UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 157-161
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

¿Programación lineal en primaria?

Problema

Minimizar $(n+m+p+q+r)$

sujeto a:

$$n+3m+5p+7q+9r=24$$
$$n,\ m,\ p,\ q,\ r \in \{0,1,2,3\}$$

Este problema tiene su origen en la creación de problemas de optimización para estudiantes de educación básica, con el propósito de estimular la "intuición optimizadora"[1]. Como en el Perú se considera un capítulo de introducción a la programación lineal en el quinto año de secundaria y en los textos y en las clases correspondientes el énfasis no está precisamente en lo intuitivo sino más bien en lo algorítmico, insistiéndose en los métodos gráficos, a los cuales el estudiante puede mecanizarse sin tomar conciencia del verdadero significado de máximo o de mínimo en el contexto del problema, se me ocurrió crear un problema cuya solución no sea posible usando los métodos gráficos de dibujar la región convexa correspondiente a las restricciones y de hallar el valor numérico de la función objetivo en los vértices de tal región. Sabiendo que este recurso funciona a lo más con tres variables, pensé en un problema con cinco variables. Así surgió este, que con un texto adecuado correspondiente a este planteamiento formal, puede ser resuelto aún por niños de segundo grado de primaria, como lo demuestran las experiencias didácticas realizadas en España y en Perú, luego de un valioso enriquecimiento de ideas y propuestas, en el marco de la transposición didáctica, las situaciones didácticas y la ingeniería didáctica, que ha dado lugar a una comunicación en el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), en coautoría con E. Lacasta, M. R. Wilhelmi y J. Pascual [2]. En tal trabajo, el objetivo de la situación que se diseña es doble: "por un lado, la intervención razonada en los sistemas didácticos; por otra parte, producir conocimiento sobre la forma en la que se construyen y comunican problemas de optimización relativos a la medida, en edad infantil".

---

[1] Sobre la existencia de la intuición optimizadora puede revisarse Malaspina y Font (2009) Optimizing intuition, en Proceedings of PME 33, vol 4, 81-86 y en Malaspina (2009) Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú.

[2] Lacasta E., Malaspina U., Pascual J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis *a priori* de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educción Matemática XIII*. (pp. 247–258). Santander: SEIEM.

Ideas iniciales y conjetura didáctica

Estas ideas fueron expuestas en el IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas que tuvo lugar en febrero del 2009.[3] El texto inicial correspondiente a la presentación formalizada hecha al inicio de este artículo, fue el siguiente:

> *Expresar el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto* $\{1,3,5,7,9\}$. *Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

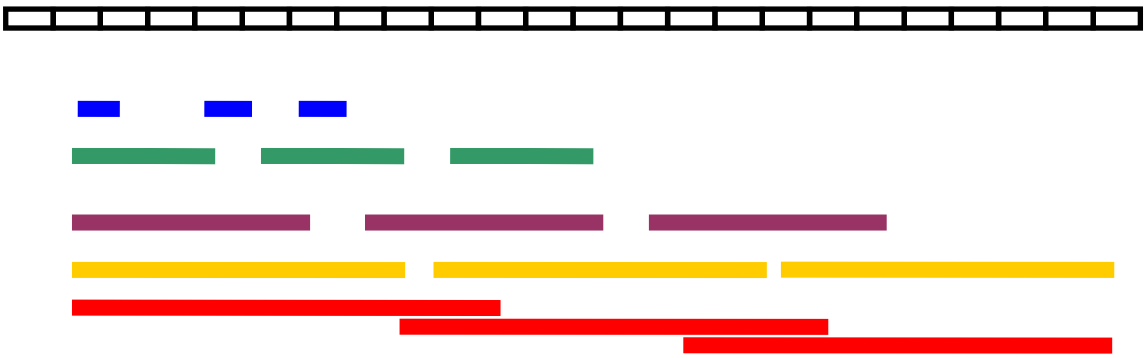
Observemos que el número de veces que se emplee cada sumando está dado por los valores que pueden asumir las variables m, n, p, q, r. Ciertamente, podría no usarse alguno de los sumandos, y eso está considerado al ser cero uno de los posibles valores de estas variables.

Reflexionando a partir de este texto, conjeturé que con una adecuada presentación lúdica el problema podría ser resuelto no solo por estudiantes de secundaria sino también por niños de primaria.

Así, pensé en el siguiente material didáctico:

- un “camino rectilíneo” de 24 unidades de longitud.
- palitos de colores diferentes, siendo cada color de un número determinado de unidades: 1, 3, 5, 7 ó 9 (La unidad de medida para los palitos y para el camino debe ser la misma)

  De cada color debe tenerse tres palitos.



Y en la siguiente actividad:

> *Construye un camino del mismo tamaño que el camino que tienes, poniendo los palitos uno a continuación de otro y sin sobreponerlos.*

[3] Malaspina, U. (2009). Problemas de Optimización en la Educación Básica: Reflexiones y Propuestas. En Gaita, C. (Editora). *Actas IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. (pp. 45-59). Lima: Departamento de Ciencias-Maestría en la Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Con las siguientes preguntas, para responderlas gradualmente, en trabajos individuales y luego grupales:

1. *¿Cuántos palitos usaste?*
2. *¿Cuál es el menor número de palitos que puedes usar?*
3. *¿Cuál es el mayor número de palitos que puedes usar?*
4. *¿Puedes construir el camino con sólo 5 palitos?*

Observemos que los sumandos de 24 ahora son palitos concretos y que la restricción $n, m, p, q, r \in \{0,1,2,3\}$ está dada en la disponibilidad de los palitos (a lo más tres de cada tamaño). La pregunta 2 corresponde al problema original.

Transposición didáctica

La presencia de Miguel R. Wilhelmi en la conferencia y el interés que despertó en él el problema propuesto con la conjetura didáctica, llevó a hacer un análisis más sistemático de lo expuesto, en el marco de la transposición didáctica y de la ingeniería didáctica. Así, luego de trabajos conjuntos con Eduardo Lacasta, Miguel R. Wilhelmi y José Pascual, de la Universidad Pública de Navarra, se obtuvo el artículo mencionado en la nota 2, que fue presentado, aceptado y expuesto en el XIII Simposio de la SEIEM, realizado del 10 al 12 de septiembre del 2009. En él se presentan cinco situaciones problemáticas en el marco de una pequeña historia de la celebración de una boda preparada con anticipación, por lo cual se debe cubrir con lonas la gran alfombra de ingreso de los novios, de modo que no se superpongan y que no cubran más de la superficie exacta de la alfombra. Se reparte material didáctico correspondiente a la alfombra y a las lonas (la alfombra es como el camino y las lonas son como los palitos considerados en la conjetura didáctica) y – una a una – se les pide a los niños que en grupos formados con a lo más cuatro integrantes, resuelvan las siguientes situaciones:

- *Situación 1:* Cubrir la alfombra
  (Sin indicación alguna acerca del número de lonas que usen).
- *Situación 2*: Cubrir la alfombra usando solo 6 lonas.
- *Situación 3*: Pedir por escrito 6 lonas para cubrir la alfombra.
  (En este caso los niños solo disponen de una lona de cada color /tamaño y deben arreglárselas para saber con cuales 6 lonas pueden cubrir la alfombra.)
- *Situación 4*: Cubrir la alfombra con el menor número posible de lonas.
- *Situación 5*: Cubrir la alfombra con el coste mínimo.
  (Para esta situación, se les entrega material similar al que han venido usando, pero cada color/tamaño de lona tiene un precio. Cuanto más largas, más caras.)

Observemos que la situación 4 es la que corresponde al problema original.

En términos generales, prácticamente todos los grupos de niños de segundo de primaria con los que se ha hecho la experiencia didáctica, tanto en España como en Perú, resuelven todas las situaciones presentadas. Con la quinta es con la que más dificultades tienen, pero hay grupos que muy rápidamente llegan a la solución óptima.

Es muy interesante observar cómo más del 50% de los grupos resuelve la primera situación usando espontáneamente el mínimo número de alfombras. Este es un hecho, que – personalmente – considero abona a favor de mi conjetura de existencia de la intuición optimizadora. Cabe mencionar también que quedé muy gratamente sorprendido al ver cómo niños entre 7 y 8 años de edad resuelven la quinta situación problemática, que yo no consideré en mi propuesta inicial. (Considero que también éste es un valioso mensaje sobre la intuición optimizadora.)

Evidentemente, las experiencias didácticas fueron muy valiosas y tenemos el propósito de continuar con el análisis a posteriori y las consiguientes propuestas y reflexiones.

Soluciones formales

Terminaré este artículo mostrando dos soluciones formales al problema original y usando el texto propuesto en las ideas iniciales:

> *Expresar el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto* $\{1,3,5,7,9\}$*. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

Ciertamente es importante que estas soluciones las conozcan los profesores y nos hacen ver que el problema es también aplicable a jóvenes de secundaria, aun sin su contexto lúdico.

Solución 1.[4]

- Como se trata de minimizar el número de sumandos, es natural usar más los sumandos mayores. Las mayores aproximaciones a 24 (por defecto) las obtenemos con dos veces 9 y con tres veces 7.
  - Usando dos veces 9 es imposible obtener 24 con un solo sumando adicional, pues 18 es par y los posibles sumandos son todos impares;
  - Usando tres veces 7, se obtendrá 24 usando por lo menos un sumando más.
- Este análisis ya nos dice que el menor número de sumandos de 24 tiene que ser **mayor que 3.**

  En el lenguaje usual de la programación lineal, la función objetivo en este problema es $f(n,m,p,q,r)=m+n+p+q+r$. Así, afirmamos que el valor óptimo de la función objetivo tiene que ser mayor que 3.
- Como no es posible usar tres veces 9, porque ya se tendría 27, se usa sólo dos veces ($r=2$). Las seis unidades que faltan (24 – (9 + 9)) se pueden completar de dos maneras:

[4] Observemos que el número de sumandos de 24, escogidos del conjunto $\{1,3,5,7,9\}$, es el número de palitos (o de lonas) en los contextos lúdicos propuestos.

  - Usando dos veces 3 ($m=2$), ó
  - Usando una vez 5 y una vez 1 ($p=1$ y $n=1$).

- De este modo se tiene
  - En el primer caso: $n=0,\ m=2,\ p=0,\ q=0,\ r=2$, con lo cual el valor de la función objetivo es 4.
  - En el segundo caso: $n=1,\ m=0,\ p=1,\ q=0,\ r=2$, con lo cual el valor de la función objetivo es 4.
- Con las restricciones impuestas en el problema, la función objetivo tomará sólo valores enteros no negativos y es imposible que obtenga los valores 0, 1, 2 y 3. Como se acaba de mostrar que el valor 4 es obtenible, **el valor mínimo (óptimo) de la función objetivo es 4.**

Esta solución formaliza en cierto modo muchas reacciones naturales para responder la pregunta 2 hecha en el apartado de las ideas iniciales y la conjetura didáctica, y para la situación 4 propuesta en el apartado de la transposición didáctica.

<u>*Solución 2*</u>

Recordemos que $n+3m+5p+7q+9r=24$.

- ($n+m+p+q+r$) tiene que ser par.
  (Basta observar que: $n+m+p+q+r=24-2m-4p-6q-8r$ es par.)
- ¿ $n+m+p+q+r=0$?
  No es posible, pues esto significa que $n=m=p=q=r=0$; es decir, cada sumando cero veces, y así es imposible obtener 24
- ¿ $n+m+p+q+r=2$?
  No es posible, pues tendría que usarse sólo un sumando dos veces o sólo dos sumandos, una vez cada uno. Así a lo más se conseguiría:
  - Que $n+3m+5p+7q+9r=18$, con $n=m=p=q=r=0$ y $r=2$ ó
  - Que $n+3m+5p+7q+9r=16$, con $q=r=1$ y $n=m=p=0$.
- ¿ $n+m+p+q+r=4$?
  Sí es posible, pues, por ejemplo:
  $n=1,\quad m=0,\quad p=1,\quad q=0,\quad r=2$, implica que $n+3m+5p+7q+9r=24$.
- En consecuencia, el **mínimo valor** de ($n+m+p+q+r$) es **4**, pues es el menor valor par obtenible por $n+m+p+q+r$, con las restricciones dadas en el problema.

Con esta solución se responde también a la pregunta 4, formulada en el apartado de las ideas iniciales y la conjetura didáctica: es imposible obtener 24 con un número impar de sumandos escogidos del conjunto $\{1,3,5,7,9\}$.