UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2009, Número 19, páginas 117-129
ISSN: 1815-0640

# Número infinito[1] como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos de la ESO[2]

**Juan A. Prieto Sánchez.**

## Resumen

El fin de esta investigación es indagar en determinados aspectos del conocimiento del número infinito, mediante la comparación de series[3] numéricas finitas e infinitas según Russell, en los alumnos de la ESO. Para ello hemos construido un modelo evolutivo susceptible de comparación empírica. Se realizaron entrevistas semi-estructuradas para analizar las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias, y con ello dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explique las competencias del alumnado.

## Abstract

The aim of this research is to investigate certain aspects about the knowledge of the infinity number, through a comparison of finite and infinite numerical series according to Russell, in ESO students. For that purpose, an evolutionary model susceptible of an empirical comparison has been created. Semi structured interviews were carried out in order to analyze the peculiar situations founded, just like the processes, skills and strategies; and with the help of these points, we may be directed towards an evolutionary model that explains the competences of students.

## Resumo

A finalidade desta pesquisa é indagar em determinados aspectos o conhecimento do número infinito, mediante a comparação de séries numéricas finitas[1] e infinitas segundo Russel, nos alunos da ESO. Para isto construímos um modelo evolutivo susceptível de comparação empírica. Realizaram-se entrevistas semi-estruturadas para analisar as situações singulares encontradas, assim como os procedimentos, destrezas e estratégias, e com isto dirigir-nos em direção a um modelo evolutivo que explique as competências do alunado.

## 1. Introducción

De las posibles formas de abordar este concepto, utilizamos comparaciones entres conjuntos finitos e infinitos de series numéricas (Russell. 1982) para describir el conocimiento lógico en alumnos de la ESO.

---

[1] Entendemos número infinito en este artículo como cardinal infinito
[2] ESO: Educación Secundaria Obligatoria, comprendida entre los 13 y 16 años.
[3] Cuando nos referimos a series numéricas, en todo el artículo, como conjunto de números relacionados entre sí y que suceden unas a otras.

Un estudio exploratorio nos dio una idea de cómo realizar las tareas que realizaron los alumnos. Posteriormente, se realizaron las entrevistas. Una vez que fueron analizadas las situaciones singulares encontradas, pudimos dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explicara las competencias del alumnado.

Las respuestas a las tareas analizadas denotaron la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos permitió caracterizar diferentes perfiles del conocimiento de la comparación entre series numéricas finitas e infinitas, así como su evolución. Todo ello nos llevó a clasificar los alumnos de la muestra en distintos niveles.

## 2. Antecedentes

Los antecedentes de este trabajo los buscamos en distintos campos teóricos:

- ***Epistemología matemática***.

De una forma generalizada desde las teorías de Aristóteles, con el concepto de infinito potencial y actual, hasta las ideas de Cantor concernientes a cardinales infinitos. Específicamente, y dado la amplitud de antecedentes en este campo de las matemáticas, nos hemos centrado en las teorías de Russell en “Los principios de la Matemática” (1903) en su intento de comparar lo finito con lo infinito.

- ***Educación Matemática***.

Nos hemos basado en la extensa bibliografía y su estudio realizada por Bruno D’Amore (1996).

- ***Psicología***

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados, es sobre el método de inducción para series numéricas. Según Ortiz (1997), las investigaciones y trabajos se podrían agrupar en los siguientes apartados y referencias significativas:

- La inducción como una capacidad (Pellegrino, 1976).
- Análisis de procesos cognitivos (Holzmann, 1983).
- Elaboración de la información (Sternberg, 1986).
- Errores del razonamiento inductivo (Ross, 1981).

Estos a lo que se refieren a la psicología cognitiva, con respecto al constructivismo piagetiano se podría distinguir dos interpretaciones:

- La inducción como instrumento intelectual (Inhelder, 1955; Oleron, 1967).
- La inducción como generalización de estructuras (Moreno y Sastre, 1983).

## 3. Modelo evolutivo del conocimiento

### 3.a. Objetivo

Nos proponemos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre la comparación de series numéricas finitas e infinitas que explicara e integrara los siguientes factores:

- ✓ La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
- ✓ Los tipos de series que se toman en consideración.
- ✓ La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello fue necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el alumno acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias.
- Examinar el desarrollo curricular y analizar su incidencia en las tareas y competencias en estudio, teniendo en cuenta que el desconocimiento.
- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que elegimos para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores (13 años) a las superiores (16 años), resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal. Se presentan, a continuación, los distintos niveles.

NIVEL I: Los alumnos no distinguen entre lo finito y lo infinito.

NIVEL II: Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de pocos términos y estos son los primeros.

NIVEL III: Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de un mayor número de términos.

NIVEL IV: Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con pocos términos iniciales.

NIVEL V: Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con mayor número de términos iniciales.

Pero en el proceso de validación, debemos distinguir dos etapas desde el punto de vista metodológico: la construcción del modelo y la valoración empírica del modelo.

### 3.b. Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado buscamos una prueba que forme parte de un diseño experimental adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, que no es otro que el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes estados de conocimiento y las transiciones de unos estados a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974). Dicho método puede tener la siguiente forma:

> *Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones* (Piaget y Apostel, 1986; Bermejo y Lago 1991; Sophian, 1995; Ortiz y González, 1998; Fernández Escalona, 2001).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos estados que entran a formar parte del modelo evolutivo y la comparación entre los mismos. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los estados. Por tanto, la prueba consta de cinco tareas, una por cada estado.

## 3.c. Tareas asociadas a los niveles del Modelo Evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

El procedimiento seguido queda sistematizado en el siguiente cuadro, el que explicamos a continuación del mismo:

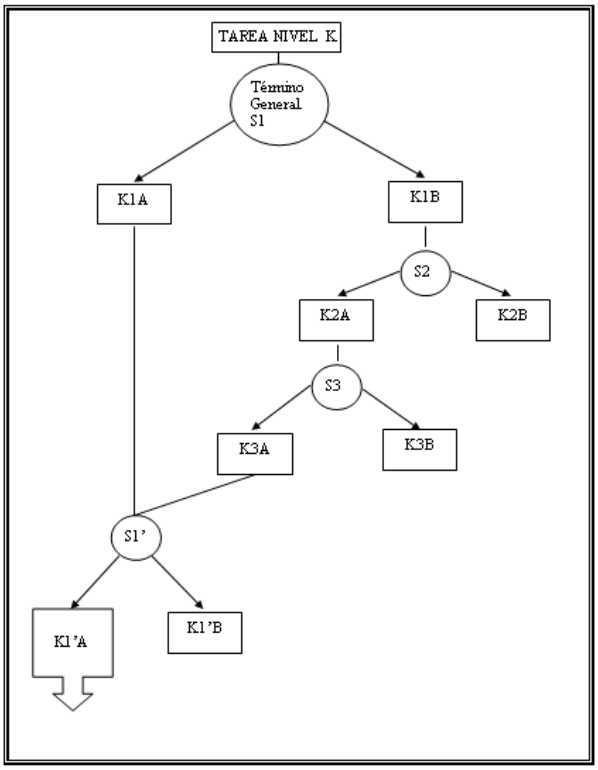


**Gráfico 1**. Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico.

- Cuando indicamos nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores I, II, III, IV y V.
- La tarea específica para cada uno de los estados, se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1. Está situación es la presentación de una serie numérica a partir del término general.
- La situación S1 divide a los alumnos en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A, y la segunda como K1B.
- A los alumnos de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los alumnos de K1B en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los alumnos de la categoría K2B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.
- La situación S3 divide a los alumnos de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los alumnos de la categoría K3B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir la Situación S1 o bien la situación S1', la misma que resolvieron los de la categoría K1A.
- Los alumnos de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden, ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3. Si no la resolvieran quedarían en la categoría K1'B y serían considerados de un nivel inferior.
- Los alumnos que después del proceso precedente están en K1'B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y están en un estado inferior al considerado.
- Los alumnos que están en K1'A, bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los alumnos del nivel en cuestión.

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos, algunas consideraciones generales sobre las situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas-ordinales del estado.

- **Tareas asociada al Nivel II**

Situación 1:

Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando $n$ esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) y cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series divergentes básicas de la forma:

$$a_n = n + k \,, \qquad\qquad a_n = k.n$$

Situación 2:

Situación a la cual llegan aquellos alumnos que no han superado con éxito la anterior tarea, o bien no entendieron la pregunta, o bien desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación, se les explica en qué consiste el término general y se les ayuda a elaborar la serie a partir de él. Si fuera necesario, es decir, si no lograran generar los términos a partir del general, se les presentan las series desarrolladas para que las comparen.

Situación 3:

Situación a la cual llegan aquellos alumnos que han superado con éxito la situación 2. Se les presentan algunas series muy parecidas a las de S1 para que las elaboren y comparen.

Situación 1´:

Situación a la que llegan aquellos alumnos que superaron con éxito la situación S1 o aquellos que superaron con éxito la situación S3. En este caso la tarea será similar pero con un mayor número de términos en el caso de la serie numérica finita.
Aquellos alumnos que no supieron diferenciar las series finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel I y los que lo supieron diferenciar pasan a las tareas programadas siguientes.

- **Tareas asociada al Nivel III**

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan sólo que a las series numéricas finitas las diferencia un mayor número de términos.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito, llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel II.

- **Tareas asociada al Nivel IV**

Situación 1:

Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la $n$ esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) y cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series convergentes básicas de la forma:

$$a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k \,, \qquad a_n = \frac{1}{n+k} \qquad \text{y} \qquad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones que preceden, en las que los alumnos superan o no estas tareas, son similares a la expuesta en las tareas asociadas al nivel II, pero ahora trabajando con series convergentes.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.

- **Tarea asociada al Nivel V**

Tareas y situaciones similares a las anteriores, tan solo que a las series numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.
Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', se catalogan en el nivel V. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

## 4. Estudio empírico cualitativo

### 4.a. Preliminar

Como la pretensión general del estudio empírico es validar un modelo evolutivo sobre un conocimiento concreto: el número infinito; la prueba que consideramos adecuada es la entrevista clínica semiestructurada en base a lo que reseña White y Gunstone (1992) refiriéndose a las entrevistas sobre conceptos; Cohen y Manion (1990) en cuanto a las entrevistas semiestructuradas y al análisis de tareas; o Piaget y Apostel (1986) sobre el método clínico y las entrevistas clínicas.

Cuando los alumnos se enfrentan a tareas no usuales en la enseñanza, pueden manifestar el estado real de comprensión de los conocimientos. Esto a diferencia de otras tareas rutinarias, en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En este sentido, las tareas que hemos considerado en la prueba (entrevistas clínicas semiestructuradas) creemos que son adecuadas para analizar el estado real de comprensión del infinito en los alumnos por varios motivos:

- Las situaciones concretas pensadas para la prueba parten de un material original en el que confluyen esquemas lógico-matemáticos del número infinito.
- No son tareas usuales en la educación reglada, con lo cual se evitan los aspectos rutinarios que se puedan dar y además se permite que aflore la comprensión del conocimiento deseado.
- La determinación de las tareas viene precedida por la construcción de un modelo evolutivo.
- Las tareas asociadas a los niveles del modelo teórico manifiestan las características lógico-matemáticas de cada uno de los mismos.

### 4.b. Propósito del estudio

Con esta parte de la investigación se pretende aplicar un modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante la comparación de series numéricas y comprobar, con alumnos de ESO (13 a 16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real. También caracterizar cada uno de los diferentes niveles de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento

### 4.b. Tareas

Las tareas consisten en lo siguiente:

- Se trata de comparar dos pares de series numéricas, una finita y otra infinita. Las series presentadas son las básicas, del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel I.

- Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en este nivel II.
- Se trata de comparar dos pares de series numéricas, una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.
- Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{1+k.n}{n} = \frac{1}{n} + k$, $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes, donde a la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas son catalogados en el nivel superior V, los que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

### 4.d. Desarrollo de la entrevista

A continuación expresamos la forma en que procedimos en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo teórico. El procedimiento general fue el siguiente:

Para cada uno de los niveles su tarea asociada conlleva, a su vez, a tres situaciones. Para la situación S1 (situación inicial primera de la tarea K) se realizará una clasificación de respuestas atendiendo a que el alumno realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación S2 (segunda de la tarea K). Si no realizara con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar la situación S3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar una tarea similar a la situación S1 modificada llamada S1'. Si la realizara correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

**Fotos:** Desarrollo de las entrevistas.

### 4.e. Resultados y conclusiones de las pruebas

Diremos que un alumno ha superado con éxito la tarea del Nivel K si realiza correctamente la situación S1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría K1A. En el caso que un alumno se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 4 según se indica en el apartado siguiente. Vamos a considerar, que el alumno da la respuesta que se le asignará en las tablas correspondientes si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

### 4.f. Análisis de respuestas

En primer lugar[4] presentamos una tabla, que recoge el resumen de respuestas de cada uno de los alumnos según las tareas, situaciones dentro de las tareas y, si procede, la estrategia utilizada. Para la interpretación correcta de las tablas debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Cada casilla de la primera fila indica que se va a evaluar la resolución de la tarea asociada al nivel correspondiente. Al pasar de un nivel a otro, la línea de separación entre columnas queda marcada por el grosor de la misma.
- Para cada una de las tareas asociada a un nivel, se consideran las situaciones que la determinan. Se empieza con la situación 1 y se termina con la misma. Esto se refleja en la segunda fila de las tablas.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno cuyas respuestas se registran en esa misma fila. Los números que aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad.
- Los alumnos están agrupados por edades, al pasar de un curso a otro en la tabla, la línea de separación entre filas tiene mayor grosor.
- Las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 2)[5] se rellenan si aparecen en blanco las casillas (A, Nivel K, 1)[6]. Para cada alumno se rellena la casilla (i, Nivel K, 3) si anteriormente ha sido marcada la casilla (A, Nivel K, 2).

[4] Para el análisis cualitativo de respuestas nos hemos basado en la metodología seguida en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de C. Fernández Escalona (2001).
[5] La primera componente de la terna, i, toma los valores A ó B. Respecto a la segunda componente, la letra K varía entre II y V.
[6] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la primera columna del Nivel K en la tabla.

Análogamente se da esta misma situación entre las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 1)[7] y (A, Nivel K, 3).

- Los recuadros de coordenadas (A, Nivel K, 1), con K variando entre II y V, indican que los alumnos han superado el nivel que se indica en la terna.
- El número que aparece en las casillas sombreadas correspondientes a las coordenadas (A, Nivel K, 1), indica la estrategia seguida por el alumno en la tarea asociada al nivel que se considera en la terna.

La codificación de las estrategias se registra en el siguiente cuadro:

| TAREAS ASOCIADA A LOS NIVELES | ESTRATEGIAS |
|---|---|
| II | 1. Ensayo y error.<br>2. Contar.<br>3. Comparar series.<br>4. Razona sobre el nº infinito . |
| III | 1. Ensayo y error.<br>2. Contar.<br>3. Comparar series.<br>4. Razona sobre el nº infinito. |
| IV | 1. Ensayo y error<br>2. Calculadora<br>3. Comparar series.<br>4. Razona sobre el nº infinito. |
| V | 1. Ensayo y error.<br>2. Calculadora.<br>3. Comparar series.<br>4. Razona sobre el nº infinito. |

Debemos puntualizar que, para cada nivel, las estrategias codificadas como *1* y *2* son propias de niveles inferiores, *3* y *4* corresponden a esquemas lógico-matemáticos propios de los niveles en cuestión o a niveles superiores. Una vez realizadas todas las aclaraciones pertinentes pasamos a presentar la tabla de resultados de los alumnos.

| | | | TAREA NIVEL II | | | | TAREA NIVEL III | | | | TAREA NIVEL IV | | | | TAREA NIVEL V | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 1' | 1 | 2 | 3 | 1' | 1 | 2 | 3 | 1' | 1 | 2 | 3 | 1' |
| 1º CURSO | A. 12 | A | 4 | | | | 4 | | | | | | | 4 | 4 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | C. 12 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | E. 12 | A | 3 | | | | 2 | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | P. 12 | A | 4 | | | | 4 | | | | | | | 3 | 4 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | T. 12 | A | | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2º CURSO | P. 13 | A | | | | 2 | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | B. 13 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | I. 13 | A | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | M. 13 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | I. 13 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3º CURSO | P. 14 | A | | | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | T. 14 | A | | | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | L. 14 | A | | | | 3 | 4 | | | | 4 | | | | 4 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | MA. 14 | A | 3 | | | | 3 | | | | | | | 4 | 4 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | A. 14 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | M. 14 | A | 3 | | | | 4 | | | | 4 | | | | 4 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4º CURSO | B. 15 | A | | | | 3 | 3 | | | | 3 | | | | 3 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | A. 15 | A | | | | 3 | 3 | | | | 3 | | | | 3 | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | R. 15 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | C. 15 | A | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | G. 15 | A | 2 | | | | 2 | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | M. 15 | A | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | B | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Tablas.** Distribución de respuestas de cada alumno por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles.

[7] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la cuarta columna del Nivel K en la tabla

Cabe aclarar que el sombreado de la cuadrícula indica que el alumno ha llegado a realizar esa tarea en dicho nivel. El número que aparece, es la estrategia utilizada para contestar positivamente.

## 5. Resultados y conclusiones

Hemos establecido un modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante comparación de series y comprobado la utilidad y eficacia del modelo para describir el comportamiento real.

Hemos caracterizado cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento. Dicha caracterización es:

***Nivel I***

Se caracterizan porque son capaces o no de etiquetar los elementos de una serie numérica diferenciándolos unos de otros, pero sin establecer comparaciones entre ellos y si lo hacen, sin encontrar diferencias.

***Nivel II***

Se caracterizan porque además de construir las series numéricas convergentes infinitas, saben diferenciarlas sustrayendo un número pequeño y primeros de elementos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos y términos primeros.

***Nivel III***

La característica fundamental es: saben distinguir las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de una cantidad mayor de número de términos.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cualesquiera.

***Nivel IV***

Sus características son: construyen tanto series finitas como infinitas y diferencian éstas con pocos términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas infinitas convergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

***Nivel V***

Se caracterizan porque saben distinguir sucesiones finitas e infinitas, a las que la diferencian con mayor número de términos iniciales.

Reconocen el número infinito en la comparación de dos series básicas convergentes cualesquiera.

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en el nivel V, los alumnos que alcanzan ese nivel son los que resuelven la tarea asociada al estado IV con estrategias superiores.

Por otro lado, hemos comprobado que es posible determinar pruebas para el nivel de estos alumnos que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidos por tareas que podemos ordenar de menor a mayor dificultad dependiendo de los esquemas implicados en cada una de ellas.

Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

## Bibliografía


Bermejo, V.; Lago, M. (1991).*Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos*. Madrid. C.I.D.E.

Claparède, E. (1976). Prefacio en, J. Piaget, *Le Langage et la pensèe chez l'enfant, 9ª ed. Neuchâtel:* Delachaux et Niestlé.

Cohen, L.; Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid.

D'Amore, B. (1996). *El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática*. Epsilon nº 36, 341-360.

Fernández Escalona, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Holzmann, T. (1983). *Cognitive variables in series completion*. Journal os Educational Psychology 75, 603-618.

Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant á la loguique de l'adolescen.* París.

Inhelder, B.; Sinclair, H.; Bovet, M. (1974). *Aprendizaje y estructuras de conocimiento.* Morata. Madrid.

Moreno y Sastre. (1983). *Aprendizaje y desarrollo intelectual*. Barcelona. Gedisa.

Olerón, P. (1967). *Las actividades intelectuales*. En Trité de Psychologie Expeérimentale (VII) L'Intelligence. Presses Universitaire de France.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, A., González, J.L. (1998). *El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número.* Aula: Revista de enseñanza e investigación educativa. N° 10. Universidad de Salamanca. 65-87.

Pellegrino, J.W. (1976). *Components of inductive reasoning*. En R. Snow, P.A.

Piaget. J.; Apostel, L., y otros (1986). *Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética*. Barcelona. Paidós

Ross, L. (1981). *The teaching of the thinking*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. Referenciado en Nickerson, R.S. (1985).

Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Madrid. Espasa Calpe (Versión original es de 1903).

Sternberg, R. (1986). *Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence*. Cambridge: University Press.

Sophian, C. (1995). *Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets.* Child Development, v66 n2. 559-577.

Vinh-Bang. (1966). *La mèthode clinique et la recherché en psychologie de l'enfant.Psychologie et èpistemologie gènétique*: thèmes piagètiens, Paris, Dunod, 67-81.

White, R. ,Gunstone, R. (1992). Probing understanding. The Falmer Press. London.

**Juan Antonio Prieto Sánchez**. Licenciado en CC Físicas. Certificado-Diploma de Estudios Avanzados en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática (Tesina) Málaga, bienio 2002/2004.Master Didáctica de las Matemáticas, Puerto Real, bienio 2007-08. Profesor de educación secundaria de matemáticas. j_prieto_sanchez@hotmail.com

**Dirección: Dra. Catalina Fernández Escalona.**