UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2010, Número 22, páginas 37-51
ISSN: 1815-0640

De Euclides às geometrias não euclidianas

Vincenzo Bongiovanni , Ana Paula Jahn

Resumo

As Geometrias não Euclidianas têm uma história repleta de hesitações, dúvidas e contradições que só foram eliminadas após um longo trabalho de reflexão e apuramento. É uma história de 20 séculos que rompe com a crença de que a geometria euclidiana é única. Ela se confunde com a história do quinto postulado de Euclides. O fracasso de todas as tentativas de provar esse postulado levou lentamente a uma nova concepção da Matemática em que todos os elementos de uma teoria devem ser cuidadosamente explicitados.

Abstract

The *non Euclidean Geometries* have a history full of hesitations, doubts and contradictions that were eliminated only after a long process of reflection and clearance. It is a history of 20 centuries that breaks with the belief that Euclidean geometry is unique. She is confused with the history of the fifth postulate of Euclid. The failure of all attempts to prove this postulate led slowly to a new conception of mathematics in which all elements of a theory should be carefully explained.

Resumen

Las geometrías no euclidianas tienen una historia llena de vacilaciones, dudas y contradicciones que se han eliminado sólo después de un largo proceso de reflexión y de aclaración. Es una historia de 20 siglos que rompe con la creencia de que la geometría euclidiana es única. Ella se confunde con la historia del quinto postulado de Euclides. El fracaso de todos los intentos de demostrar este postulado condujo lentamente a una nueva concepción de la matemática en la que todos los elementos de una teoría deben ser explicado detenidamente.

1. Os Elementos de Euclides

O mais antigo texto matemático grego que nos chegou completo é a obra de Euclides *Os Elementos*. Essa obra constituída de 13 livros expõe resultados da matemática elementar em ordem lógica, desde a época de Tales (600 a.C) até Euclides (300 a.C). O quadro abaixo, apresenta os tópicos de cada um dos treze livros.

Livro I	Propriedades dos triângulos, teoria das paralelas (proposições 27 a 32) e figuras equivalentes	23 definições, 9 axiomas, 5 postulados, 48 proposições
Livro II	Álgebra geométrica	2 definições, 14 proposições
Livro III	A geometria do círculo	11 definições, 39 proposições
Livro IV	Polígonos regulares	7 definições, 16 proposições
Livro V	A teoria das proporções	18 definições, 25 proposições
Livro VI	Tales e figuras semelhantes	4 definições , 33 proposições
Livro VII	Teoria dos números	23 definições, 39 proposições
Livro VIII	Teoria dos números	27 proposições
Livro IX	Teoria dos números	36 proposições
Livro X	Números incomensuráveis	4 definições, 115 proposições
Livro XI	Geometria espacial de posição	28 definições, 39 proposições
Livro XII	Áreas e volumen	18 proposições
Livro XIII	Poliedros regulares	18 proposições

O que distingue a obra de Euclides de todas as outras que chegaram até nós e faz a sua grandeza é a sua estrutura axiomática. O livro I é a chave da apresentação do método axiomático. A partir de algumas definições, 9 axiomas e 5 postulados Euclides deduz 465 teoremas. Os postulados eram proposições que se pediam que fossem aceitos sem demonstração e segundo a tradução de VITRAC eram cinco:

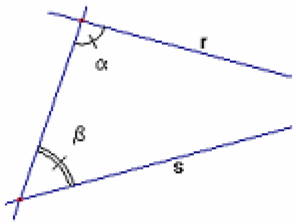
Postulado1: Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer.
Obs.: a palavra *reta* na obra de Euclides equivale ao nosso *segmento de reta*. É um postulado garante a existência do segmento.

Postulado2: Pode-se prolongar uma reta infinitamente.
Obs.: o postulado 2 garante a existência da reta.

Postulado3: Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
Obs.: esse postulado garante a existência da circunferência.

Postulado4: Pode-se considerar todos os ângulos retos iguais entre si.

Postulado5: Se duas retas interceptadas por uma terceira reta, formam, do mesmo lado dessa reta secante, dois ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas quando suficientemente prolongadas se interceptam por esse lado da secante.
Obs.: A partir do diagrama abaixo, o quinto postulado de Euclides será enunciado numa linguagem moderna: Se $\alpha+\beta<180°$ então as retas r e s se intersectam do lado de α e β.



O livro I foi objeto de vários comentários por causa desse quinto postulado. A sua forma um pouco complicada incitou muitos matemáticos a tentar deduzi-lo a partir dos outros. Entre aqueles que tentaram estabelecer sem sucesso uma prova podemos citar:

No mundo grego	No mundo árabe	No Ocidente
Ptolomeu (Século II)	Al Haytam (séculoXI)	Saccheri (1733)
Proclus (Século V)	Al Kayyam (séculos XI-XII)	Lambert (1766)
Aganis (século VI)	Al Tusi (século XIII)	Legendre(1794)

Obs.: Legendre(1752-1833) estava tão obcecado em provar o quinto postulado de Euclides que, durante um período de 29 anos, publicou inúmeras tentativas, uma após outra, em diferentes edições do seu livro *Elementos de geometria*.

1.1 A equivalência entre o quinto postulado de Euclides e o postulado das paralelas

Em 1795, o enunciado do quinto postulado de Euclides foi substituído por um outro, equivalente, chamado hoje de *postulado das paralelas*. Tal formulação é devida a Playfair: "*Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada*." Todavia, esse postulado já havia sido considerado por Proclus em sua obra *Comentários sobre o primeiro livro dos elementos de Euclides*.

1.2 Alguns enunciados equivalentes ao quinto postulado de Euclides

As inúmeras tentativas infrutíferas de provar o quinto postulado de Euclides esbarravam no uso indevido de resultados equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

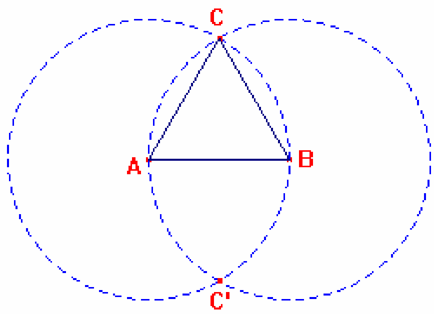
Entre esses resultados podem-se citar :

- A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180°.
- A soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero é igual a 360°.
- As retas paralelas são equidistantes.
- Por três pontos não alinhados passa sempre uma circunferência.
- A linha dos pontos equidistantes a uma reta dada e do mesmo lado da reta é uma reta.
- Existe um retângulo.
- Por um ponto situado no interior de um ângulo pode-se sempre conduzir uma reta que intercepta as duas semi-retas que formam o ângulo.
- Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é reto.
- Se uma reta corta uma de duas retas paralelas então ela corta também a outra

1.3 Imperfeições na obra de Euclides

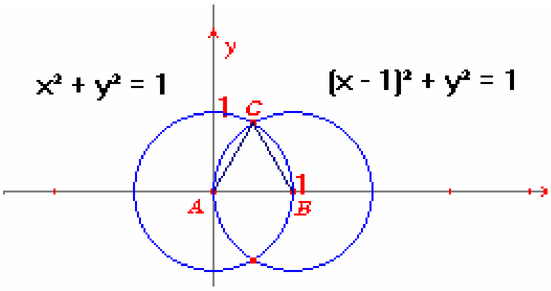
O fracasso de todas as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides levou lentamente a uma nova concepção da matemática em que todos os elementos de uma teoria deveriam ser cuidadosamente explicitados. Uma análise atenta do sistema de postulados de Euclides, mostra que há muitos apelos à intuição nas definições e demonstrações.

Euclides usava fatos que não eram postulados ou conseqüências de teoremas anteriormente provados. Por exemplo, na proposição I do livro I Euclides pede para construir um triângulo eqüilátero sobre um segmento dado.



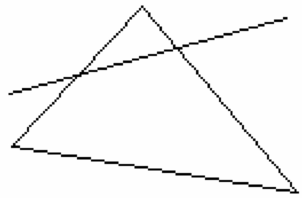
Com o centro em A e raio AB descreve uma circunferência, e com centro em B e raio BA descreva-se outra circunferência. Na demonstração Euclides usa o fato de que as duas circunferências se cortam no ponto C. Mas isso não é necessariamente verdadeiro a partir dos postulados enunciados por ele.

Considere um plano formado por todos os pares ordenados (x,y) com x e y *racionais.*

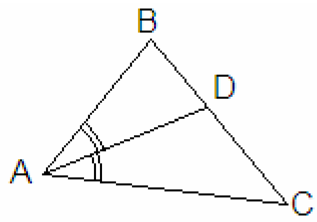


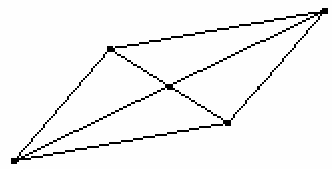
Sejam $x^2+y^2=1$ e $(x-1)^2+y^2=1$ as duas equações das circunferências. Resolvendo o sistema obtém-se C $(1/2, \sqrt{3}/2)$. As circunferências não se intersectam nesse plano pois que a ordenada do ponto C é irracional. Portanto nessa proposição Euclides usou um postulado de continuidade (se uma circunferência tem um ponto interno e um ponto externo a outra circunferência então as duas circunferências se intersectam em dois pontos) não enunciado anteriormente.

No fim do século XIX vários matemáticos passaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da geometria de Euclides, principalmente no que se refere à ordem. Utilizando os postulados de Euclides não se pode provar que se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo. Este fato só foi percebido em 1882 pelo o matemático Pasch que o adotou como postulado nas suas demonstrações.



Outros resultados utilizados freqüentemente em demonstrações não podem ser provados com o sistema de Euclides. Por exemplo, não é possível provar que se a bissetriz interna AD de um ângulo de um triângulo ABC intersecta o lado BC no ponto D então esse ponto está entre B e C e também não se pode provar que as diagonais de um paralelogramo se intersectam num ponto.



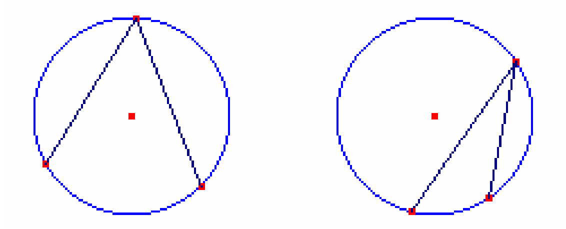


Outra imperfeição encontrada na obra de Euclides é que as demonstrações por superposição não eram rigorosas. Usavam deslocamentos que não eram definidos. Para provar o caso de congruência LAL Euclides começa por mover um dos triângulos de forma a fazê-lo coincidir com o outro, mas nenhum dos postulados lhe permitia esse movimento.

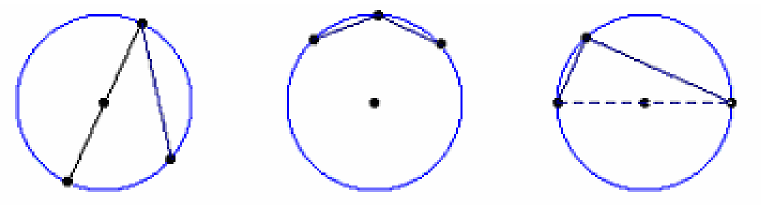
Como garantir que o movimento não alterava a forma do triângulo? Faltava, portanto um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento. Alguns geômetras sugeriram o seguinte postulado "*as figuras geométricas podem deslocar-se sem modificar seu tamanho e forma*." Esse postulado foi utilizado por todos os geômetras gregos mas sem enunciá-lo explicitamente.

Em 1557, o geômetra Pelletier o considera como uma definição. Em 1638, o geômetra Borelli toma a precaução de advertir: vamos sobrepor os triângulos não materialmente mas sim intelectualmente. Em 1898, Hilbert o inclui na lista de seus postulados (hoje, a maioria dos sistemas axiomáticos o denomina de caso LAL de congruência de triângulos).

Outro problema na axiomática de Euclides é o fato das demonstrações se basear apenas na figura considerada. Vários resultados eram generalizados a partir da demonstração de um único caso particular. Na proposição 20 do livro III, Euclides demonstra que o ângulo inscrito num triângulo é o dobro do ângulo central correspondente. Para isso, ele distingue somente dois casos de figura onde o ângulo inscrito é agudo.



Nenhuma palavra é dita sobre os casos em que os ângulos inscritos são obtusos, ou retos ou possuindo um lado passando pelo centro.



Os exemplos acima mostram que o sistema de postulados de Euclides não era completo. Faltavam postulados de separação, de continuidade e de congruência. Além disso Euclides não reconheceu a importância dos conceitos não definidos.

1.4 Algumas das adaptações dos Elementos de Euclides

Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria. Cada autor de manual respeitava a divisão feita por Euclides, e no interior de cada livro, a disposição e a formulação das diferentes proposições.

Em 1741, Clairaut fêz uma tentativa de apresentar a geometria elementar de uma maneira intuitiva. Segundo Lehmann e Bkouche: « *Clairaut propõe-se definir as condições que permitem ao principiante adquirir um conhecimento da Geometria a partir da observação e da experiência e de desenvolver, por meio de problemas bem escolhidos, os métodos de raciocínio que lhe permitem progredir. Os problemas que servem de ponto de partida são aqueles das medidas de terreno, mais próximos das idéias geométricas. Clairaut discorda da exposição euclidiana e do papel da lógica no ensino , e prefere enfatizar o papel desempenhado pela experiência.* »

Uma outra tentativa de adaptação dos *Elementos* foi feita por Lacroix que escreveu um livro fazendo um equilíbrio entre o rigor e a aceitação de verdades evidentes.

Legendre teve uma outra preocupação e foi na direção contrária a uma geometria intuitiva. Tratou a geometria de uma maneira mais rigorosa, mais axiomática. Legendre pode ser considerado como um precursor da axiomática moderna.

1.5 A estrutura do livro I de Euclides

Apresentamos abaixo a Estrutura do livro I de Euclides extraída do livro *Os Elementos* de Euclides, volume I, tradução de Vitrac, página 514. Observe que há propriedades que dependem do quinto postulado de Euclides e propriedades que não o utilizam.

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comum	Proposição
1	15,20	1,3	1	
2	15,20	1,2,3	1,3	1
3	15	3	1	2
4			7,9	
5		1,2	3	3,4
6		1	8	3,4
7		1	8	5
8			7	7
9	20	1		1,3,8
10	20			1,4,9
11	10,20	1		1,2,3,8
12	10,15	1,3		8,10
13	10		1,2	11
14		2,4	1,2,3,8	13
15		4	1,2,3	13
16		1,2	8	2,3,4,10,15
17		2	4	13,16
18		1	8	3,5,16
19				5,18
20		1,2	8	2,5,19
21		2	4	16,20
22	15	1,3	1	2,3,20
23		1		8,22
24		1	1,8	2,4,5,19,23

Proposição	Definição	Postulados	Noções Comum	Proposição
25				4,24
26		1	1,8	3,4,16
27	23	2		16
28		4	1,2,3	13,15,27
29	23	2,**5**	1,2,4	13,15
30			1	27,**29**
31		1,2		23,27
32		2	1,2	13,**29**,31
33		1		4,27,**29**
34		1	2	4,26,**29**
35			1,2,3	4,**29**,**34**
36		1	1	**33,34,35**
37		2	6	31,**34,35**
38		2	6	31,**34,36**
39		1	1,8	31,**37**
40		1	1,8	31,**38**
41		1	1,2	**34,37**
42		1	1,2	10,23,31,**38,41**
43		1	2,3	**34**
44		1,2,**5**	1,8	15,**29,30**,31,**42,43**
45		1	1,2	14,**29,30,33,34,42,44**
46	22	4	1,3	2,3,11,**29**,31,**34**
47		1,4	1,2,5	4,14,**30**,31,**41,46**
48		1	1,2	2,3,8,11,**47**

O quadro acima mostra que as proposições 1 a 28 e a proposição 31 não dependem do 5^{o} postulado de Euclides.

1.6 A geometria absoluta

No sistema axiomático de Euclides, chama-se **geometria absoluta** ao estudo das propriedades que utilizam todos os postulados de Euclides exceto o quinto.

Legendre demonstrou que na geometria absoluta valem os seguinte resultados: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180^{o} e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é menor ou igual a 360^{o}

Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta que antes de morrer publicou um livro com o título "*Euclides liberto de qualquer imperfeição*". Nele, Saccheri tenta demonstrar o quinto postulado de Euclides usando o raciocínio por absurdo. Nega o quinto postulado e tenta deduzir uma contradição. Com as propriedades da geometria absoluta prova-se que ambos os ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri são congruentes. Ele considerou três hipóteses para os ângulos superiores a) ambos retos b) ambos obtusos c) ambos agudos.

Admitindo que os ângulos eram obtusos, chegava numa contradição. Mas Saccheri por mais que tentasse não conseguia chegar num absurdo quando admitia que ambos eram agudos. Conseguia deduzir vários resultados estranhos, mas nunca uma contradição. Foi aí que mesmo sem encontrar uma contradiçãp, enganou a si mesmo pronunciando uma frase célebre: "*a hipótese de ambos os ângulos serem agudos é falsa, pois repugna a natureza da reta."* Sem saber Saccheri estava dando os primeiros passos em direção às geometrias não euclidianas.

2. O aparecimento das geometrias não euclidianas

Pelo fim do século XVIII foram feitas novas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides por meio de demonstrações indiretas. Mas, em vez de conduzir a uma contradição, este novo conjunto de axiomas formou a base de uma teoria consistente chamada hoje de **geometrias não euclidianas.**

Lobatchevsky em 1829, negou o quinto postulado de Euclides, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas. Ele foi a primeiro a publicar esta teoria, por isso é considerado o fundador oficial das geometrias não euclidianas, embora Gauss em 1824 numa carta enviada a Taurinus, já soubesse dessa possibilidade. Em 1832, Bolyai, independentemente, obteve os mesmos resultados. Essa geometria passou a ser chamada de **geometria hiperbólica**. Em 1854, Riemann nega o quinto postulado de Euclides admitindo a outra negação: por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada. Essa outra geometria não euclidiana passou a ser chamada de **geometria esférica.**

Mas faltava ainda uma prova para dizer que nesta nova geometria não surgiriam contradições. Beltrami, Klein e Poincaré demonstram a consistência desta nova geometria pelo método dos modelos. Um modelo para um dado sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos verdadeiros.

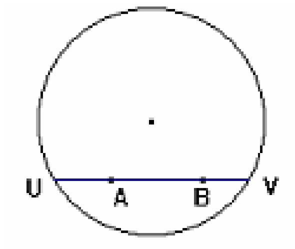
Fundadores das Geometrias Não Euclidianas	Os modelos
Gauss (1824)	Beltrami (1869)
Lobatchevsky (1829)	Klein (1871)
Bolyai (1832)	Poincaré (1881)
Riemann (1854)	

O primeiro modelo que mostra a consistência dessa nova geometria foi apresentado por Beltrami. Trata-se do modelo da pseudo-esfera para a geometria hiperbólica. A dificuldade em interpretar nesse modelo levou Klein a procurar uma representação plana das retas da pseudo-esfera chamadas geodésicas.

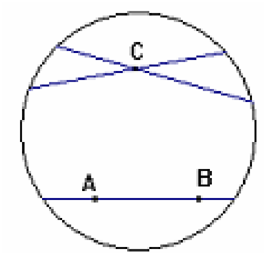
Ele obteve esse modelo considerando o interior de um círculo. As retas da pseudo-esfera tornavam-se cordas desse círculo. E dessa forma ele descobriu as primeiras regras do que se chamaria de modelo de Klein-Beltrami. Nesse modelo o plano é o interior de um disco de centro O e raio r e qualquer ponto no interior do disco é um ponto hiperbólico. A reta é uma corda qualquer sem as suas extremidades e a distância entre dois pontos A e B é dada pela fórmula

$$\left| \ln (AU/AV)/ (BU/BV) \right|$$

onde U e V são os pontos de intersecção da corda com a circunferência e AU,AV,BU e BV são distâncias euclidianas.

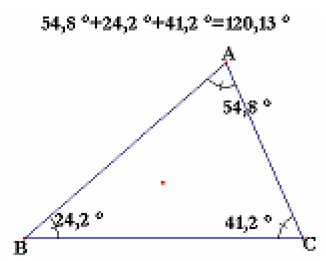


Esta interpretação constitui um modelo da geometria hiperbólica pois que os quatro primeiro postulados de Euclides e o postulado hiperbólico (por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada) são verificados.

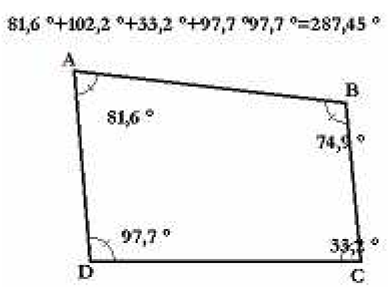


Como conseqüência do postulado hiperbólico pode-se provar que:

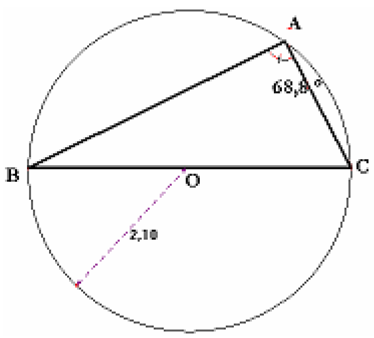
A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que 180°



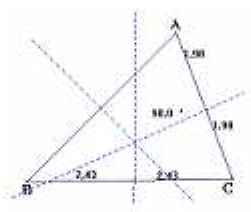
A soma das medidas de um quadrilátero convexo é menor que 360°

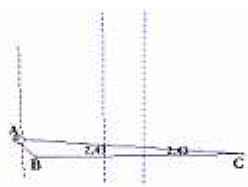


Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é agudo.

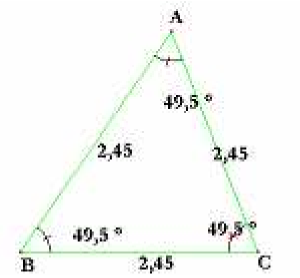


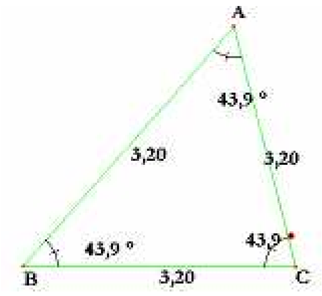
Nesse modelo temos vários resultados surpreendentes (em relação à geometria euclidiana) tais como: as mediatrizes de um triângulo podem ser concorrentes ou paralelas.



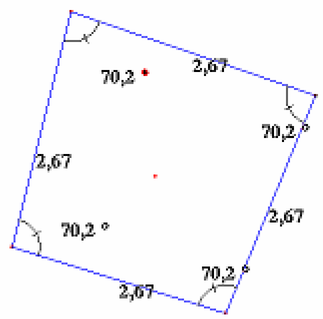


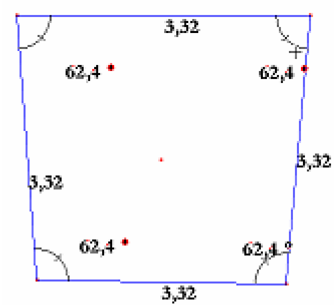
Um outro resultado sem equivalente na geometria euclidiana é que os triângulos eqüiláteros (3 lados iguais) não são semelhantes entre si (têm ângulos diferentes) .



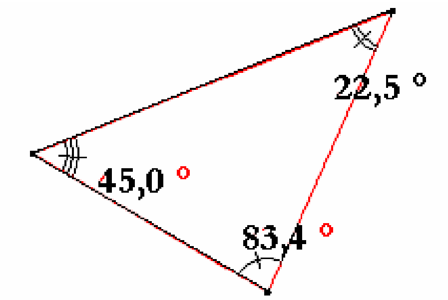


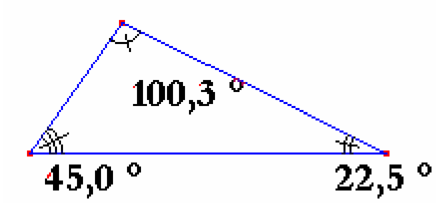
O mesmo ocorrendo com os quadrados. Os quadrados abaixo não são semelhantes.



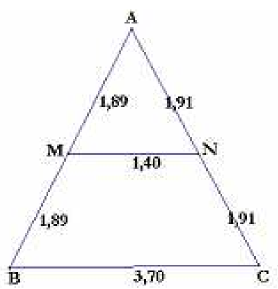


Na geometria hiperbólica dois triângulos podem ter dois pares de ângulos congruentes sem terem o terceiro par de ângulos congruentes.

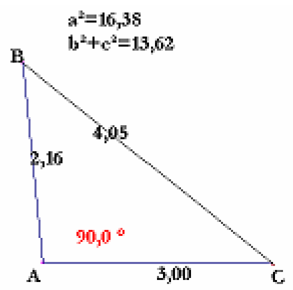




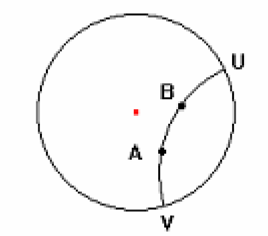
O teorema dos pontos médios não é válido pois depende do postulado das paralelas



A relação $a^2=b^2+c^2$ conhecida como teorema de Pitágoras não é válida na geometria hiperbólica. Sendo a,b e c respectivamente as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo temos que $a^2>b^2+c^2$.



Um outro modelo que mostra a consistência dessa nova geometria é o modelo plano do disco de Poincaré. Nesse modelo consideramos **o plano** como o interior de um disco de centro O e raio r. Qualquer **ponto** no interior do disco será considerado como um ponto nesse modelo. A **reta** será um diâmetro qualquer da circunferência de centro O e raio r sem as extremidades ou a intersecção de um arco de uma circunferência ortogonal à circunferência dada e o interior do círculo dado. O **ângulo** formado por duas retas hiperbólicas será o ângulo euclidiano formado pelas retas euclidianas tangentes às retas hiperbólicas no ponto de encontro. A distância entre dois pontos A e B do plano hiperbólico será dada pela fórmula $|\ln (AU/AV)/ (BU/BV)|$ onde U e V são as intersecções da circunferência ortogonal que contém as retas hiperbólicas com o disco de centro O e raio r e AU,AV,BU,BV são distâncias euclidianas.



2.1 As caracterizações das geometrias pelas transformações

Em 1872 Klein apresentou um trabalho intitulado ”Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas” que ficou conhecido como Programa de Erlangen. Nesse trabalho Klein mostra um novo método de investigação que consiste na fusão entre ramos da matemática aparentemente separados. Apoiado na obra de Jordan “o tratado das substituições” publicada em 1870 onde a teoria dos grupos e as transformações geométricas são enfatizadas, Klein relaciona a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas a partir das transformações geométricas e por meio da teoria dos grupos. Ele foi o primeiro a mostrar que a geometria projetiva não depende do quinto postulado de Euclides.

Klein considera o conjunto formado pelas translações, rotações, reflexões em retas e suas composições. Esse conjunto forma o *grupo das isometrias* em relação à operação composição. Acrescentando a esse último conjunto as homotetias, obtém o *grupo das semelhanças*. Juntando a esse último grupo as afinidades forma-se o *grupo afim*. Incorporando a esse último as projetividades obtém-se o *grupo projetivo*. A partir desses conjuntos, Klein define as geometrias de acordo com o seu grupo de transformações.

A geometria euclidiana, a geometria das semelhanças, a geometria afim e a geometria projetiva são definidas respectivamente como o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações, respectivamente, do grupo das isometrias, do grupo das semelhanças, do grupo afim e do grupo projetivo.

Hoje, costumamos chamar de *geometria euclidiana* o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações do *grupo das semelhanças* (e não das isometrias como usava Klein) e chamamos de *geometria métrica* o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações do *grupo das isometrias.*

Nessa nova apresentação das geometrias, as transformações geométricas fazem o papel de elo entre duas configurações. Elas permitem passar de uma figura a outra transportando as suas propriedades e o estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações.

2.2 Adaptações dos Elementos de Euclides no século XIX

Charles Méray (1835-1911) em 1874 escreve a obra "Les nouveaux éléments de géométrie" onde rompe com a tradição grega de ensinar geometria plana (livros I a VI de Euclides) antes de geometria espacial (livros XI a XIII). Nessa obra ele realiza a fusão entre as duas. Explicita um conjunto de axiomas diferentes dos de Legendre, introduz o estudo das transformações geométricas na sua obra e utiliza a idéia de movimento nas demonstrações. Além disso, propõe um equilíbrio entre uma geometria intuitiva e experimental e uma geometria dedutiva.

Na mesma época, em 1884, na Itália, R. de Paolis escreve um livro-texto intitulado “Elementi di geometria” onde apregoa também a fusão entre a geometria plana e a geometria sólida.

3. Um sistema completo de axiomas para a geometria euclidiana

As inúmeras tentativas fracassadas de provar o quinto postulado de Euclides, mostraram a necessidade de se ter um sistema completo de axiomas eliminando da geometria toda referência à intuição.

No fim do século XIX vários matemáticos começaram a se preocupar com os fundamentos da matemática e em especial com a axiomatização da geometria. O matemático Pasch percebeu que utilizando somente os postulados de Euclides não se podia provar que “*se uma reta intersecta um lado de um triângulo então ela intersectará o outro lado do triângulo*”. Tal fato foi adotado como postulado nas suas demonstrações. Ele também observou, magistralmente, que a noção de “ordem” podia ser desenvolvida sem fazer referência à medida. Essa noção era praticamente desconhecida antes do século XIX. Em 1882, ele publica o livro *Lições de geometria moderna* que é considerado o primeiro desenvolvimento axiomático da geometria projetiva plana. Muitos desse axiomas foram importantes para as axiomatizações das geometrias euclidianas e não euclidianas. O sistema de Pasch foi gradualmente aperfeiçoado por Peano (1889) e Pieri. Mas a formulação axiomática da geometria de Hilbert(1862,1943) foi a que mais se consolidou entre os matemáticos.

Hilbert apresentou o seu trabalho num curso dado por ele em 1898 e publicado em 1899 com o título de *Fundamentos da geometria*. Ele baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. A geometria euclidiana pode ser construída passo a passo partindo do primeiro grupo de axiomas até chegar no quinto grupo.

A *geometria da incidência* é obtida a partir dos axiomas do primeiro grupo de Hilbert e das conseqüências deles decorrentes; a *geometria ordenada* a partir dos dois primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; a *geometria absoluta* a partir dos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; e a *geometria euclidiana* a partir dos cinco grupos de axiomas de Hilbert. O quinto grupo é constituído apenas pelo axioma das paralelas com o seguinte enunciado "por um ponto fora de uma reta passa no *máximo* uma reta paralela à reta dada".

Há uma pequena sutileza na forma de apresentação desse postulado com o quinto postulado de Euclides na forma de Playfair. Hilbert ao usar a palavra *máximo* permite também a não existência da reta paralela por um ponto. A negação do axioma de Hilbert apresenta a seguinte forma "por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada". Essa negação recebeu o nome de axioma de Bolyai-Lobatchevsky.

A geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Boyai-Lobatchevsky recebe o nome de *geometria hiperbólica.* A geometria que utiliza o sistema de axiomas de Hilbert é frequentemente chamada de geometria sintética.

3.1 Uma nova formulação axiomática da geometria euclidiana

O geômetra George E.Martin, no seu livro *The foundations of geometry and the non-euclidean plane* , editora Springer, 1975, capítulo 14, página 155 diz:

"Em 1832 apareceu um texto de geometria contendo um curto apêndice escrito por John Bolyai. Esse apêndice tem sido descrito por G.B.Halsted como " as mais extraordinárias 24 páginas de toda a história do pensamento..." Bolyai e Lobachevsky são reconhecidos como os fundadores das geometrias não euclidianas. Nós pularemos um século até 1932. Esse ano viu a publicação de A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor (O conjunto dos postulados da geometria plana baseados na régua graduada e no transferidor) escrita por George David Birkhoff . Embora ninguém tenha sugerido, esse artigo é tão importante quanto o apêndice de Bolyai.*

Birkhoff (1884-1944) introduz um sistema de axiomas equivalente ao de Hilbert que incorpora o conjunto dos números reais. Os axiomas de Birkhoff, ao contrário dos de Hilbert, introduzem a idéia de medida desde o início. Os segmentos e os ângulos são medidos com os números reais. Faremos uma breve descrição da evolução das idéias de Birkhoff apoiados no artigo O *ensino da geometria e a solução de Birkhoff* de COSTA, H.C.A

Em 1925 Birkhoff escreve um livro de divulgação científica intitulado *The origin, Nature and influence of Relativity*, tentando explicar fatos geométricos básicos de forma acessível. Desenvolve as primeiras idéias da geometria euclidiana a partir de propriedades sugeridas pela régua graduada e pelo transferidor. Em 1930 Birkhoff escreve um artigo em parceria com o professor Ralph Beatley onde apresenta 5 princípios intuitivos sobre medidas de segmentos e de ângulos e utiliza o sistema numérico dos reais para o seu desenvolvimento. Em 1932 Birkhoff reapresenta as suas idéias numa axiomática formada por 4 postulados. Mas essa formulação é inadequada ao ensino elementar pois o quarto postulado admitido é o caso LAL de semelhança de triângulos que substitui o postulado de paralelismo de Euclides. Em 1940 Birkhoff novamente com o professor Beatley publica o livro Basic Geometry para o ensino secundário. O livro apresenta cinco postulados e deduz um conjunto de teoremas. Os postulados são os quatro postulados da versão de 1932 acrescido de um outro que diz: todos os ângulos rasos são iguais entre si e medem 180^o .

A seguir são apresentados sete teoremas chamados por ele de *teoremas básicos.* São eles em ordem: O caso AA de semelhança; se um triângulo é isósceles então os ângulos da base são congruentes e reciprocamente; o caso LLL de semelhança; a soma das medidas dos ângulos de um triângulo igual a 180º ; todo ponto e nenhum outro da mediatriz eqüidista das extremidades de um segmento; por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada; o teorema de Pitágoras. E finalmente apresenta a teoria do paralelismo demonstrando o postulado das paralelas.

Entendemos ser muito difícil para um professor acostumado a iniciar o seu curso de geometria, com a teoria do paralelismo e terminar com a teoria da semelhança, inverter a sua seqüência didática para se submeter ao novo formato apresentado por Birkhoff. Provavelmente seja esse o motivo pela sua não aceitação pelos professores do secundário. Em 1959 MacLane aponta as vantagens do método de Birkhoff e apresenta uma variante mais satisfatória e compreensível. Mas continua sendo pouco indicada à sala de aula.

Somente quando a organização educacional norte americana SMSG (School Mathematics Study Group) apresenta em 1960 uma outra variante da axiomática de Birkhoff, com uma formulação dedutiva também para a geometria espacial é que o tratamento métrico começa a ter aceitação nos Estados Unidos, país onde se desenrola toda a história desta axiomática. Entre os geômetras que adaptaram com sucesso o sistema de Birkhoff para o ensino citamos E.E Moise (1962). No Brasil essa axiomática é utilizada como referência na maioria dos livros didáticos. A geometria que utiliza esse sistema de axiomas recebeu o nome de geometria métrica.

3.2 A axiomática de Bachmann

Em 1959, Bachmann fornece um novo ponto de vista para a apresentação dos fundamentos da geometria. É uma abordagem totalmente algébrica que identifica simetrias ortogonais a retas e simetrias centrais a pontos e que permite incluir todos os outros tipos de geometrias. Essa axiomática é atualmente considerada como o estado da arte do programa d'Erlangen de Félix Klein.

3.3 Uma formulação axiomática da geometria euclidiana via álgebra linear

Em 1964 Jean Dieudonné publica o livro *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* com uma nova apresentação da geometria euclidiana. Define o plano (ou o espaço) como um espaço vetorial sobre R, de duas (ou três) dimensões munido de um produto escalar. Portanto, substitui os postulados da geometria euclidiana pelos axiomas do espaço vetorial.

Bibliografia

Boyer C.B. (1996):*História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher,.
Castrucci B. (1976): *Lições de geometria plana*, livraria Nobel S.A
Costa H.C.A (1985): *O ensino da geometria e a solução de Birkhoff*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática
Euclides(1994) : *Les Éléments*, volume 1,2,3,4, PUF,1994 Tradução Bernard Vitrac
Greenberg M (1994): *Euclidean and non Euclidean Geometries: development and history*. New York: Freeman and Company.
Hilbert D. (1971): *Les fondements de la géométrie*, Éditions Jacques Gabay
Klein F. (1974): *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars Éditeur
.Laborde, J.M (1997): Exploring non-Euclidean geometry in a Dynamic Geometry Environment like cabri-géomètre
Moise, E.E. (1976). *Geometria elemental desde um punto de vista avanzado*,C.E.C.S.A
Proclus de Lycie(1948): *les Commentaires sur le premier livre des Éléments d´Euclides*, IREM de Lille.

Vincenzo Bongiovanni, possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (1973), mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; (1987) e doutorado em Didática da matemática - Université Joseph Fourier (2001). Atualmente é professor do Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo. Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br

Ana Paula Jahn, possui Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1989), Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1994) e Doutorado em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier - Grenoble I, França (1998). Atualmente é professora-pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). anapjahn@gmail.com