Septiembre de 2009, Número 19, páginas 63-76
ISSN: 1815-0640

Desarrollo histórico del álgebra vectorial

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Hacemos un recorrido histórico del álgebra vectorial, desde la síntesis inicial hecha por Euclides en sus Elementos, pasando por los esfuerzos de Leibniz para encontrar un análisis geométrico distinto del algebraico, hasta los trabajos de Hamilton y Grassmann. Terminaremos con las conclusiones de Gibbs sobre la polémica cuaternalista y la presentación conjunta que hace de las ideas de Hamilton y Grassmann.

Abstract

We look at the history of vector algebra from the initial synthesis by Euclid in his Elements, through the efforts of Leibniz to find a different analysis of algebraic geometry, to the work of Hamilton and Grassmann. ends with conclusions on the controversy of Gibbs cuaternalista and presentation that makes the ideas of Hamilton and Grassmann.

Resumo

Fazemos um recorrido histórico da Álgebra vetorial, desde a sínteses inicial feita por Euclides em seus Elementos, passando pelos esforços de Leibniz para encontrar uma análise geométrica diferente da algébrica, até os trabalhos de Hamilton e Grassmann. Terminaremos com as conclusões de Gibbs sobre a polêmica dos quaterniões e a apresentação conjunta que faz das idéias de Hamilton e Grassmann.

1. Introducción

A nivel elemental, es común considerar el álgebra como la ciencia de los números y la geometría como la de las figuras, del espacio, considerándolas como partes diferenciadas de las matemáticas. Sin embargo, la evolución del pensamiento matemático ha tendido a unirlas estableciendo una síntesis entre ellas y abriendo nuevos campos. Esta unión origina, a finales del XIX, el Álgebra vectorial formulada por Gibss y Heaviside.

En los “Elementos” de Euclides se encuentra la primera síntesis entre álgebra y geometría, al dar una solución geométrica a un problema aritmético: definición de razón sin usar los números naturales. Esta síntesis tuvo nefastas consecuencias para las matemáticas griegas pues se abandonan los procesos infinitos, que constituyeron un intento de solución parecida a las cortaduras de Dedekind, e incluso el álgebra babilónica y se crea un álgebra geométrica que, para algunos, mató la matemática griega.

El álgebra fue reinventada en el mundo árabe y, siglos después, una nueva relación, conocida como geometría analítica, fue iniciada con Descartes. En efecto, en lugar de geometrizar el álgebra, Descartes algebriza la geometría desarrollando el álgebra en un lenguaje geométrico[1]. Quizás lo más significativo fue descartar la idea griega de representar el producto de dos segmentos de línea por un rectángulo, y dar, en su lugar, una regla para multiplicar segmentos de línea que da otro segmento de línea en correspondencia con el producto numérico y evitando las limitaciones de la regla griega de multiplicación geométrica y abandonando el principio de homogeneidad.

Descartes trabaja con productos geométricos de cualquier orden y muestra como describir curvas mediante ecuaciones algebraicas, iniciando la geometría analítica y dando un gran paso en el desarrollo del lenguaje matemático.

Pero, este método cartesiano establece una especie de matemática ciega, abandona la idea física por cálculos matemáticos sobre las componentes cuando lo que se busca es sustituir las coordenadas cartesianas por símbolos cuya sola mirada basten para tener una imagen de su significado físico. La síntesis cartesiana es, por tanto, provisional hasta encontrar un análisis geométrico distinto del análisis algebraico.

Leibniz anticipa las líneas programáticas de este análisis geométrico. En una carta del 8 de septiembre de 1679 escribía a Huygens[2] :

"Aún no estoy contento con el álgebra, porque en geometría no da los métodos más cortos ni las construcciones más bellas. Por eso creo, que por lo que respecta a la geometría, precisamos otro análisis claramente geométrico o lineal que exprese directamente "el sitio" como el álgebra expresa la cantidad. Creo que he encontrado el método y que podemos representar figuras incluso maquinas y movimientos por medio de caracteres como el álgebra representa números o cantidades. Os envío el ensayo que a mí me parece interesante"

Entre el 10 y 20 de octubre vuelve a escribir a Huygens recabándole su opinión. Finalmente, el 22 de noviembre, Huygens contesta de manera poco esperanzadora[3]:

"*He examinado atentamente lo que me habéis enviado referente a vuestra nueva característica, pero debo deciros francamente, no puedo concebir, partiendo de lo enviado, que se pueda fundamentar una esperanza tan grande, …Ingenuamente os digo, que a mí me parecen bellos deseos, son necesarias otras pruebas para creer que hay algo real en lo que me avanzáis*".

No obstante Leibniz, en la respuesta a la carta anterior, insiste en su idea crítica con la geometría analítica cartesiana aunque reconoce que su plan para separar del álgebra numérica un análisis geométrico, es incapaz de realizarlo. No obstante los elementos característicos de su plan:

- La geometría analítica es parte del álgebra y no del análisis geométrico

[1] D. Hestenes, New Foundations for Classical pag 6-7
[2] G. W. Leibnitz Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. pag 558 y sig.
[3] G. W. Leibnitz Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. pag 580

- Los objetos del álgebra son los números indeterminados (cada aplicación especificará su significado) y las magnitudes (que pueden identificarse con las medidas sobre una escala)
- La Física exige tal análisis geométrico

Estos elementos no pasaron para nada desapercibidos.

2. De los cuaterniones a los vectores

Las operaciones vectoriales se consideran por primera vez, explícitamente, aunque sin que se defina aún el concepto de vector, a propósito de la representación geométrica de los números complejos proporcionada por Wessel, Argand y Gauss, así como es también la base de los trabajos de Bellavitis, iniciados en 1832, los cuales le llevaran a su "Teoría de las equipolencias", primera representación de conjunto de un cálculo de magnitudes dirigidas y orientadas.

No obstante, la utilidad de los números complejos es limitada pues si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo estas no tienen por que estar en el mismo plano, por consiguiente se hace necesaria una versión tridimensional de los números complejos.

Wessel, Servois, Möebius lo intentaron. El propio Gauss intentó construir un álgebra de números de tres componentes, en la que la tercera componente represente un desplazamiento en una dirección perpendicular al plano *a+bi*. Así se llega a un álgebra no conmutativa, pero no era el álgebra requerida por los físicos. Además no tuvo apenas influencia pues no se publicó.

En 1837 Hamilton publicó su *"Teoría de la funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro"*[4]


Hamilton

En la tercera sección de esta obra, dedicada a las parejas algebraicas, *Hamilton* desarrolló los números complejos en términos de parejas ordenadas de números reales casi de la misma forma en la que se utiliza en la Matemática moderna. Como *Hamilton* creía que la representación geométrica era útil para la intuición y no para la justificación lógica de estos números (" *On ne cherche pas a voir, mais a comprendre* "), introdujo el par ordenado de números reales y definió operaciones sobre el.

[4] Este título tiene su origen en Kant pues los números reales como tiempo son definidos como la razón de la longitud de un segmento de recta sobre un segmento unidad. Kant pensaba que la geometría pertenece al espacio y la aritmética al tiempo

Los números complejos proporcionan un álgebra para representar los vectores y las operaciones con ellos, así, no es necesario realizar las operaciones geométricamente pero es posible trabajar con ellos algebraicamente.

Con esta teoría de parejas, *Hamilton* estaba preparado para descubrir y aceptar los números complejos de cuatro dimensiones sin necesidad de interpretaciones geométricas. La versión final de su trabajo la presento en sus *Lectures on Quaternions* (Lecturas sobre Cuaterniones,1853).

Los cuaterniones ofrecen un instrumento privilegiado, como el soñado por Leibniz, para la investigación en Física pues, no sólo los símbolos representan en nuestra imaginación la geometría que describen, sino que abren un universo de posibilidades. Hamilton es consciente de esto como queda claro en la presentación de su operador nabla[5]:

"*Prefiero corregir aquí una aplicación peculiar de los símbolos fundamentales i, j, k de este cálculo que parece más probable que ocurra en un futuro, ampliamente útil en mucha investigaciones físicas importantes. Introduciendo como una nueva característica, un símbolo definido por la fórmula* $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$ *que se concibe actuando sobre escalares, vectores o cuaterniones considerados como funciones de las tres variables independientes x, y, z….*"

El comentario es una anticipación del papel decisivo del nuevo cálculo en la formulación de la nueva teoría electromagnética de Maxwell. Estas impresiones podemos reafirmarlas con las siguientes palabras de Hamilton tras mostrar la fórmula de $-\nabla^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$

"*La simple inspección de esta fórmula debería bastar para convencer a cualquier persona enterada de las modernas investigaciones en FÍSICA ANALÍTICA, en relación con la atracción, calor, electricidad, magnetismo etc que las ecuaciones de este artículo han de volverse muy útiles en el estudio matemático de la naturaleza, cuando el cálculo de los cuaterniones atraiga una atención mas general y sea utilizado como un instrumento de investigación por manos mas hábiles que las mías*"[6]

La dificultad de las Lectures proviene del estilo metafísico empleado con la intención de transmitir " *los pensamientos fuentes, las concepciones primarias y las actitudes básicas de la mente*"[5] durante el proceso de su descubrimiento. Este estilo, lento y difícil, se pone de manifiesto desde la primera lección dedicada al concepto de vector como línea dirigida y a la suma y resta de vectores; emplea mas de 20 páginas de carácter filosófico para presentar el vector como un operador de transporte o como una diferencia entre dos puntos, que se presentara finalmente en la ecuación " *vector = vectum - vehend* ", que se puede traducir por "transportador = punto transportado - punto a transportar ".

---

[5] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions* (Hodges and Smith, Dublin 1853). 609-611.

[6] W.R.Hamilton, On Quaternions Proceedings of the Royal Irish Academia,3. 273-292.

De la misma forma introduce el vector opuesto, *"revector = vehend - vectum* ", y la suma de vectores como la aplicación sucesiva de un "vector" y un "provector " que equivale a un "transvector".

Finalmente, alude en esta primera lección al hecho de que estas reglas de adición y sustracción coinciden, en su teoría, con las de los números complejos y con las de composición y descomposición de fuerzas.

Para justificar las reglas de multiplicar los símbolos i, j, k desarrolla el concepto de versor, lo hace como un cociente de dos vectores de igual módulo, *"versor = versum / vertend*", y, en general, el de "factor" como un cociente de dos vectores cualesquiera, *"factor = factum/faciem*"; para, finalmente, en su segunda lección, presentar los símbolos i, j, k, no sólo como vectores unitarios sino también como operadores de rotación de 90°.

En la tercera lección, Hamilton define el cuaternión como un "factor" que se descompone en el producto de su módulo, al que llama "*tensor*", y de su parte vectorial que es un cuaternión proporcional al dado y unitario.

En las lecciones cuarta, quinta y sexta estudia las potencias y raíces cuaterniónicas y demuestra la propiedad distributiva del producto cuaterniónico para volver, por último, en la séptima a considerar el cuaternión como suma de su parte escalar y de su parte vectorial, y a partir de aquí demostrar que la multiplicación es asociativa (esta es la primera vez en que se utiliza este término).

En esta última lección también presenta un estudio de los determinantes de tercer orden como la parte escalar del producto cuaterniónico de tres vectores; asimismo, estudia el logaritmo de un cuaternión y las ecuaciones de primer y segundo grado con cuaterniones, para esto introduce los bicuaterniones o cuaterniones con componentes complejas.

En 1853 el astrónomo John Herschel escribe a Hamilton diciéndole que sus Lectures *"exigían 12 meses para ser leídas y casi toda la vida para ser digeridas*"[7]. En 1859 vuelve a intentar la lectura y no pudiendo pasar de la tercera lección, le confiesa:

"*Me he visto obligado a abandonarlas con desesperación. Os ruego que escuchéis esta llamada de socorro. Estoy seguro que podría exponer todo esto de una manera tan clara que el mismo cálculo, considerado como un instrumento, se volvería accesible a los lectores dotados con menos poder de penetración. Una vez dominado el algoritmo y las convenciones para poder trabajar, estos lectores estarían mejor preparados para acompañaros en las interpretaciones metafísicas"*[8]

En 1862, Hamilton escribe a su amigo A. S. Hart:

"*Quiero acabar un libro de consulta con la intención por mi parte de que los Elementos puedan ser citados en los futuros trabajos y memorias sobre los cuaterniones como los Elementos de Euclides"*[9].

[7] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,2 pag 683.
[8] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,3 pag 121.
[9] Graves,Rev.R.Perceval,Life of Sir Willian Rowan Hamilton,3 pag 139.

De aquí nacerá, con vocación pedagógica, su "Elements of Quaternions" dividido en tres libros en los cuales trata de los vectores y su suma en el primero, de los cuaterniones como cociente de vectores en el segundo y del producto de cuaterniones y vectores y algunas aplicaciones geométricas y físicas en el tercero.

En este tercer libro aparece la distinción entre "cuaternión recto" ,i.e., solo con parte vectorial, y su "índice", el vector correspondiente. Esta distinción filosófica le permite introducir las expresiones de producto escalar y vectorial de dos vectores en función de sus módulos y ángulos.

Las aplicaciones a la física de los cuaterniones corren a cargo de su discípulo, el escocés Peter Guthrie Tait (1831-1901).

Tait estudió en la universidad de Edimburgo y en Cambridge siendo compañero de Maxwell. En 1857, siendo profesor de Matemáticas en Belfast, se le despierta el interés por los cuaterniones siendo la causa un artículo de Helmholtz sobre el movimiento de los torbellinos, lo que le hace pensar que la expresión del operador nabla serviría para el mismo propósito. En 1859, por sugerencia de Hamilton, publica su primer artículo sobre la aplicación de los cuaterniones a las ondas de Fresnel.

Tait

En 1859 los antiguos compañeros de Cambridge le encargan a Tait redactar un texto sobre cuaterniones mas accesible que las Lectures, pero debido a la correspondencia mantenida con Hamilton y a los resultados inéditos conocidos gracias a esta, decide esperar hasta la publicación de los Elementos; así retrasa la publicación de su *"Tratado elemental de los cuaterniones* " hasta 1867, el mismo año en que, siendo catedrático de Filosofía Natural de Edimburgo, publica junto con Lord Kelvin el famoso tratado sobre naturaleza filosófica conocido como los Principia del siglo XIX.

En su tratado, más claro y pedagógico y con más aplicación, lo que lo hace más útil, dedica los dos primeros capítulos a los vectores y su composición y a los productos y cocientes de vectores. En el tercer capitulo aparecen las expresiones equivalentes al producto escalar y vectorial con muchas aplicaciones trigonométricas. El capitulo cuarto es una introducción a la diferenciación de cuaterniones y el quinto un tratado extenso sobre la resolución de ecuaciones de primer grado, donde se introducen las funciones vectoriales lineales que originan los tensores. El último capitulo acaba con un estudio del operador de Hamilton : nabla[10]. Estudia la acción de este sobre funciones escalares y vectoriales y presenta los conceptos equivalentes a los nuestros de gradiente, divergencia y rotacional. También enuncia y demuestra los teoremas de integración de divergencias y rotacionales, da el teorema de Gauss-Ostrogradski (con el nombre de ecuación fundamental) y obtiene, como aplicación, el teorema de Green.

10 Llamada así por Hamilton por que se asemeja a un antiguo instrumento musical hebreo de ese nombre

Durante la década 1855-1864, el compañero de Tait, James Clark Maxwell crea su teoría electromagnética sin que aparezca el concepto de cuaternión. En una alocución en 1870 a físicos y matemáticos de la British Association, anuncia su interés físico por los vectores de Hamilton y por una remodelación del cálculo de cuaterniones que ha de llevar a término hombres del tipo físico ilustrativo y no matemático simbólico:

Maxwell

"*Sólo mencionare el nombre de esa clase importante de magnitudes dirigidas en el espacio, que Hamilton ha llamado vectores y que son el objeto del cálculo de cuaterniones, rama de las matemáticas que, cuando haya sido asimilada por los hombres de tipo ilustrativo y vestido por ellos con imágenes físicas, se volverá, quizás con otro nombre, el método mas poderoso de comunicar verdaderos conocimientos científicos a personas desprovistas del espíritu del cálculo"*[11].

Maxwell es consciente que introduciendo las ideas intuitivas de lo que hoy llamamos laplaciana, gradiente, divergencia, rotacional, y bautizándolas con nombres que ilustran estas ideas, se puede eliminar lo que tiene de abstracto el simbolismo cuaterniónico.

Es notable la responsabilidad lexicográfica con que entabla consultas para encontrar estos nombres. Consulta a su amigo Tait: "*He ahí algunos nombres toscamente trabajados. ¿No podrías tú, como una divinidad bondadosa, dar la forma apropiada a sus contornos para que encajen bien?''*[12]

Sugiere designar la parte escalar y vectorial del producto cuaterniónico del operador nabla por un campo vectorial, i.e., nuestra actual divergencia (cambiada de signo) y nuestro actual rotacional. ''La *parte escalar yo la llamaría Convergencia de la función vectorial y la vectorial la llamaría Torsión de la función vectorial. Pero en este contexto, la palabra torsión no tiene nada que ver con un caracol o una hélice. Si las palabras vuelta o versión sirvieran serían mejor que torsión. Giravueltas está libre de la connotación de caracol. pero quizás es demasiado dinámica para un matemático puro; o sea que por amor a Cayley , diremos rotacional (curl) ''*[13]

Con ocasión de su conferencia a la Sociedad Matemática de Londres, amplia sus consultas lexicográficas:

- "Acabaré proponiendo a la consideración de los matemáticos ciertas frases que expresan los resultados de aplicar el operador de Hamilton ∇P".
- "Yo, en primer lugar propongo que el resultado de aplicar ∇^2 (operador de Laplace con signo negativo) sea llamado la Concentración de la cantidad a la cual se aplica".
- "Para una función escalar P, la cantidad ∇P es un vector que indica la dirección en que P disminuye mas deprisa y mide en que proporción disminuye. Me atreveré, con mucho recelo, a llamar a eso declive (nuestro actual gradiente) de

[11] Maxwell,J.C.Address to the mathematical and Physical Sections of the British Association,1870,220
[12] Knott,C.G.Life and Scientific Work of Meter Guthrie Tait,Cambridge,1911m pag143
[13] Ibidem

P. La magnitud ∇$ es llamada por Lamé el " primer parámetro diferencial " de P, pero en su concepción no interviene la dirección. Necesitamos una palabra vectorial que exprese las dos cosas, dirección y magnitud, y que no sea tomada en ningún otro sentido matemático. Me he tomado la libertad de extender el sentido original de la palabra declive generalizándola al espacio tridimensional".

- "Si σ representa una función vectorial, $\nabla\sigma$ puede contener una parte escalar y otra vectorial que escribiremos S $\nabla\sigma$ y $V\nabla\sigma$ respectivamente. Propongo que la parte escalar sea llamada convergencia de σ"
- "Pero en general, $\nabla\sigma$ también tiene una parte vectorial y propongo, aunque con recelo, que este vector sea llamado el rotacional (curl) de la función vectorial original. Representa la dirección y la magnitud de la rotación de la transportada por el vector σ[14]"

Casi al final de su vida, Maxwell critica el concepto de cuaternión en una carta a Tait (1878) en la que expresa la irreductible dificultad psicológica que supone para un físico aceptar cuadraturas negativas: "*¿Es posible arar con un buey y con mulos juntos al mismo tiempo?*"[15]. Pondera las confusiones que provoca el signo negativo que aparece en la parte escalar del producto cuaterniónico e incluso en la norma. Su deseo sería liberar los vectores de este carácter imaginario con que aparecen incrustados en los cuaterniones.

No deja de ser un tanto sorprendente que habiendo concebido Hamilton los números complejos a partir de una concepción metafísica del álgebra como ciencia del tiempo puro, y sus cuaterniones como sus cálculos geométricos en el espacio, su integración en un único sistema de cuaterniones complejos permite una formulación integrada del espacio – tiempo de la relatividad y de la teoría de Maxwell, su base física.

Esta formulación, que aparece como alternativa a la de Mikowski de 1908, es no sólo la confirmación de las ideas especulativas de Hamilton, sino también una prueba de la sustitución del sistema cuaternionico por el vectorial. La cuarta componente pasa a ser el tiempo o la energía en la nueva imagen del universo de Einstein – Minkowski.

En 1844, un año después del descubrimiento de la multiplicación correcta de los cuaterniones por Hamilton, un lingüista alemán, especialista en literatura sánscrita, Grassmann, publicaba su "Teoría de la Extensión Lineal"; una Nueva Rama de la Matemática en la que se desarrolla un cálculo con vectores de cualquier dimensión, y en donde también aparece una multiplicación no conmutativa (no es ni siquiera asociativa) pero la importancia de la obra solo fue reconocida muy lentamente debido a la dificultad de la lectura y a su extraña terminología. Grassmann desarrolla un álgebra que representa desde su concepción la puesta en práctica de las ideas de Leibniz, y muestra que estas no eran un simple sueño.

Una posterior redacción en 1862 por Grassmann de su obra contribuyó a su desarrollo y tuvo como consecuencia el desarrollo de un álgebra mas restringida para los vectores del espacio tridimensional por parte, fundamentalmente, de Yosiah Williard Gibbs.

[14] Maxwell, 1871,263-265
[15] M. J. Crowe. A History of Vector Analysis pag 137-138

La teoría de extensión de Grassmann tiene notables diferencias con la teoría de Hamilton, pues no esta limitada a las tres dimensiones del espacio sino que es concebida para espacios n dimensionales, además, en ella no es necesario suponer el carácter euclídeo del espacio (o lo que es equivalente, la validez del teorema de Pitágoras).

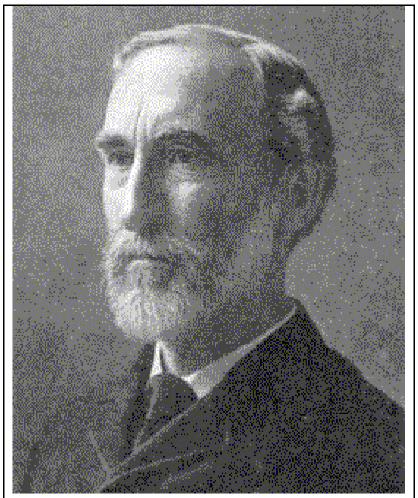
Grassmann

La transición entre los trabajos de Maxwell y los de Gibbs (y Heaviside) fue realizada por Clifford, profesor de matemáticas y mecánica en la University College de Londres; uno de los raros matemáticos de la época que conocía los cuaterniones de Hamilton y el análisis de Grasmann.

Como hemos podido apreciar, en la carta de Maxwell a Tait de 1878, aparecen en clara competencia los sistemas de Hamilton y Grassmann. En este mismo año, Clifford publica su artículo "*Aplicaciones del álgebra de extensión de Grassmann*" donde resuelve, para siempre, la síntesis de los dos sistemas. La síntesis consiste en incluir el sistema de Hamilton en el de Grassmann para dimensión tres.

Clifford mostró especial interés por los trabajos de Grasmann y estaba convencido de la influencia que estos ejercerían en el futuro de la ciencia matemática. En sus " *Elementos de Dinámica*", introduce los vectores, suma y producto. Parece ser el primero en dar la formulación moderna de producto escalar y vectorial, introduce el término divergencia como opuesto al de convergencia de Maxwell y sobre todo introduce la practica de definir por separado el producto escalar y vectorial.

La transformación del cálculo de cuaterniones en Análisis Vectorial se debe al sentido práctico del primer doctor en ingeniería de USA, Gibbs (1839-1903) .Como profesor de Yale tuvo que dar un curso, en 1877, de electromagnetismo para el cual empleó el tratado de Maxwell, lo que le hace interesarse por los cuaterniones y descubrir que " *la idea de cuaternión era totalmente extraña al tema*" lo que le lleva a elaborar una versión exclusivamente vectorial de este cálculo. En 1879 enseña Análisis Vectorial, como un método matemático del electromagnetismo y en 1881 imprime privadamente unas notas tituladas " Elementos de Análisis Vectorial".



Gibas

Así lo describe Gibbs en una carta de 1888[16]:

"El primer contacto con los cuaterniones lo tuve leyen-do La Electricidad y Magnetismo de Maxwell, donde son empleadas a menudo notaciones cuater-niónicas. He llegado a convencerme que, para dominar estos temas, hay que comenzar dominando estos métodos. Simultáneamente, he advertido que, por mucho que estos métodos sean llamados cuaterniónicos, la idea

[16] Wheeler, 1962. 107-108

de cuaternión es totalmente extraña al tema. Respecto al producto de vectores debemos fijarnos que se trataba de dos funciones importantes llamadas parte vectorial y parte escalar del producto y que la unión de las dos para formar el llamado producto (total) no constituía ningún proceso de la teoría como un instrumento de investigación geométrica. Además, al tratar el operador ∇ *aplicado a un vector, la parte vectorial y la parte escalar del resultado representan operaciones importantes pero no parece una idea válida reunirlas* (*generalmente, para tomarlas por separado después*)".

"Así pues voy a empezar a trabajar desde el principio el álgebra de los dos tipos de multiplicaciones, las tres operaciones diferenciales ∇ *(por aplicación a un escalar y por aplicación a un vector son dos operaciones diferentes) y aquellas funciones o mejor dicho operadores integrales que , bajo ciertos limites, son los inversos de las operaciones diferenciales y que representan un papel importante en diversas especialidades de la Física Matemática. A estos temas hay que añadir el de las funciones lineales vectoriales que también son importantes en la Electricidad y Magnetismo de Maxwell"* .

Estas notas, impresas pero no publicadas, escritas muy condensadamente, constituyen el primer tratado de "Análisis Vectorial". En la impresión de 1881 constaban de dos capítulos titulados: "Sobre el álgebra de vectores" y " Sobre el cálculo diferencial e integral de los vectores". En el primero de ellos estudia las operaciones elementales: suma de vectores, producto por un escalar y los dos tipos de productos de dos vectores que Gibbs llama "directo " y " sesgado " y que hoy llamamos escalar y vectorial. También introduce, para distinguirlos, los símbolos del punto y el aspa (a . b, a x b) y en el capítulo segundo introduce las tres acciones del operador vectorial nabla y los teoremas de integración de Gauss, Stokes y Green.

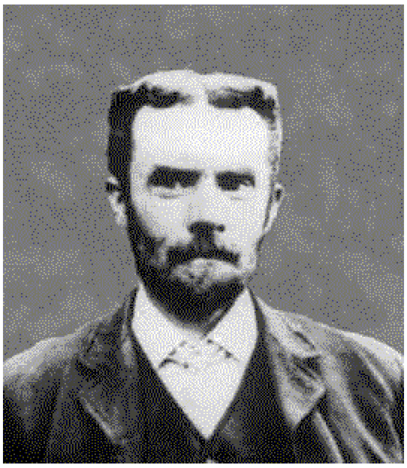
En 1884 añade tres capítulos más, en ellos estudia las "Funciones lineales vectoriales", hoy llamadas tensores, y las aplica al estudio de rotaciones y tensiones. Finalmente se ocupa de los bivectores o vectores con componentes complejas.

Todas estas notas fueron encargadas por Gibbs a un alumno suyo, Wilson, para un libro de texto para los estudiantes de matemáticas y física que se llamó "Análisis Vectorial"[17].

Si bien los trabajos de Gibbs no son una revolución contra los trabajos de Tait y la escuela cuaternionica, el abandono del concepto de cuaternión fue interpretado como una ofensa por los defensores de los cuaterniones. Así, Tait, en su "Tratado elemental de los cuaterniones" se muestra preocupado por el estancamiento que veía en el progreso de los cuaterniones[18]: "*...aquellos que trabajan en este tema han estado más preocupados por modificar la notación o la manera de presentar los principios fundamentales que por entender las aplicaciones del cálculo. Incluso Gibbs ha de ser considerado uno de los retrasadores del progreso cuaterniónico, debido a su folleto sobre Análisis Vectorial, una especie de monstruo hermafrodita que mezcla las notaciones de Hamilton y Grassman*"

La reacción de Gibbs no se hizo esperar originándose una larga disputa, en la revista Nature, entre cuaternionalistas y vectorialistas. En 1891 Gibbs responde a

[17] Wilson,E.B.Vector Analysis,A Text-Book for the use of Students of Mathamatics and Physics,1901.
[18] Tait, Elementary Treatise on Quaternions, Oxford 1867,1873,1890.


Heaviside

Tait mostrando como de hecho, se trata de una cuestión de nociones y no de notaciones y como para el análisis vectorial la noción de cuaternión es superflua.

En este artículo[19] Gibbs hace notar, entre otras ventajas de la formulación vectorial frente a la cuaternionica, el hecho que esta puede ser extendida fácilmente al espacio de cuatro o más dimensiones. Tait responde, preguntando:[20] "¿ *Qué tienen que ver los estudiantes de física con un espacio de más de tres dimensiones* ?"

El punto central de la critica de Tait es la falta de originalidad pues, según el, " las engañosas notaciones sugeridas por el profesor Gibbs" conducen más brevemente a resultados ya obtenidos. En su contestación, Gibbs insiste en la inutilidad del cuaternión[21]:

"*¿Qué importancia tienen las ventajas conseguidas mediante el uso de los cuaterniones*? *En la mayoría de los casos estas ventajas son dudosas e insignificantes*."

Esta discusión duró tres años y en ella medió Heviside que había seguido, en Europa, un camino parecido a Gibbs. Oliver Heaviside (1850-1925) fue un ingeniero de telégrafos londinense al que los problemas de su oficio le llevaron a su estudio e investigación.

Heaviside reconstruye el itinerario que le llevó del electromagnetismo a un álgebra de vectores obtenida mediante la eliminación y simplificación de la cuaterniónica de Hamilton. Comienza con la triste historia de un muchacho que determinado a dominar los cuaterniones, se recluye en los textos de Hamilton y sucumbe en la confusión de esos vectores de cuadrado negativo. Puesto que Maxwell mostraba sus resultados básicos en forma cuaterniónica, acude al tratado de Tait pero encuentra las mismas dificultades. Según él, los cuaterniones en sus aspectos vectoriales, eran antifísicos y antinaturales y no concordaban con la matemática escalar ordinaria, así que decide eliminar del todo los cuaterniones y dedicarse a los escalares y vectores buscando un álgebra vectorial más sencilla que cree encontrar en el Análisis Vectorial de Gibas.

En sus artículos sobre electricidad, aparecen las nociones de rotacional, producto escalar, el operador nabla con sus aplicaciones así como la definición del producto vectorial (indicado con el símbolo de la hamiltoniana$\vee$).

En 1893 publica su teoría electromagnética[22]; en su capitulo tercero: "Los elementos del álgebra y el análisis vectorial"[23], aparecen la suma y el producto de vectores, la integración, el operador nabla y las diversas acciones y teoremas de integración de este. Este capítulo, junto con el "Análisis Vectorial" de Gibbs son los responsables de la aceptación de los vectores por el mundo científico.

[19] Gibbs.J,W.On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector, Nature, 43,511,1891.
[20] Tait,P.G.The Role of Quaternions in the Álgebra of Vectors,Nature,43,808.1891.
[21] Gibbs.J,W Quaternions and the Ausdehnungslehre,Nature,44,79,1891.
[22] Heaviside,O:Electromagnetic Theory,The Electrician,Londres,1893
[23] Ibidem,132-305

Tras la introducción de las nociones de escalar y vector, relaciona su álgebra vectorial con las coordenadas cartesianas[24]:

"*El álgebra vectorial es el lenguaje natural de los vectores y nadie que haya llegado a aprenderla no pensara nunca retroceder de la vitalidad de los vectores a la complejidad mortal del sistema cartesiano*".

La polémica con los cuaterniones comienza con un apartado titulado: " Carácter abstracto de los cuaterniones y comparativa simplicidad que resulta de ignorarlos[25]":

"*Está claro que si suponemos, tal como se supone generalmente, que el álgebra vectorial es una cosa terriblemente difícil que comprende consideraciones metafísicas de carácter abstracto las cuales solo pueden ser entendidas completamente por algunos metafísicos- matemáticos consumadamente profundos como el profesor Tait por ejemplo. Si fuese así, no habría ni la mas remota posibilidad para que el álgebra y el análisis vectorial llegasen a ser algún día universalmente utilizables y yo no estaría escribiendo esto ni persistiría años y años en el uso del álgebra vectorial para la teoría electromagnética*".

Insiste en que lo que pretende es un Tratado de Cuaterniones sin cuaterniones y justifica la abolición del signo menos de los cuaterniones y el convenio de imprimir los vectores en negrillas en contra de las letras griegas empleadas por Hamilton y Tait y de las góticas empleadas por Maxwell. Al final del capítulo vuelve a la polémica con Tait[26]:

"Es sabido que el profesor Tait dice a los físicos que los cuaterniones son justamente lo que ellos necesitan para su objetivo físico. También es sabido que los físicos, con gran obstinación, han estado meticulosos a la hora de no querer saber nada de los cuaterniones. Hemos intentado enmendarlos para hacerlos un poco mas inteligibles con gran disgusto del profesor Tait que quiere conservar la corriente cuaterniónica pura e incontaminada. Ahora bien, *¿Quien tiene razón, el profesor Tait o los contaminadores*?. *Mi opinión es que depende del punto de vista. Si prescindimos de las aplicaciones prácticas a la física, y miramos los cuaterniones solamente desde el punto de vista cuaterniónico, lleva la razón el profesor Tait pues el tratado de cuaterniones ofrece una manera única, simple y natural de tratar cuaterniones*".

"*Confío que el capitulo que estoy acabando pueda servir de suplefaltas hasta que escribamos tratados vectoriales normales, aptos para los físicos y basados en un tratamiento vectorial de los vectores. Los cuaternionalistas quieren arrinconar los "tropiezos cartesianos" que dicen ellos. Eso se puede hacer con los cuaterniones pero hacerlo con los vectores sería una gran equivocación*'.'

La polémica se decidió finalmente del lado de los vectores; los ingenieros aceptaron de buenas maneras el cálculo vectorial aunque no así los matemáticos. Finalmente, los matemáticos siguieron e introdujeron los métodos vectoriales en la geometría analítica y diferencial.

[24] Heaviside,O:Electromagnetic Theory,The Electrician,134,Londres,1893
[25] Ibídem
[26] Ibídem,301-302

Conclusión

En 1972 aparece Gibbs Lectures del eminente físico y matemático Dyson, donde expone las oportunidades perdidas para obtener fructíferos contacto entre matemáticas y física. Entre ellas señala las ecuaciones de Maxwell y el cálculo vectorial:

"*Los matemáticos del XIX fallaron miserablemente al no aceptar la oportunidad no menos grande que les ofrecía Maxwell en 1875. Si las hubiesen tomado tan en serio como Euler hizo con las de Newton, habrían descubierto, entre otras cosas, la teoría einsteniana de la relatividad especial, la teoría de los grupos topológicos y su representación lineal y, probablemente, amplias porciones de las teorías de ecuaciones diferenciales hiperbólicas y análisis funcional. Una gran parte de la física y de las matemáticas del siglo XX podría haberse creado en el XIX explorando hasta el final los conceptos matemáticos que conducen de manera natural a las ecuaciones de Maxwell*"

En relación con el tema de los cuaterniones y de los vectores él dice:

"*En 1844 tuvieron lugar dos hechos notables, la publicación de Hamilton del descubrimiento de los cuaterniones y la publicación de Grassmann de su Ausdehnungslehre . Con la ventaja de la perspectiva que nos da el tiempo, podemos ver que la de Grassmann es la más grande contribución a las matemáticas pues contiene el germen de muchos de los elementos del álgebra moderna, e incluye el análisis vectorial como caso especial. Cuando los trabajos de Grassmann se conocen, los matemáticos se dividen en cuaternionistas y anticuaternionistas y pierden mas energías polemizando a favor o en contra de los cuaterniones que intentando comprender como Grassmann y Hamilton podían acomodarse en un esquema conjunto. En consecuencia, va a quedar en manos de Gibbs la presentación conjunta, en 1886, de las ideas de Grassmann y Hamilton. Las últimas palabras de su lección fueron: "Hemos empezado estudiando álgebras múltiples, acabaremos, creo, estudiando el álgebra múltiple*."

Bibliografía

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*, A.U./94,Madrid.
Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*, AE.
Collete, J. L. (1985). *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI, Madrid.
Crowe, M. J (1985). *A History of Vector Analysis* (Univ. Notre Dame Press, Notre Dame1967 y Dover 1985.
García Doncell, M. (1984). *Orígens Físics de l'analisi vectorial*. El desenvolupament de les matemátiques al segle XIX, Institut d'estudis catalans, Barcelona.
Gibbs, J. (1891*). On the Role of Quaternions in the Algebra of Vector*, Nature. 43, 511
Gibbs, J. W. (1891). *Quaternions and the Ausdehnungslehre*, Nature. 44,79, Rev.R.Perceval (1882). *Life of Sir Willian Rowan Hamilton*,3 vol Dublin.
Hamilton, W.R. (1847). *On Quaternions*.Proceedings of the Royal Irish Academia,3.
Hamilton, W.R.(1837). *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples: with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the science of pure Time.*Transactions of the Royal Irish Academy 17, 293-422.
Hamilton W. R. (1853). *Lectures on Quaternions* (Hodges and Smith, Dublin 1853).

Hestenes, D. (1986). *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer, Dordrecht.
Heaviside, O. (1893). *Electromagnetic Theory*, The Electrician, Londres.
Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II), AU/724, Madrid.
Knott, C.G. (1911). *Life and Scientific Work of Meter Guthrie Tait*, Cambridge,1911.
Maxwell, J. (1870). *Address to the Mathematical and Physical Sections of the British Association*,British Association for the Advancement of Science Repport 40
Maxwell, J. C. (1871). *On The Mathematical Clasification of phisical Quantities*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3.
Parra Serra. (1997). *L'Algebra vectorial* (IEC)
Tait, P.G. (1890). Elementary Treatise on Quaternions, Oxford.
Tait, P.G. (1891). *The Role of Quaternions in the Álgebra of Vectors Nature,* 43, 808.
Taton, R. (1988). *Historia general de la ciencia*,(VIII), Orbis, Barcelona.
Wheeler, L.P. (1962). *Josiah Williard Gibbs*, New Haven.
Wilson, E.B (1901). *Vector Analysis,A Text-Book for the use of Students of Mathamatics and Physics,Yale*, University Press.

Antonio Rosales Góngora. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerce la docencia en el IES Bahía de Almería. Ha publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon, en el Boletín matemático de la UAL, revista Unión, revista Virtual Matemáticas, Educación e Internet. Centro trabajo: IES Bahía de Almería. anrogo58@yahoo.es