrado dava 2, sabiam que a diagonal de um quadrado de lado unitário podia ser construída com régua e compasso e que portanto existia, mas não sabiam como definir e operar com esses novos números. Foi somente no século XIX que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou.

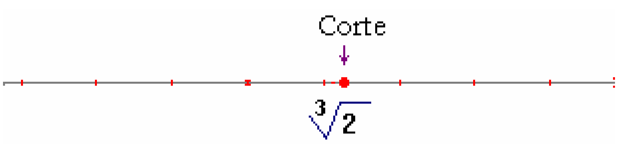
Galileu e Leibniz julgavam que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade, isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existir sempre um terceiro. Mas só isto não bastava para caracterizar esses objetos pois os números racionais também têm essa propriedade e não formam um "continuum". Se representarmos todos os números racionais sobre uma reta, não teremos preenchido totalmente os pontos da reta; restarão inúmeros "buracos".

Dedekind (1831-1916) se voltou para a questão do preenchimento dos "buracos" da reta desde 1858 quando dava aulas de cálculo. Refletindo sobre a questão, Dedekind se perguntou: O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? **E foi buscar a inspiração na teoria das proporções de Eudoxo (IV A.C)**. Dedekind chegou à conclusão que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes. *"Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado"* escreveu Dedekind. A grosso modo a sua idéia era a seguinte : Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional. Portanto, por meio dos cortes de Dedekind, amplia-se o conjunto Q introduzindo os números irracionais.

Por exemplo, os conjuntos $A=\{x\in Q/x<5/2\}$ e $B=\{x\in Q/x\geq 5/2\}$ determinam o corte que define o número real 5/2. Observe que nesse caso, B tendo menor elemento, o corte define um número real racional



Os conjuntos $A=\{x\in Q/x^3<2\}$ e $B=\{x\in Q/x^3>2\}$ determinam o corte que define o número real que usualmente denotamos por $\sqrt[3]{2}$. Observe que nesse caso, A não tendo um maior elemento e B não tendo menor elemento, o corte define um número real irracional.



Do mesmo modo, os conjuntos $A=Q^{-}\cup\{x\in Q^{+}/x^2<2\}$ e $B=\{x\in Q^{+}/x^2>2\}$ determinam o corte que define o número real irracional indicado por $\sqrt{2}$

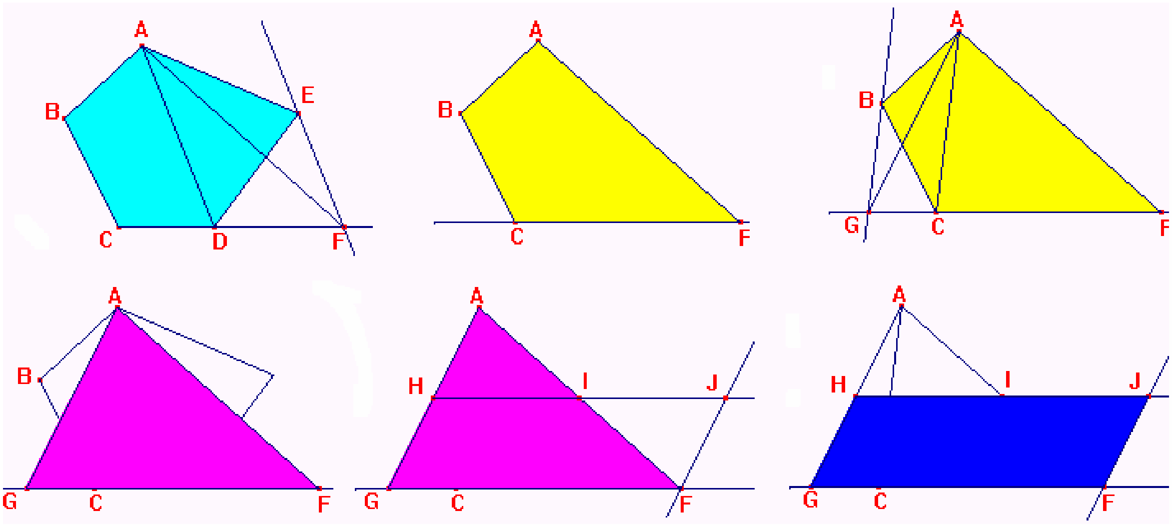
Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os "buracos" de Q e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais.

No começo do século vinte, uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russell (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes A e B é univocamente determinada pela outra, uma só bastava para a determinação de um número real. A partir daí, não sendo necessário considerar as duas classes de cada corte, começou-se a trabalhar somente com a classe da esquerda ou somente com a classe da direita. Assim, um número real passa a ser definido somente por uma das classes.

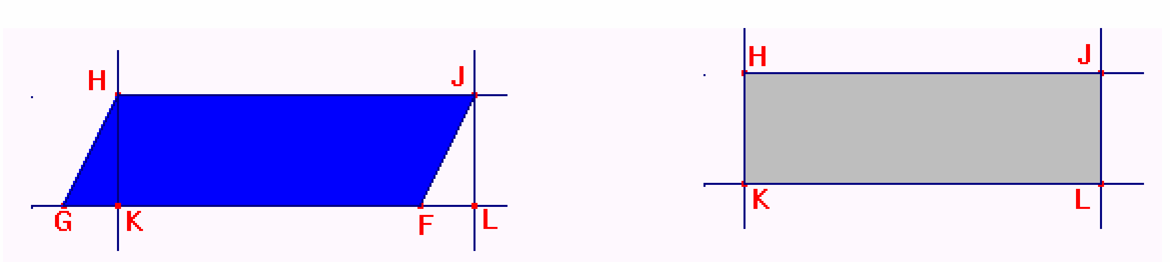
Relacionando a definição de Eudoxo com a de Dedekind podemos dizer que duas razões são iguais segundo Eudoxo se e somente se elas definem cortes iguais segundo Dedekind.

O princípio de exaustão : A negação do infinito

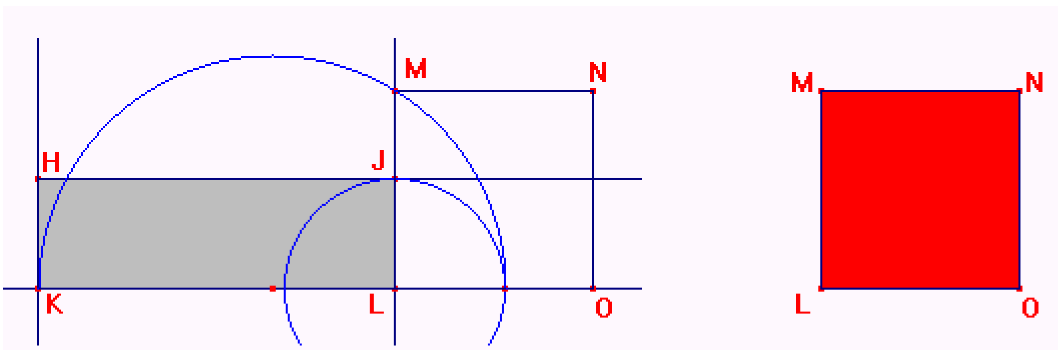
Os gregos sabiam comparar figuras poligonais. Todo polígono podia ser transformado num quadrado equivalente. Essa operação era chamada de quadratura. Fazer a quadratura de uma figura plana significava construir um quadrado equivalente à figura dada. O exemplo abaixo mostra um pentágono ABCDE sendo transformado num quadrilátero equivalente ABCF que por sua vez é transformado num triângulo equivalente AGF. A partir dos pontos médios H e I dos lados do triângulo obtém-se o paralelogramo equivalente GFJH.



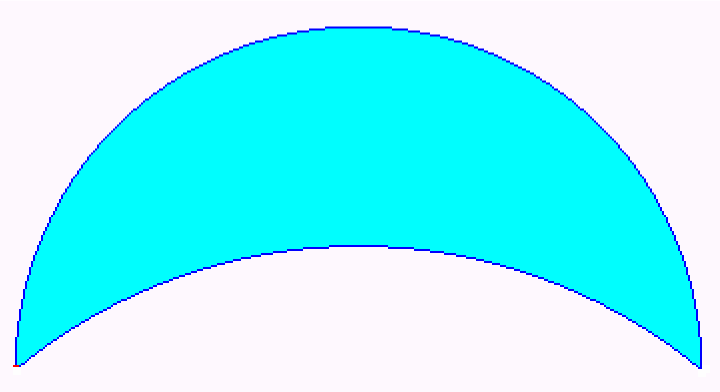
O paralelogramo é em seguida transformado no retângulo equivalente KLJH.



E finalmente o retângulo é transformado no quadrado equivalente LONM a partir da construção de uma média geométrica.



Os gregos sabiam fazer também a quadratura de certos tipos de lúnulas mas não tinham um método para comparar figuras quaisquer (curvilíneas ou não) em geral.



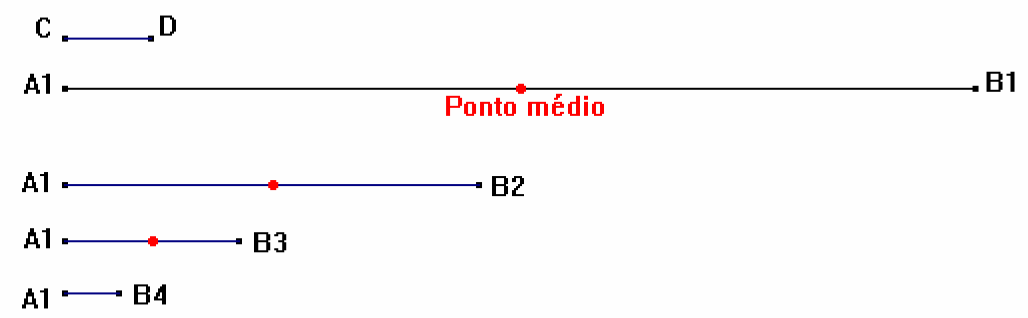
Uma lúnula é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes.

Eudoxo sugeriu uma abordagem que permitia comparar figuras curvas com figuras poligonais.

No **coração desse método está a proposição I do livro X de Euclides chamada mais tarde de princípio de exaustão**:

> *«Dadas duas grandezas de mesma espécie, se retirarmos da maior uma parte maior que sua metade e do resto retirarmos uma parte maior que sua metade e assim por diante, obteremos após um número finito de etapas uma grandeza menor que as duas grandezas consideradas.»*

No desenho abaixo temos como grandezas dois segmentos CD e A1B1. Se do maior A1B1 retirarmos um parte maior que a sua metade obteremos A1B2. Se continuarmos o processo retirando do maior A1B2 uma parte maior que sua metade obteremos A1B3. Se retirarmos de A1B3 uma parte maior que a sua metade chegaremos a uma grandeza A1B4 que é menor que as duas grandezas consideradas e que são CD e A1B1.

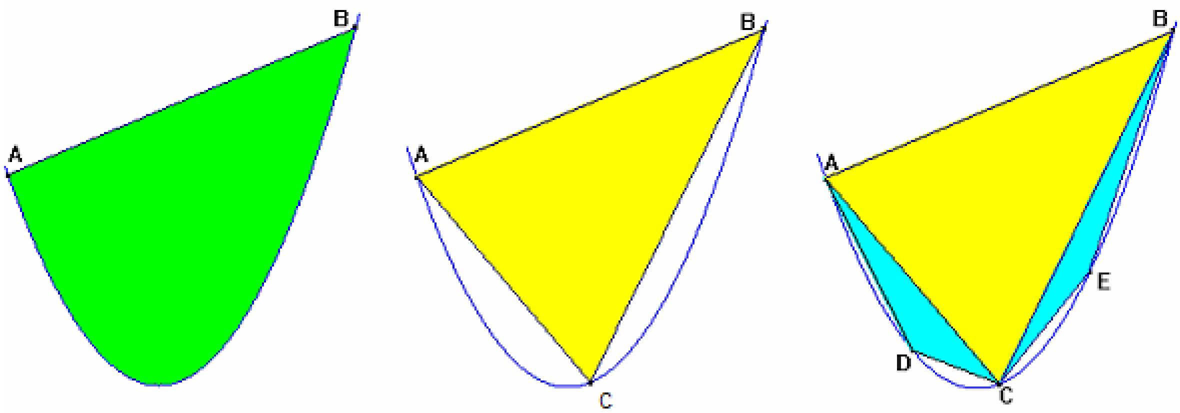


O método de exaustão de Eudoxo

O método de exaustão não é um método de descoberta. Por exemplo, para comparar a área A de um segmento parabólico com uma outra área B precisamos inicialmente descobrir uma superfície equivalente ao segmento parabólico. Em seguida provamos que as duas superfícies A e B têm áreas iguais procedendo da seguinte maneira: supõe-se que A>B, obtém-se a diferença A-B e aplicando o princípio de exaustão deve-se chegar a um absurdo. Em seguida procede-se da mesma maneira supondo que A<B, obtendo a diferença B-A que deve levar a uma segunda contradição. Conclui-se finalmente que A=B.

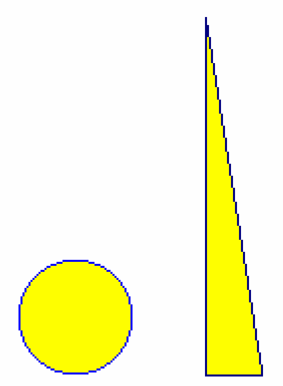
Até o final do século XVI as demonstrações eram sempre feitas por esse método do absurdo duplo.

Arquimedes descobriu inicialmente que a área do segmento de parábola é equivalente a 4/3 da área do triângulo ABC (a reta que passa por C é paralela à reta AB). Observe que podemos construir uma sucessão de polígonos com um número crescente de lados até **exaurir** a área do segmento parabólico. Em seguida pelo método de exaustão provou por duplo absurdo que as duas áreas eram iguais.



Ilustraremos o método de exaustão com a proposição I do livro *a medida do círculo* **de Arquimedes**. Apresentaremos a demonstração utilizando a notação moderna.

«Um círculo é equivalente (igual em área) a um triângulo retângulo no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro igual ao comprimento da sua circunferência.»



Para mostrar a área do círculo é igual à área do triângulo utilizaremos na primeira parte da demonstração polígonos regulares inscritos com número crescente de lados e chegaremos num absurdo e na segunda parte utilizaremos polígonos regulares circunscritos com número crescente de lados para chegar num segundo absurdo.

Indiquemos por **A a área do círculo** e **T a área do triângulo**. Temos 3 possibilidades: A>T, A<T e A=T.

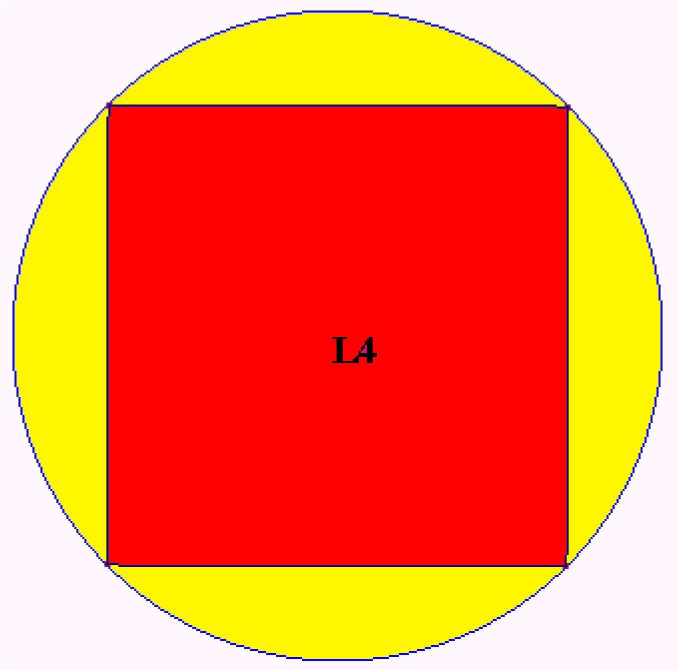
Suporemos inicialmente A>T (logo a diferença A–T corresponde a uma área)

Aplicaremos o princípio de exaustão às grandezas A e A–T.

Vamos retirar da maior que é A, um quadrado inscrito cuja área é L4 (a área L4 é maior que a metade da área A do círculo)

Retiro o quadrado de área L4.

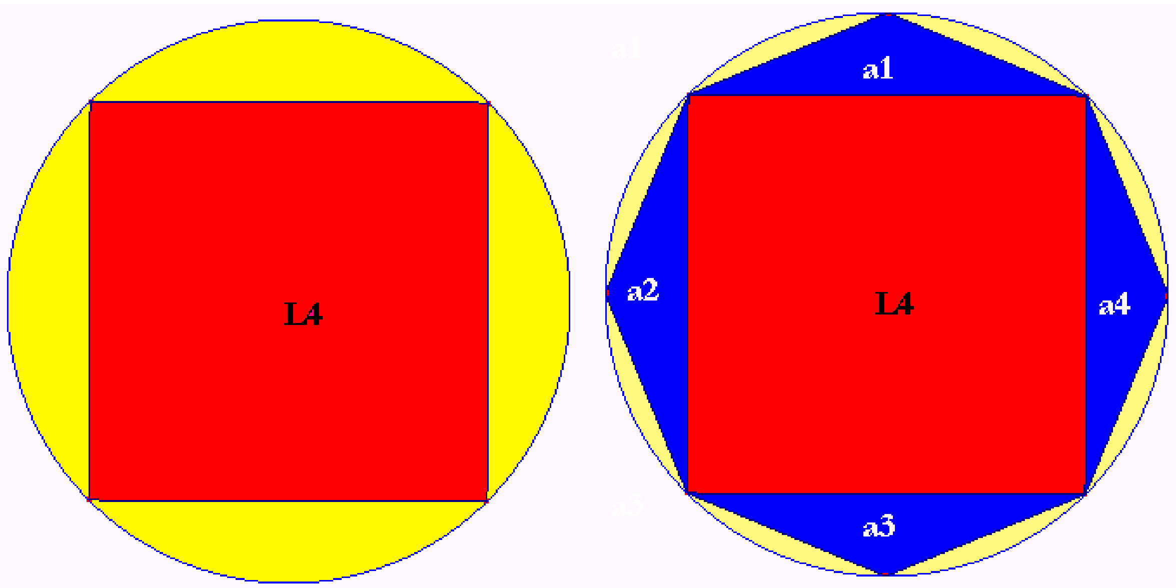
Sobrará: A – L4 (L4 á a área de um polígono regular de 4 lados)



Retiraremos do que sobra A–L4, uma parte maior que sua metade (a1+a2+a3+a4)

Sobrará: (A – L4) – (a1+a2+a3+a4) = A – (a1+a2+a3+a4+L4)=A – L8

(L8 é a área de um polígono regular de 8 lados)

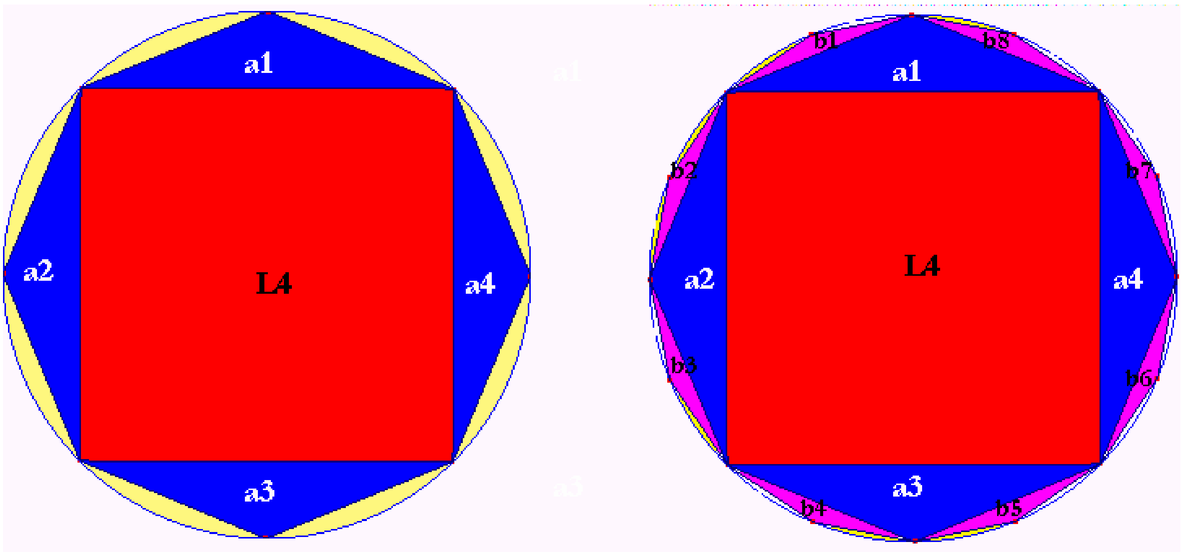


Retiraremos do que sobra A–L8, uma parte maior que sua metade b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8

Sobrará:(A–L8) – (b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8)=

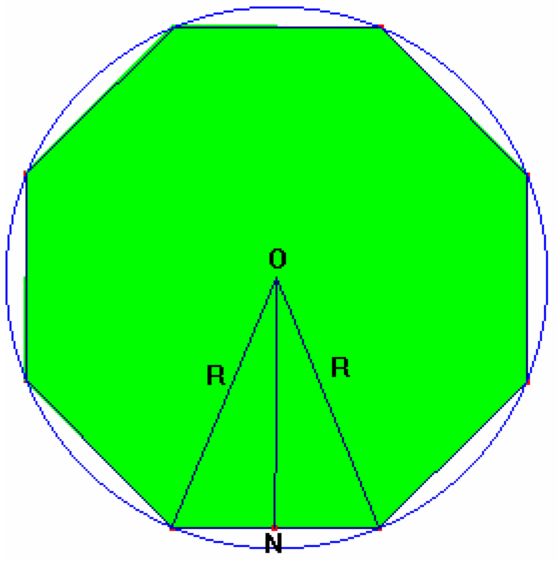
A–(b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8+a1+a2+a3+a4+L4)=A–L16

(L16 é a área de um polígono regular de 16 lados)



Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área Ln tal que A–Ln é menor que as duas grandezas A e A–T consideradas. Logo A–Ln < A–T. Donde T<Ln

Considere um polígono regular de área Ln inscrito no círculo de área A
O apótema ON é menor que R
O perímetro do polígono regular é menor que o comprimento C da circunferência.
ON. perímetro do polígono <R.C
ON.perímetro do polígono/2 < R.C/2. Mas ON. Perímetro/2=Área Ln do polígono e R.C/2 é igual à área do triângulo T. Logo Ln < T (Absurdo)

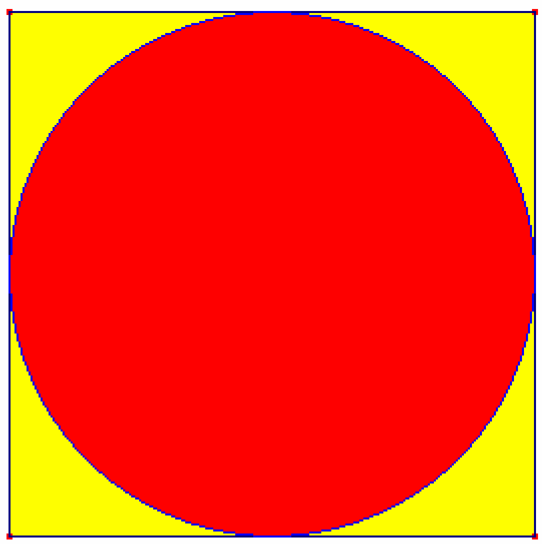


Vamos supor A<T (Logo T–A corresponde a uma área)

Seja L4 a área do quadrado circunscrito ao círculo

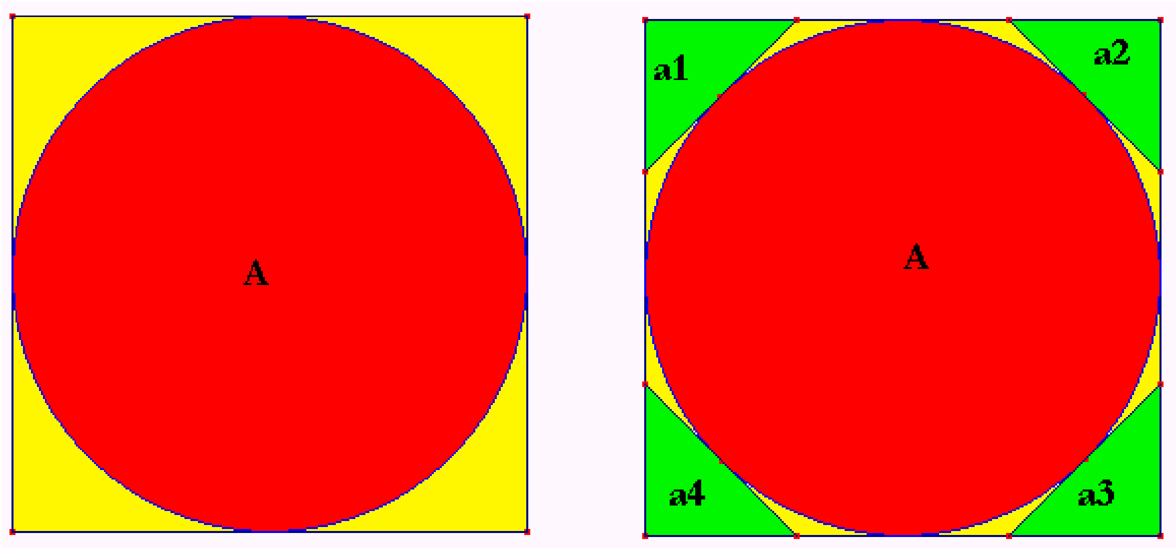
Vamos aplicar o princípio de exaustão às grandezas L4 e T–A

Vamos retirar da maior, quadrado circunscrito de área L4 uma parte maior que a sua metade. Sobra: L4 – A



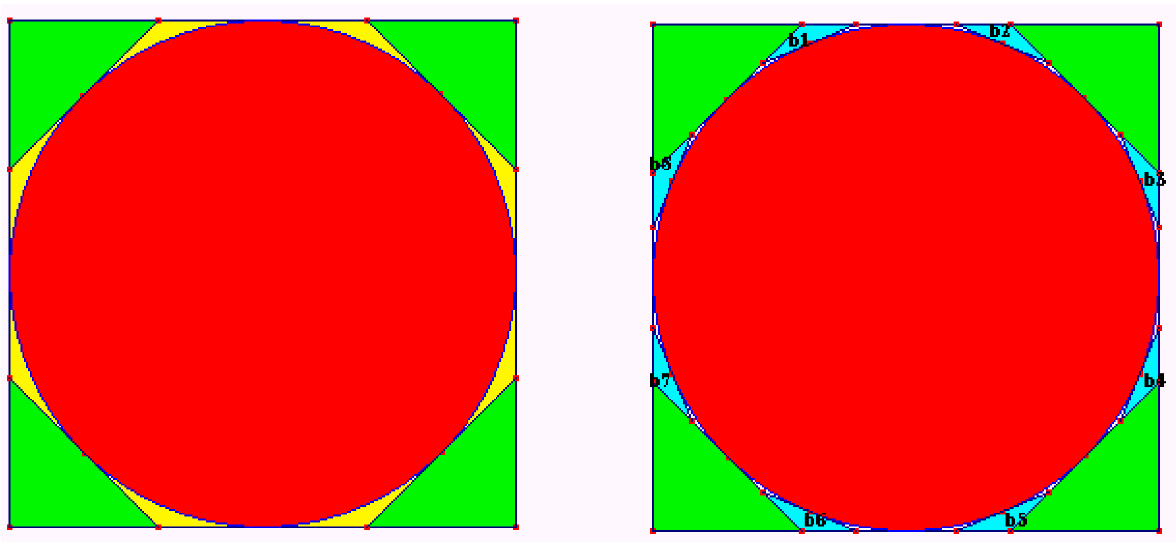
Retiraremos do que sobra L4–A, uma parte maior que a sua metade a1+a2+a3+a4

Sobrará: (L4 – A) – (L4 – L8) = L8 – A (L8 é a área de um polígono regular de 8 lados)



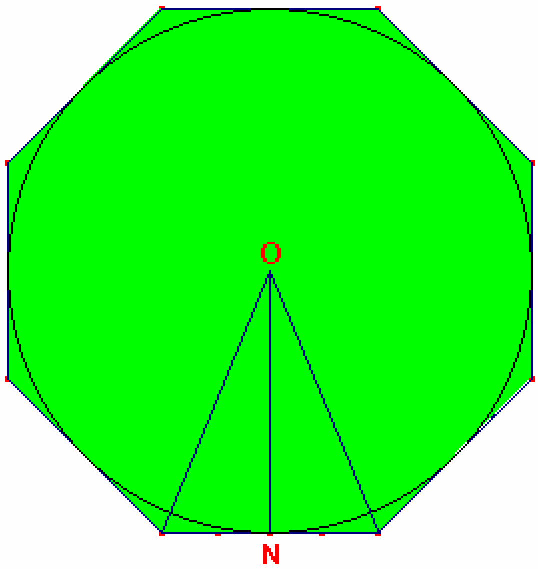
Retiraremos do que sobra L8 - A, uma parte maior que a sua metade b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8

Sobrará : (L8 - A) - (L8 - L16) = L16 – A



Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área Ln tal que Ln-A é menor que as duas grandezas. Logo Ln-A < T-A. Donde Ln<T

Considere um polígono regular de área Ln circunscrito ao círculo de área A e ON = R
O perímetro do polígono é maior que o comprimento C da circunferência. Logo
ON. perímetro do polígono > R.C. Dividindo por 2 os dois membros teremos:
ON.perímetro do polígono/2 > R.C/2. Mas ON. Perímetro do polígono/2=Ln e RC/2=T
Logo Ln > T (Absurdo pois vimos que Ln<T)



Como A>T levou a um absurdo e A<T levou a um outro absurdo, conclui-se que A=T.

Bibliografía

- Caveing, M. L´irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu´à Euclide, Presses universitaires, Paris,1998
- Euclide. Les Éléments Volume 3, Livre X, Presses Universitaires de France, 1998, traduction Bernard Vitrac.
- Baron,M.E. A matemática Grega, Editora Universidade de Brasília,1985
- Gardies, J.L. L´héritage épistémologique d´Eudoxe de Cnide, Paris, Librairie philosophique J.Vrin, 1988
- Polcino, F.C. A geometria na Antiguidade Clássica. São Paulo: FTD,1999
- Boyer, C. B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- Boyer, C. B. A The history of the calculus and its conceptul development. New York, Dover publications, 1959.

- Proclus de Lycie, les Commentaires sur le premier livre des Éléments d´Euclides, IREM de Lille, 1948.
- Nobre, S. Introdução à História da História da Matemática. Revista Brasileira de História da Matemática, vol 2 N°3
- Avila, G. RPM 7 pg 5 a 10

Vincenzo Bongiovanni, Professor do Programa.

E-mail: *valente@pucsp.br*